

UNIV. OF
TORONTO
LIBRARY



Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
University of Ottawa

1410

3

BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE FRANCE.

29536

Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE

DE FRANCE,

PUBLIÉ

PAR LES SECRÉTAIRES.

TOME VINGT-NEUVIÈME. — ANNÉE 1901.

PARIS,
AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ,
A LA SORBONNE.

1901

155277
15/6/20

BULLETIN

SOCIÉTÉ NATIONALE

QA

I

S59

t.29-30

ÉTAT

DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

AU COMMENCEMENT DE L'ANNÉE 1901 ⁽¹⁾.

(9 JANVIER.)

Membres honoraires du Bureau....	{ MM. APPELL. CREMONA. DARBOUX. HATON DE LA GOUPIILLIÈRE. HERMITE. JORDAN. PICARD. POINCARÉ.
----------------------------------	---

Président.....	MM. D'OCAGNE.
Vice-Présidents	{ CARVALLO. PAINLEVÉ. RAFFY. VICAIRE.
Secrétaires	{ BLUTEL. BOREL.
Vice-Secrétaires.....	{ BRICARD. DUPORCQ.
Archiviste.....	BIOCHE.
Trésorier.....	CLAUDE-LAFONTAINE.
Membres du Conseil ⁽²⁾	{ ANDOYER, 1903. ANDRÉ, 1903. BOURLET, 1904. FOURET, 1903. GUYOU, 1903. HADAMARD, 1904. LECORNU, 1902. LEVY (L.), 1902. LUCAS (F.), 1902. MAILLET, 1904. NIEWENGLOWSKI, 1904. TOUCHE, 1902.

⁽¹⁾ MM. les Membres de la Société sont instamment priés d'adresser au Secrétariat les rectifications qu'il y aurait lieu de faire à cette liste.

⁽²⁾ La date qui suit le nom d'un membre du Conseil indique l'année au commencement de laquelle expire le mandat de ce membre.

Date
de
l'admission.

1872. ACHARD, ancien directeur de la Compagnie d'assurances sur la vie *la Foncière*, rue de la Terrasse, 6 bis, à Paris (17^e).
1900. ACKERMANN-TEUGNER, éditeur, à Leipzig.
1893. ADAM (Paul), ingénieur des ponts et chaussées, docteur ès sciences mathématiques, boulevard des Invalides, 40, à Paris (7^e).
1900. ADHÉMAR (vicomte Robert d'), 140, boulevard Raspail (14^e).
1896. ANDOVER, maître de conférences et chargé de cours à la Faculté des Sciences, avenue d'Orléans, 5, à Paris (14^e).
1894. ANDRADE, maître de conférences à la Faculté des Sciences de Montpellier, campagne Battigue, à Laignelongue (Hérault).
1872. ANDRÉ (Désiré), docteur ès sciences mathématiques, rue Bonaparte, 70 bis, à Paris (6^e).
1890. ANTONARI, docteur ès sciences, professeur au lycée Carnot, rue Daubigny, 11 bis, à Paris (17^e).
1879. APPELL, membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences et à l'École Centrale des Arts et Manufactures, rue de Noailles, 23, à St-Germain-en-Laye (S.-et-O.).
1881. ASTOR, professeur à la Faculté des Sciences, place Vaucanson, 4, à Grenoble (Isère).
1900. AURIC, ingénieur des ponts et chaussées, à Valence (Drôme).
1882. AUTONNE, ingénieur des ponts et chaussées, rue Mont-Bernard, 9, à Lyon (Rhône).
1900. BAIRE, docteur ès sciences, professeur au lycée de Bar-le-Duc.
1896. BAKER, professeur à l'Université, Toronto (Canada).
1894. BALITRAND, capitaine du génie, à Tlemcen (Algérie).
1889. BEGHIN, ancien élève de l'École Polytechnique, rue du Champ-de-Mars, 22, à Paris (7^e).
1875. BERDELLÉ, ancien garde général des forêts, à Rioz (Haute-Saône).
1872. BIENAYMÉ (Arthur), inspecteur général du génie maritime en retraite, rue Revel, 14, à Toulon (Var).
1888. BICHNE, professeur au lycée Louis-le-Grand, rue Notre-Dame-des-Champs, 56, à Paris (6^e).
1875. BISCHOFFSHEIM, membre de l'Institut, rue Taitbout, 3, à Paris (9^e).
1898. BLAKE (Edwin-M.), 1910, Addison street, à Berkeley, Californie (U. S. A.).
1900. BLUMENTHAL (Otto), docteur en philosophie, Herzberger chaussée, 49, à Göttingen.
1891. BLUTEL, professeur au lycée Saint-Louis, maître de conférences à la Sorbonne, rue Denfert-Rochereau, 110, à Paris (14^e).
1892. BONAPARTE (prince Roland), avenue d'Iéna, 10, à Paris (16^e).
1895. BOREL, maître de conférences à l'École Normale supérieure, 30, boulevard Saint-Germain, à Paris (5^e).
1896. BOULANGER, maître de conférences à l'Université, rue Caumartin, 80, à Lille (Nord).
1896. BOURGET (Henry), maître de conférences à la Faculté des Sciences, rue Saint-Jacques, 20, à Toulouse (Haute-Garonne).
1896. BOURLET, professeur à l'École des Beaux-Arts et au lycée Saint-Louis, avenue de l'Observatoire, 22, à Paris (14^e).
1886. BRAULT DE BOURNONVILLE, avenue de la Grande-Armée, 79, à Paris (16^e).
1900. BREITLING, proviseur du lycée Saint-Louis, boulevard Saint-Michel, 44 (6^e).
1897. BRICARD, ingénieur des manufactures de l'État, répétiteur à l'École Polytechnique, 6, rue Monge, à Paris (5^e).
1873. BROCARD, chef de bataillon du génie en retraite, Ville-Haute, 75, à Bar-le-Duc.
1893. BURKHARDT, professeur à l'Université, Kreuzplatz, 1, à Zürich (Suisse).

Date
de
l'admission.

1897. CABREIRA, membre de l'Académie royale des Sciences, rua da Alegria, 32, à Lisbonne.
1894. CAHEN, professeur au collège Rollin, 32, rue de la Pompe, à Paris (16^e).
1893. CALDAGERA, professeur à l'Université, palazzo Giampaolo, via della Libertà, à Palerme.
1888. CANET (Gustave), ingénieur civil, directeur de l'artillerie de MM. Schneider et C^o, boulevard Malesherbes, 1, à Paris (8^e).
1885. CARON, professeur de géométrie descriptive, rue Claude-Bernard, 71, à Paris (5^e).
1892. CARONNET, docteur ès sciences mathématiques, rue Demours, 62 bis, à Paris (17^e).
1896. CARTAN, maître de conférences à la Faculté des Sciences, rue Suchet, 38, à Lyon.
1887. CARVALLO, répétiteur et examinateur d'admission à l'Ecole Polytechnique, rue Clovis, 1, à Paris (5^e).
1887. CASPARY (F.), Joachimsthalerstrasse, 43, à Charlottenburg (Allemagne).
1890. CEDERCREUTZ (baronne Nanny, née de Lagerborg), Georgsgatan, 22, à Helsingfors.
1892. CELLERIER (Gustave), quai des Eaux-Vives, 34, à Genève (Suisse).
1896. CELS, professeur au lycée Condorcet, 6, square du Roule, à Paris (8^e).
1887. CERRUTI, professeur à l'Université, rue delle Sette Sale, 16, à Rome (Italie).
1888. CHAILAN (Édouard), rue Berthollet, 16, à Paris (5^e).
1893. CHARLIAT, ingénieur des arts et manufactures, rue de Paradis, 46, à Paris (10^e).
1896. CHARVE, professeur à la Faculté des Sciences, cours Pierre-Puget, 60, à Marseille.
1881. CHEMIN, ingénieur en chef des ponts et chaussées, avenue Montaigne, 33, à Paris (8^e).
1884. CHRYSTAL, professeur à l'Université, à Édimbourg (Écosse).
1875. CLAUDE-LAFONTAINE, banquier, rue de Trévise, 32, à Paris (9^e).
1872. COLLIGNON, inspecteur général des ponts et chaussées, rue de Seine, 6, à Paris (6^e).
1890. COLOT, château du Seuil, à Cérons (Gironde).
1898. COMBÉBIAC, capitaine du génie, à Limoges.
1900. COMTE (Firmin), ingénieur des ponts et chaussées en congé, à Bar-le-Duc.
1896. COSSERAT (E.), professeur à la Faculté des Sciences, rue de Metz, 1, à Toulouse.
1896. COSSERAT (F.), ingénieur en chef des ponts et chaussées, rue d'Alsace, 24, à Paris (10^e).
1900. COTTON (Émile), maître de conférences à l'Université de Grenoble.
1896. COURTIN, chef de bataillon du génie en retraite, rue Monge, 21, à Paris (5^e).
1884. CRAIG, professeur à l'Université John Hopkins, à Baltimore (États-Unis d'Amérique).
1877. CREMONA, sénateur, directeur de l'École des Ingénieurs, à Rome (Italie).
1872. DARBOUX, secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, doyen de la Faculté des Sciences, rue Gay-Lussac, 36, à Paris (5^e).
1885. DAUTHVILLE, professeur à la Faculté des Sciences, à Montpellier (Hérault).
1881. DEFFORGES, lieutenant-colonel d'infanterie, en mission à Constantinople (Turquie).
1882. DELANNOY, sous-intendant militaire en retraite, à Guéret (Creuse).
1895. DELANVA (N.), professeur à l'Institut Polytechnique Empereur Nicolas II, à Vassoxie.
1899. DELEMER, ingénieur des ponts et chaussées, à Aubenas (Ardèche).
1885. DENARTRES, doyen de la Faculté des Sciences, à Lille (Nord).
1892. DEMOULIN (Alp.), professeur à l'Université, rue du Bas-Polder, 20, à Gand (Belgique).
1897. DEMIS (Henry), élève libre à l'École d'application du Génie maritime, rue de Fleuryrus, 23, à Paris (6^e).
1883. DERUITS, professeur à l'Université, rue des Augustins, 35, à Liège (Belgique).
1894. DESAINI, docteur es sciences, boulevard Grevy-Saint-Cyr, 17, à Paris (7^e).

Date
de
l'admission.

1900. DICKSTEIN, 117, Marszatkowska, Varsovie.
1899. DRACH (Jules), maître de conférences à la Faculté des Sciences, à Clermont-Ferrand.
1896. DUMAS (G.), licencié ès sciences, à Gland, canton de Vaud (Suisse).
1897. DUMONT, professeur au lycée, rue Royale, 10, à Annecy (Haute-Savoie).
1886. DUNCAN, Consulting Engineer, Empire Building, Broadway, 71, New-York City.
1895. DUPORCQ (Ernest), ingénieur des télégraphes, boulevard Pereire, 162, à Paris (17^e).
1896. DUPORT (Henry), professeur à l'Université, rue Colonel-de-Grancey, 1, à Dijon.
1897. DURAN-LORIGA, command. d'artillerie, 20, plaza de Maria Pita, à la Corogne (Espagne).
1885. DYCK (Walther), Technische Hochschule, à Munich (Bavière).
1900. ESTAYAVE, docteur ès sciences, à la Sorbonne, à Paris (5^e).
1900. ESTIENNE, capitaine au 19^e régiment d'artillerie, à Nice.
1896. EUVERTE, ancien élève de l'École Polytechnique, ancien capitaine d'artillerie, rue de Seine, 6, à Paris (6^e).
1888. FABRY, professeur à la Faculté des Sciences, à Montpellier (Hérault).
1891. FAUQUEMBERGUE, professeur au lycée, à Mont-de-Marsan (Landes).
1898. FERBER, capitaine d'artillerie, professeur adjoint à l'École d'application, rue d'Avon, 17, à Fontainebleau (Seine-et-Marne).
1892. FEHR (Henri), professeur à l'Université, rue Gevray, 19, à Genève (Suisse).
1885. FIELDS (John), professeur de mathématiques, 356-357th street, à Chicago.
1881. FLEQUET, professeur à la Faculté des Sciences, rue Saint-Lambert, 17, à Nancy.
1872. FLYE SAINTE-MARIE, chef d'escadron d'artillerie en retraite, ancien répétiteur à l'École Polytechnique, place Royer-Collard, à Vitry-le-François (Marne).
1896. FONTANEAU, ancien officier de marine, cours Bugeaud, 8, à Limoges (Haute-Vienne).
1897. FONTENÉ, professeur au collège Rollin, boulevard Barbès, 21 bis, à Paris (18^e).
1895. FONTÈS, ingénieur en chef des ponts et chaussées, rue Romiguières, 3, à Toulouse.
1891. FONTVILANT (DE), profes. à l'École Centrale, rue d'Erlanger, 29, Paris-Auteuil (16^e).
1889. FOUCHÉ, professeur de mathématiques, rue Soufflot, 5, à Paris (5^e).
1872. FOURET, examinateur d'admission à l'École Polytechnique, rue Washington, 16 (8^e).
1892. FROLOY (le général), quai des Eaux-Vives, 36, à Genève (Suisse).
1900. GALDEANO (Z.-S. DE), professeur à l'Université, à Saragosse.
1872. GABRIEL, ingénieur en chef des ponts et chaussées, professeur à la Faculté de Médecine, rue Edouard Detaille, 6, à Paris (17^e).
1896. GAUTHIER-VILLARS, ancien élève de l'École Polytechnique, éditeur, quai des Grands-Augustins, 55, à Paris (6^e).
1890. GEBBIA, professeur libre à l'Université, à Palerme (Italie).
1872. GENTY (E.), ingénieur en chef des ponts et chaussées, rue de Vaugirard, 207, à Paris (15^e).
1890. GENTY (Max), lieutenant de vaisseau, directeur du Parc d'aérostation de Lagoubràn, villa Emeriau, à Toulon.
1890. GERBALDI, professeur à l'Université, via Daita, 11, à Palerme (Italie).
1897. GERBANS, professeur à Worcester College, Saint-John Street, 20, à Oxford (Grande-Bretagne).
1896. GIRARDVILLE, capitaine d'artillerie, avenue Maigny, 133, à Montreuil-sous-Bois (Seine).
1881. GOURSAT, professeur à la Faculté des Sciences, répétiteur à l'École Polytechnique, boulevard Arago, 112, à Paris (14^e).

Date
de
l'admission.

1896. GREENHILL, professeur à l'École d'artillerie, à Woolwich (Grande-Bretagne).
1896. GRÉVY, professeur au lycée Saint-Louis, boulevard Saint-Germain, 13, à Paris (5°).
1899. GUADET, ancien élève de l'École Polytechnique, boulevard Saint-Germain, 240 bis, à Paris (7°).
1880. GUCCIA (Jean), professeur à l'Université, via Ruggiero Settimo, 28, à Palerme (Italie).
1900. GUICHARD, professeur à l'Université de Clermont-Ferrand.
1891. GUIMARÆS, officier du génie, à l'Académie des Sciences, rue Nova da Piedade, 55, à Lisbonne (Portugal).
1881. GUNTHER (Dr Sigismond), professeur à l'École Polytechnique, à Munich (Bavière).
1885. GUYOU, membre de l'Institut, capitaine de frégate, rue de l'Université, 13, à Paris (7°).
1873. HAAG, ingénieur en chef des ponts et chaussées, répétiteur à l'École Polytechnique, rue Chardin, 11 bis, à Paris (16°).
1882. HABICH, directeur de l'École des Ingénieurs, à Lima (Pérou).
1896. HYDANARD, professeur adjoint à la Faculté des Sciences, professeur suppléant au Collège de France, rue Humboldt, 25, à Paris (14°).
1894. HALSTED, professeur à l'Université du Texas, Guadalupe Street, 2407, à Austin (Texas).
1900. HARDEL, élève ingénieur à l'École des Ponts et Chaussées, 22, place Malesherbes, à Paris (17°).
1872. HATON DE LA GOUPILLIÈRE, membre de l'Institut, inspecteur général des mines, directeur honoraire de l'École des mines, boulevard Saint-Michel, 60, à Paris (6°).
1872. HENRY, inspecteur général des ponts et chaussées, boul. St-Germain, 22, à Paris (5°).
1892. HERMANN, libraire-éditeur, rue de la Sorbonne, 8, à Paris (5°).
1873. HERMITE, membre de l'Institut, professeur honoraire à la Faculté des Sciences, rue de la Sorbonne, 2, à Paris (5°).
1893. HIOUX, professeur en retraite, rue des Fossés-Saint-Jacques, 16, à Paris (5°).
1900. HOFFBAUER, ancien lieutenant d'artillerie, rue Malus, 1, à Paris (5°).
1879. HOLST (Elling), professeur à l'École Polytechnique, à Hovik, près Christiania (Norvège).
1895. HOTT (Stanislas), professeur à l'École St^e-Genevieve, rue Bausset, 4, à Paris (15°).
1872. HOURIGANT, chef de bataillon du génie en retraite, rue Lecourbe, 88, à Paris (15°).
1880. HUMBERT, ingénieur en chef des mines, professeur à l'École Polytechnique, rue Daubigny, 6, à Paris (17°).
1881. IMBER, directeur des études à l'École Centrale, rue Montgolfier, 1, à Paris (3°).
1887. ISSALY (l'abbé), rue Margaux, 16, à Bordeaux (Gironde).
1896. JACQUET (E.), professeur au Prytanée militaire, rue Couchot, 8, à la Flèche.
1898. JAHNKE, assistant à l'Université de Berlin, Pariserstrasse, 55, à Berlin W¹⁵ (Allemagne).
1873. JANIN, chef d'escadron au 15^e régiment d'artillerie, à Douai (Nord).
1898. JARRY (N.), ingénieur civil, rue Michel-Bizot, 187, à Paris (12°).
1872. JAVARY, chef de bataillon du génie en retraite, chef des travaux graphiques à l'École Polytechnique, rue du Cardinal-Lemoine, 1, à Paris (5°).
1872. JORDAY, membre de l'Institut, professeur à l'École Polytechnique et au Collège de France, rue de Varenne, 48, à Paris (7°).
1872. JOUFFRET, lieutenant-colonel d'artillerie, rue de l'Estrapade, 20, à Paris (5°).
1875. JUNG, professeur à l'Institut technique supérieur, via Borgonuovo, 9, à Milan (Italie).
1890. KÖBB (Gustaf), maître de conférences à l'Université, à Stockholm (Suède).
1892. KÖCH (H. von), maître de conférences à l'Université, à Dörschelm Stockholm (Suède).

Date
de
l'admission

1880. KENICS, professeur à la Faculté des Sciences de Paris, répétiteur à l'École Polytechnique, boulevard Arago, 101, à Paris (14^e).
1897. LACUICHE, ingénieur civil, chef du laboratoire de la Compagnie générale des Omnibus, rue Ballu, 31, à Paris (10^e).
1881. LACOR, professeur de mathématiques, boulevard du Mont-Parnasse, 96, à Paris (14^e).
1873. LAISANT, docteur ès sciences, répétiteur à l'École Polytechnique, avenue Victor-Hugo, 162, à Paris (16^e).
1893. LANCELIN, boulevard Arago, 97, à Paris (14^e).
1899. LANDAU (Edmond), docteur en philosophie, Sommerstrasse, 2, Berlin, N. W.
1896. LAROSE, ingénieur des télégraphes, Usine des câbles sous-marins, à La Seyne (Var).
1896. LAUGEL, ancien attaché d'ambassade, villa des Bruyères, au Golfe Juan (Alpes-Maritimes).
1873. LAUTH, manufacturier, à Thann (Alsace).
1896. LEAU, professeur au collège Stanislas, rue Saint-Placide, 54, à Paris (6^e).
1880. LÉAUTÉ, membre de l'Institut, boulevard de Courcelles, 18, à Paris (17^e).
1896. LEBEL, professeur au lycée de Montpellier, villa Mont-Carmel, avenue Bouisson-Bertrand, à Montpellier.
1893. LECORNU, ingénieur en chef des mines, répétiteur à l'École Polytechnique, rue Gay-Lussac, 3, à Paris (5^e).
1895. LEMERAY, licencié ès sciences, ingénieur civil du génie maritime, rue Ville-ès-Martin, 109 bis, à Saint-Nazaire (Loire-Inférieure).
1872. LEMOINE (Émile), ancien élève de l'École Polytechnique, avenue du Maine, 32, à Paris.
1879. LE PAIGE, professeur à l'Université, à l'observatoire de Coïnte, à Liège (Belgique).
1895. LE ROUX, maître de conférences à la Faculté des Sciences, faubourg de Fougères, 41, à Rennes (Ille-et-Vilaine).
1898. LE ROY, docteur ès sciences, rue de l'Abbé-de-l'Épée, 8, à Paris (5^e).
1891. LERY, agent voyer d'arrondissement, à Pontoise (Seine-et-Oise).
1872. LESPAILLT, doyen honoraire de la Faculté des Sciences de Bordeaux, à Nérac (Lot-et-Garonne).
1900. LEVI CIVITA (T.), professeur à l'Université, à Padoue (Italie).
1882. LÉVY (Lucien), répétiteur et examinateur d'admission à l'École Polytechnique, rue du Regard, 12, à Paris (6^e).
1872. LÉVY (Maurice), membre de l'Institut, inspecteur général des ponts et chaussées, professeur au Collège de France, avenue du Trocadéro, 15, à Paris (16^e).
1875. LEZ (Henri), à Lorrez-le-Bocage (Seine-et-Marne).
1898. LINDLOF (Ernst), professeur à l'Université, Boulevardsgatan, 12, à Helsingfors.
1877. LINDEMANN, professeur à l'Université, Franz-Josephstrasse, 12, à Munich (Bavière).
1886. LIQUILLE, ingénieur des poudres, examinateur des élèves à l'École Polytechnique, quai Henri IV, 12, à Paris (4^e).
1900. LOVETT (E.-O.), à Princeton, New-Jersey.
1888. LUCAS (Félix), ingénieur en chef des ponts et chaussées, rue Boissière, 30, à Paris (16^e).
1886. LLOY, docteur ès sciences mathématiques, chemin de la Roseraie, 26, à Genève (Suisse).
1882. MACÉ DE LÉPINAY, professeur de mathématiques spéciales au lycée Henri IV, rue Claude-Bernard, 63, à Paris (5^e).
1895. MAILLET, docteur ès sciences, ingénieur des ponts et chaussées, rue de Fontenay, 11, à Bourg-la-Reine (Seine).
1875. MALLOIZEL, professeur de mathématiques, rue de l'Estrapade, 7, à Paris (5^e).
1872. MANNHEIM, colonel d'artillerie en retraite, professeur à l'École Polytechnique, boulevard Beauséjour, 1, à Paris (14^e).

Date
de
l'admission.

1884. MARTIN (Artemas), Columbia street, 1531, N. W., à Washington D. C. (États-Unis d'Amérique).
1889. MARTIN (Émile), ancien élève de l'École Polytechnique, professeur de mathématiques, 1, square du Croisic (boulevard du Mont-Parnasse), à Paris (15^e).
1894. MAUPIN, professeur au collège, à Issoire (Puy-de-Dôme).
1897. MEHNKE, professeur à l'École Polytechnique supérieure, Weissburgstrasse, 29, à Stuttgart (Wurtemberg).
1889. MENDIZABAL TAMBOREL (DE), membre de la Société de Géographie de Mexico, calle de Jesus, 13, à Mexico (Mexique).
1884. MERCEREAU, licencié ès sciences, rue de l'Université, 193, à Paris (7^e).
1893. MICHEL (François), inspecteur de l'exploitation aux chemins de fer du Nord, à Béthune (Pas-de-Calais).
1899. MILLER (Dr G.-A.), professeur à Cornell University, à Ithaca, N. Y. (États-Unis).
1873. MITTAG-LEFFLER, professeur à l'Université, à Stockholm (Suède).
1897. MONTCEUIL (l'abbé DE), école de l'Immaculée-Conception Sainte-Marie (Caenou), à Toulouse.
1898. MONTESSUS DE BALLORE (R. DE), rue de Meaux, 12, à Senlis (Oise).
1872. MOUTARD, inspect. général des mines en retraite, rue du Val-de-Grâce, 9, à Paris (5^e).
1888. MUKHOPADHYAY (Asutosh), professeur de mathématiques, Russa Road, 77, North Rhowanipore, à Calcutta (Inde).
1898. NAUD (C.), éditeur, rue Racine, 3, à Paris (6^e).
1885. NEUBERG, professeur à l'Université, rue Sclessin, 6, à Liège (Belgique).
1897. NICOLLIER, professeur, à Montreux (Suisse).
1900. NIEMCEWICZ, docteur ès sciences, inspecteur de l'Académie de Paris, rue de l'Arbalète, 35 (5^e).
1882. OCAGNE (M. N.), ingénieur des ponts et chaussées, professeur à l'École des Ponts et Chaussées, répétiteur à l'École Polytechnique, rue La Boétie, 30, à Paris (8^e).
1873. OVIDIO (Enrico D'), professeur à l'Université, Corso-Oporto, 30, à Turin (Italie).
1893. PAINLEVÉ, membre de l'Institut, maître de conférences à l'École Normale supérieure, répétiteur à l'École Polytechnique, rue de Rennes, 99, à Paris (6^e).
1888. PAPELIER (Georges), professeur de mathématiques spéciales au lycée, rue de Recouvrance, 20, à Orléans (Loiret).
1884. PARAF, maître de conférences à la Faculté des Sciences, à Toulouse.
1872. PARMENTIER, général du génie en retraite, rue du Cirque, 5, à Paris (8^e).
1872. PARRAN, ingénieur en chef des mines, rue des Saints-Pères, 56, à Paris (7^e).
1881. PELLET, doyen de la Faculté des Sciences, rue Pascal, 30, à Clermont-Ferrand.
1883. PELLETREAU, ing. en chef des chemins de fer éthiopiens, rue Scribe, 5, à Paris (6^e).
1898. PELLETREAU (Georges), sous-inspecteur de l'exploitation des chemins de fer du Nord, 31, rue Baudin, à Paris (9^e).
1900. PERCHOT, astronome adjoint à l'Observatoire de Paris, 7, rue Scheffer (10^e).
1874. PERCIN, général de brigade, chef du cabinet du ministre de la guerre.
1881. PEROTT (Joseph), Université Clark, à Worcester (Massachusetts).
1873. PERRIN, ingénieur en chef des mines, avenue d'Eylau, 9, à Paris (16^e).
1892. PERRIN (Élie), professeur de mathématiques, rue Lamandé, 7, à Paris (17^e).
1896. PETROVICH, professeur à l'Université, Kossatch-Venac, 14, à Belgrade (Serbie).
1887. PEZZO (DEL), professeur à l'Université, via Gennaro Serra, 75, à Naples (Italie).
1879. PICARD (Émile), membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences et à l'École Centrale des Arts et Manufactures, rue Soufflot, 1, à Paris (5^e).
1872. PIQUET, chef de bataillon du génie, examinateur d'admission à l'École Polytechnique, rue de Conde, 24, à Paris (5^e).

Date
de
l'admission

1896. PIÉRON, inspecteur général de l'Instruction publique, rue d'Assas, 50, à Paris (6^e).
1899. PIERPONT (James), prof. de l'Université Yale, 42, Mansfield st., New Haven, Connecticut (États-Unis).
1882. POINCARÉ, membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes, ingénieur en chef des mines, professeur à la Faculté des Sciences, rue Claude-Bernard, 63 (5^e).
1872. POLIGNAC (prince C. DE), villa Jessie, à Cannes (Alpes-Maritimes).
1899. PRINGSHEIM, professeur à l'Université de Munich, 12, Arcisstrasse.
1896. PRUVOST, inspecteur général de l'Instruction publique, 11, rue de la Tour, à Paris (16^e).
1872. PUTZ, général d'artillerie en retraite, rue Saint-Merry, 98, à Fontainebleau.
1896. QUQUET, actuaire de la Compagnie *la Nationale*, rue de Grammont, 13, à Paris (2^e).
1898. RABUT (Charles), ingénieur en chef des ponts et chaussées, rue Duplessis, 77, à Versailles (Seine-et-Oise).
1872. RADAU, membre de l'Institut, rue de Tournon, 12, à Paris (6^e).
1883. RAFFY, professeur-adjoint à la Faculté des Sciences, maître de conférences à l'École Normale supérieure, rue Nicole, 7, à Paris (5^e).
1900. RENARD, rue de la Tour, 7, à Paris (16^e).
1898. RIBERT, commandant du génie en retraite, rue Saint-Antoine, 200, à Paris (4^e).
1893. RIVÉREAU (l'abbé), professeur à l'Institut catholique, à Angers (Maine-et-Loire).
1872. ROUART, ingénieur civil, rue de Lisbonne, 34, à Paris (8^e).
1872. ROUCHÉ, de l'Institut, professeur au Conservatoire des arts et métiers, examinateur des élèves à l'École Polytechnique, boulevard St-Germain, 213, à Paris (7^e).
1896. ROUGIER, docteur ès sciences, professeur au lycée, à Toulon (Var).
1885. ROUQUET (V.), professeur honoraire de mathématiques spéciales, à Belpech (Aude).
1900. SALTYSKOW, maître ès sciences mathématiques, rue du Cardinal-Lemoine, 71 (5^e).
1896. SANCHEZ, directeur de l'observatoire, à San Salvador (République de San Salvador).
1889. SARAZ, professeur de mathématiques, rue Saint-Jacques, 220, à Paris (5^e).
1872. SARRAU, membre de l'Institut, ingénieur en chef des poudres, professeur à l'École Polytechnique, avenue Daumesnil, 9 bis, à Saint-Mandé (Seine).
1872. SARTIAUX, ingénieur en chef des ponts et chaussées, chef de l'exploitation à la Compagnie du chemin de fer du Nord, à Paris.
1885. SALVAGE, professeur à la Faculté des Sciences, à Marseille (Bouches-du-Rhône).
1881. SCHLEGEL, professeur à l'École technique, Volmestrasse, 62, à Hagen (Allemagne).
1897. SCHOU (Erik), Gl. Antvorskov, à Slagelse (Danemark).
1881. SCHOUTE, professeur à l'Université, à Groningue (Hollande).
1896. SÉGUIER (J.-A. DE), docteur ès sciences, rue de Sèvres, 35, à Paris (6^e).
1882. SÉLIVANOFF (Demetrius), attache à l'Université, Fontanka, 116, log. 16, à Saint-Petersbourg (Russie).
1900. SERVANT, docteur ès sciences, Grande-Rue, 75, à Bourg-la-Reine (Seine).
1900. SPARRE (comte Magnus DE), château de Vallière, à St-Georges-de-Reneins (Rhône).
1881. STARKOFF, Maximilianovskiy pereonok, 19, log. 12, à Saint-Petersbourg (Russie).
1879. STEPHANOS (D^r Cyparissos), professeur à l'Université, à Athènes (Grèce).
1898. STÖRMER (Carl), chargé de cours à l'Université, Holtegaden, 14, à Christiania.
1873. STUDNICKA, professeur à l'Université, à Prague (Bohême).
1872. SYLÖW, professeur à l'Université, à Frederikshald (Norvège).
1899. SYRIEX, boulevard Beauséjour, 23, à Paris (16^e).
1896. TANNENBERG (DR.), professeur à la Faculté des Sciences, à Bordeaux (Gironde).
1872. TANNERY (Paul), directeur des manufactures de l'État, à Pantin (Seine).
1875. TANNERY (Jules), sous-directeur à l'École Normale sup., rue d'Ulm, 43, à Paris (5^e).

Date
de
l'admission.

1882. TARRY (Gaston), receveur des Contributions diverses, à Kouba (Algérie).
 1897. TARRY (Harold), inspecteur des finances en retraite, à Kouba (Algérie).
 1872. TERRIER, professeur au collège Chaptal, avenue Leonie, à Saint-Cloud.
 1899. THYBAUT (Alexandre), docteur ès sciences, professeur au lycée Condorcet, place d'Anvers, 10, à Paris (9^e).
 1873. TISSOT, ancien examinateur d'admission à l'Ecole Polytechnique, à Voreppe (Isère).
 1896. TISSOT, enseigne de vaisseau, professeur au *Borda*, à Brest (Finistère).
 1896. TORRES, ingénieur des ponts et chaussées, Valgame Dnos, à Madrid (Espagne).
 1893. TOUCHE, lieutenant-colonel d'artillerie territoriale, rue Truffault, 23, à Paris (17^e).
 1872. TRESKA, ingénieur en chef des ponts et chaussées en retraite, château de Courtozé, par Vendôme (Loir-et-Cher).
 1896. TRESSE, doct. ès sciences, prof. au collège Rollin, rue Caulincourt, 50, à Paris (18^e).
 1893. VALLÉE-POUSSIN (Ch.-J. de la), professeur à l'Université, rue de Namur, 100, à Louvain (Belgique).
 1880. VANECEK (J.-S.), professeur au lycée, à Jicin (Bohême).
 1897. VASSILAS-VITALIS (J.), docteur de l'Université, rue Polyclète, 5, à Athènes (Grèce).
 1898. VASSILIEF, président de la Société physico-mathématique, à Kasan (Russie).
 1876. VICAIRE, inspecteur général des mines, rue Gay-Lussac, 30, à Paris (5^e).
 1888. VOLTERRA (Vito), professeur à l'Université de Rome.
 1900. VUIBERT, éditeur, 63, boulevard Saint-Germain (5^e).
 1893. WAGNER, professeur à l'École J.-B. Say, rue Spontini, 13, à Paris (16^e).
 1880. WALCKENAEER, ingénieur en chef des mines, boulevard St-Germain, 118, à Paris (7^e).
 1879. WEILL, directeur du collège Chaptal, boulevard des Batignolles, 4, à Paris (8^e).
 1873. WEYR (Dr Edouard), professeur à l'École Polytechnique, à Prague (Bohême).
 1878. WORMS DE ROMILLY, ingénieur en chef des mines, rue Balzac, 7, à Paris (8^e).
 1882. ZABOUDSKI, membre du Comité d'artillerie et professeur à l'Académie d'Artillerie, à Saint-Petersbourg (Russie).
 1890. ZAREMBA, docteur ès sciences, professeur à l'Université de Cracovie (Autriche).
 1881. ZEUTHEN, professeur à l'Université, Rosenouget, 3, Sidealle, à Copenhague.
 1898. ZIWET, South Ingalls street, 644, Ann-Arbor (Michigan) (Etats-Unis).

SOCIÉTAIRES PERPETUELS.

ACKERMANN-TEUBNER, à Leipzig. — BENOIST (décédé). — BERDELLI, à Rioz. — BIENAYME (décédé). — BLOCHE, à Paris. — BISCHOFFSHEIM, à Paris. — BORCHARDT (décédé). — BOREL, à Paris. — BROCARD, à Bar-le-Duc. — CANET, à Paris. — CARVALLO, à Paris. — CHARLES (décédé). — CLAUDE-LAFONTAINE, à Paris. — FOURET, à Paris. — GAUTHIER-VILLARS (décédé). — GOURSAT, à Paris. — HALPHEN (décédé). — HALLIED, à Austin. — HADAMARD, à Paris. — HATON DE LA GOMPIÈRE, à Paris. — HERMITE, à Paris. — HIRST (décédé). — HOTT, à Paris. — JORDAN, à Paris. — LATTON DE LADERAT (décédé). — LÉAUTÉ, à Paris. — MAILLET, à Bourg-la-Reine. — MANNHEIM, à Paris. — DE MENDIZABAL-TAMBOREL, à Mexico. — MERCIER, à Paris. — D'OCCAGNE, à Paris. — PEROTI, à Worcester. — PERRIN, au Mans. — POINCARÉ, à Paris. — POLIGNAC prince, à Cannes. — RAFFY, à Paris. — SELIVANOFF, à Saint-Petersbourg. — SPARRE (comte M. de), à Saint-Georges-de-Reneins. — SLOW, à Frederikshald. — TANNERY (Paul), à Paris. — TARRY (G.), à Kouba. — TCHERICHEF (décédé). — VIELLARD (décédé).

LISTE

DES

PRÉSIDENTS DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

DEPUIS SA FONDATION.

MM.	MM.
1873 CHASLES.	1888 LAISANT.
1874 LAFFON DE LADEBAT.	1889 ANDRÉ (DÉSIRÉ).
1875 BIENAYMÉ.	1890 BATON DE LA GOUTILLIÈRE.
1876 DE LA GOURNERIE.	1891 COLLIGNON.
1877 MANNHEIM.	1892 VICAIRE.
1878 DARBOUX.	1893 HUMBERT.
1879 O. BONNET.	1894 PICQUET.
1880 JORDAN.	1895 COURSAT.
1881 LAGIERRE.	1896 KÖNIGS.
1882 HALPHEN.	1897 PICARD.
1883 ROUCHE.	1898 LECORNU.
1884 PICARD.	1899 GUYOU.
1885 APPELL.	1900 POINCARÉ.
1886 POINCARÉ.	1901 D'OCAGNE.
1887 FOURET.	

Liste des Sociétés scientifiques et des Recueils périodiques avec lesquels
la Société mathématique de France échange son Bulletin.

Amsterdam.....	Académie Royale des Sciences d'Amsterdam.	Hollande.
Amsterdam.....	Société mathématique d'Amsterdam.	Hollande.
Amsterdam.....	<i>Revue semestrielle des publications mathématiques.</i>	Hollande.
Baltimore.....	<i>American Journal of Mathematics.</i>	États-Unis
Berlin.....	Académie des Sciences de Berlin.	Allemagne.
Berlin.....	<i>Archiv für Mathematik und Physik.</i>	Allemagne.
Berlin.....	<i>Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik.</i>	Allemagne.
Berlin.....	<i>Journal für die reine und angewandte Mathematik.</i>	Allemagne.
Bologne.....	Académie des Sciences de l'Institut de Bologne.	Italie.
Bordeaux.....	Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux.	France.
Bruxelles.....	Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique.	Belgique.
Bruxelles.....	Société scientifique de Bruxelles.	Belgique.
Cambridge.....	Société philosophique de Cambridge.	Grande-Bretagne.
Christiania.....	<i>Archiv for Mathematik og Naturvidenskab.</i>	Norvège.
Coimbre.....	<i>Jornal de Sciencias mathematicas e astronomicas.</i>	Portugal.
Copenhague.....	<i>Nyt Tidsskrift for Mathematik.</i>	Danemark.
Cracovie.....	Académie des Sciences de Cracovie.	Autriche.
Delft.....	Ecole Polytechnique de Delft.	Hollande.
Édimbourg.....	Société Royale d'Édimbourg.	Grande-Bretagne.
Édimbourg.....	Société mathématique d'Édimbourg.	Grande-Bretagne.
Gand.....	<i>Mathesis.</i>	Belgique.
Goettingue.....	Société Royale des Sciences de Goettingue.	Allemagne.
Hambourg.....	Société mathématique de Hambourg.	Allemagne.
Harlem.....	Société hollandaise des Sciences.	Hollande.
Helsingfors.....	Société des Sciences de Finlande.	Finlande.
Kasan.....	Société physico-mathématique.	Russie.
Kharkov.....	Annales de l'Université.	Russie.
Kharkov.....	Société mathématique de Kharkov.	Russie.
Leipzig.....	Société Royale des Sciences de Saxe.	Allemagne.
Leipzig.....	<i>Mathematische Annalen.</i>	Allemagne.
Liege.....	Société Royale des Sciences, à l'Université.	Belgique.
Londres.....	Société astronomique de Londres.	Grande-Bretagne.
Londres.....	Société mathématique de Londres.	Grande-Bretagne.
Londres.....	Société Royale de Londres.	Grande-Bretagne.
Luxembourg.....	Institut Royal de Luxembourg.	Luxembourg.
Marseille.....	<i>Annales de la Faculté des Sciences de Marseille.</i>	France.
Mexico.....	Sociedad científica Antonio Pizaro.	Mexique.

Wilan	Institut Royal lombard des Sciences et Lettres.	Italie.
Moscou	Société mathématique de Moscou.	Russie.
Munich	Académie des Sciences de Munich.	Bavière.
Naples	Académie Royale des Sciences physiques et mathématiques de Naples.	Italie.
New-Haven	Académie des Sciences et Arts du Connecticut.	États-Unis.
New-York	Société mathématique Américaine.	États-Unis.
Odessa	Société mathématique d'Odessa.	Russie.
Palerme	<i>Rendiconti del Circolo matematico.</i>	Italie.
Paris	Académie des Sciences de Paris.	France.
Paris	Association française pour l'avancement des Sciences.	France.
Paris	Société philomathique de Paris.	France.
Paris	<i>Bulletin des Sciences mathématiques.</i>	France.
Paris	<i>Journal de l'École Polytechnique.</i>	France.
Paris	<i>Journal de Mathématiques élémentaires.</i>	France.
Paris	<i>Journal de Mathématiques spéciales.</i>	France.
Paris	Institut des Actuaires français.	France.
Pise	École Royale Normale supérieure de Pise.	Italie.
Pise	Université Royale de Pise.	Italie.
Pise	<i>Il Nuovo Cimento.</i>	Italie.
Prague	Académie des Sciences de Prague.	Autriche.
Prague	<i>Casopis pro pěstování matematiky a fysiky.</i>	Autriche.
Prague	Société mathématique de Prague.	Autriche.
Rome	Académie Royale des <i>Lincei</i> .	Italie.
Saint-Petersbourg	Académie Impériale des Sciences.	Russie.
Stockholm	<i>Acta Mathematica.</i>	Suède.
Stockholm	<i>Bibliotheca Mathematica.</i>	Suède.
Toulouse	<i>Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse.</i>	France.
Turin	Académie des Sciences.	Italie.
Upsal	Société Royale des Sciences d'Upsal.	Suède.
Venise	Institut Royal vénitien des Sciences, Lettres et Arts.	Italie.
Vienne	Académie Impériale des Sciences de Vienne.	Autriche.
Vienne	<i>Monatshefte für Mathematik und Physik.</i>	Autriche.
Zurich	Société des Sciences naturelles de Zurich.	Suisse.

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES

(NOVEMBRE ET DÉCEMBRE 1900).

SÉANCE DU 7 NOVEMBRE 1900.

PRÉSIDENCE DE M. D'OCAGNE.

Communications :

M. d'Ocagne : *L'équation du septième degré et la Nomographie.*

M. DUPORCQ fait la Communication suivante :

Sur un remarquable déplacement à deux paramètres.

1. Je rappellerai ⁽¹⁾ tout d'abord les propriétés suivantes des transformations quadratiques :

La donnée de cinq couples de points conjugués dans une transformation quadratique en détermine un sixième.

La donnée de six couples de points conjugués détermine, en général, une infinité de couples de points conjugués qui se correspondent sur deux cubiques.

Observons, d'autre part, que si Π_1 , Π_2 et Π_3 désignent trois positions dans l'espace d'un plan Π , et z_1 , z_2 , z_3 les trois positions correspondantes d'un point z de ce plan, on obtient une transfor-

(1) *Comptes rendus de l'Acad. des Sciences*, 16 mai 1898. Voir aussi mes *Premiers principes de Géom. mod.*, p. 142.

mation quadratique en associant au point α le point a , où l'axe de la circonférence $(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)$ coupe un plan fixe P.

En combinant cette remarque aux résultats précédents, on voit aisément que :

Si le plan II se déplace dans l'espace de sorte que cinq de ses points restent à des distances fixes de cinq points du plan P, il existera dans les plans II et P un sixième couple de points dont la distance restera invariable.

De même :

Si six couples de points des plans II et P restaient à des distances invariables, il en serait en général de même d'une infinité de couples de points associés sur deux cubiques C et Γ .

2. Ces résultats rappelés, examinons un cas particulièrement intéressant du premier des déplacements précédents. Les six points obtenus dans chacun des plans P et II, et qui doivent se correspondre dans une double infinité de transformations quadratiques, peuvent former, dans chacun de ces plans, les six sommets d'un quadrilatère complet : à trois sommets en ligne droite dans un des quadrilatères correspondent alors trois sommets non en ligne droite dans l'autre, et il est facile, dans ce cas, grâce à la formule de Stewart, d'écrire la relation qui existe entre les six distances invariables ; il nous suffira, d'ailleurs, de remarquer que cette relation est linéaire par rapport aux carrés de ces distances.

Soient, en particulier, deux quadrilatères égaux, $aa'bb'cc'$ et $\alpha\alpha'\beta\beta'\gamma\gamma'$, a et a' désignant deux sommets opposés du premier de ces quadrilatères, α et α' les sommets homologues de l'autre, de sorte que les six longueurs à envisager ici sont

$$a\alpha', \quad a'\alpha, \quad b\beta', \quad b'\beta, \quad c\gamma', \quad c'\gamma.$$

La relation entre ces longueurs, nécessairement symétrique par rapport aux distances $a\alpha'$ et $a'\alpha$, par exemple, sera donc de la forme

$$(1) \quad A(\overline{a\alpha'}^2 + \overline{a'\alpha}^2) + B(\overline{b\beta'}^2 + \overline{b'\beta}^2) + C(\overline{c\gamma'}^2 + \overline{c'\gamma}^2) + D = 0.$$

Or, supposons maintenant nos deux quadrilatères symétriques

par rapport à une droite Δ , de sorte que

$$ax' = a'x, \quad b\beta' = b'\beta, \quad c\gamma' = c'\gamma.$$

En supposant fixe le premier quadrilatère, si nous nous donnons les longueurs $b\beta'$ et $c\gamma'$, nous n'assujettirons Δ qu'à deux conditions, et les longueurs égales ax' et $a'x$ seront déterminées par la relation (1). Le déplacement du plan II dépendra donc de deux paramètres, et, néanmoins, les six sommets du second quadrilatère resteront à des distances fixes de ceux du quadrilatère fixe. On conclut de là le théorème suivant :

Étant donnés deux quadrilatères complets symétriques par rapport à une droite, si l'on réunit chaque sommet au symétrique du sommet opposé, au moyen de six tiges articulées, le système obtenu est susceptible d'une déformation dépendant de deux paramètres.

On voit que, si l'un des quadrilatères est fixe, les six sommets de l'autre décrivent des sphères.

Enfin, les deux quadrilatères restent constamment symétriques par rapport à une droite.

3. Il est nécessaire d'observer que, si l'on se contentait des quatre liaisons, deux à deux égales, $b\beta'$ et $b'\beta$, $c\gamma'$ et $c'\gamma$, le déplacement relatif des quadrilatères dépendrait toujours de deux paramètres, mais qu'il posséderait néanmoins plus de liberté que le précédent : on pourrait, en effet, en se donnant arbitrairement la longueur ax' , par exemple, obtenir un déplacement à un paramètre, qui ne serait pas compris dans le déplacement de tout à l'heure. On a ainsi un curieux exemple de *décomposition d'un déplacement à deux paramètres*.

4. Revenons au cas de nos six liaisons, et joignons-y une nouvelle, $d\delta'$, d et δ' désignant deux points quelconques des plans P et II. Leur déplacement relatif dépendra alors d'un seul paramètre, mais, cette fois, il existera nécessairement (par suite du dernier des théorèmes du n° 1) deux cubiques C et C', dont les points resteront deux à deux à des distances invariables. Elles sont faciles à définir : si, en effet, d' désigne le symétrique de δ' par

rapport à l'axe de symétrie, Δ , des deux quadrilatères, la cubique C est la hessienne du réseau ponctuel formé par les coniques qui divisent harmoniquement les segments aa' , bb' (par suite aussi cc') et dd' . Si m et m' désignent deux points conjugués à toutes ces coniques, et, par suite, situés sur C , le point m restera à une distance invariable du point μ' , symétrique de m' par rapport à l'axe Δ . On peut remarquer que, sur la cubique C , les points m et m' forment un *couple steinérien* (c'est-à-dire que les tangentes en ces points se coupent sur la cubique). On obtient donc le théorème suivant, dont M. Raoul Bricard m'a communiqué l'énoncé :

Étant données dans l'espace deux cubiques planes, C et Γ , symétriques par rapport à une droite Δ , on considère sur C une famille de couples steinériens; soient mm' un de ces couples, et μ' le symétrique de m' par rapport à Δ . Si l'on relie chaque point m de C au point μ' , qui lui correspond ainsi sur Γ , par une tige de longueur fixe, on obtient un système déformable.

C'est là un nouvel exemple de déplacement d'une courbe plane dont tous les points décrivent des trajectoires sphériques.

M. TOUCHE fait la Communication suivante :

Sur une question posée par d'Alembert.

D'Alembert a posé aux géomètres une question qui n'a pas encore reçu de réponse bien convaincante; cette question est connue sous le nom de *paradoxe singulier de d'Alembert*, et quelquefois simplement de *paradoxe de d'Alembert*.

L'auteur l'expose ainsi dans la préface du Tome V des *Opuscules mathématiques* :

« Dans le cinquième Mémoire, j'expose un singulier paradoxe, que j'invite les mathématiciens à examiner, et duquel il résulte qu'en supposant à un corps solide une certaine figure, ce corps semble ne devoir éprouver aucune résistance de la part d'un fluide où il sera mû, dans les suppositions même qui paraissent

les plus légitimes et les moins précaires, sur la manière dont le fluide agit. »

Dans ce Mémoire du Tome V il décrit, en effet, la forme de ce corps, considère le mouvement hypothétique du fluide à l'avant et à l'arrière de ce corps et démontre sa proposition invraisemblable; puis il fait suivre cet exposé de raisonnements destinés à prouver qu'il en serait de même dans le cas de tout autre mouvement supposé pour le fluide, autour de ce corps. Nous avons trop d'admiration à l'égard de d'Alembert pour mettre en doute la valeur de ces raisonnements, mais ils sont un peu longs à citer textuellement, et nous préférons le faire pour le résumé bien clair qu'en a fait de Saint-Venant dans son Livre sur la *Résistance des fluides* :

« Supposons un corps solide composé de quatre parties égales et semblables, ... placé au milieu d'un fluide indéfini, ... Imaginons que ce corps soit immobile et que les parties du fluide reçoivent toutes une impulsion égale, parallèle à l'axe du corps, ... Supposons, pour un moment, que le mouvement du fluide soit le même à la partie antérieure et à la partie postérieure, ...; on trouvera qu'il se continuera de même, ..., donc c'est, en effet, de cette manière que le mouvement aura lieu. Or il en résultera que la pression du fluide sur le corps sera absolument nulle : la pression sur la surface postérieure sera égale et contraire à la pression sur la surface antérieure, ... Je ne vois donc pas, je l'avoue, comment on peut expliquer par la théorie, d'une manière satisfaisante, la résistance des fluides. Il me paraît, au contraire, que cette théorie, traitée et approfondie avec toute la rigueur possible, donne, au moins en plusieurs cas, la résistance absolument nulle, paradoxe singulier que je laisse à éclaircir aux géomètres. »

D'Alembert y revient aux n^{os} 8 et suivants du § 13 de ses *Nouvelles recherches sur les fluides*, dans lesquels il termine en disant de nouveau que cette matière paraît bien digne d'occuper les géomètres.

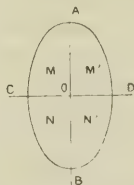
Après avoir transformé les équations d'Euler et vérifié ce premier travail, en déduisant ces équations transformées des équations

tions de Lagrange, qui ne sont, comme Cauchy l'a montré, autre chose que les équations d'Euler, nous avons cru avoir une base mathématique pour déduire, en les rapprochant, les équations d'une trajectoire fluide.

Mais nous ne pouvions pas oublier nos anciennes publications et, en particulier, celle faite en 1890 dans la *Revue d'Artillerie*. Là nous avons calculé de prime abord la résistance de l'air aux projectiles et, en nous basant sur des faits d'observation, nous étions arrivés à des résultats numériques, aussi approchés que nous pouvions l'espérer des résultats numériques fournis par l'expérience. Nous nous sommes demandé s'il n'y aurait pas dans ce travail quelque principe nouveau qui pût éclairer la question posée par d'Alembert et nous avons songé à celui-ci, qui s'y trouve en effet : Le mouvement d'un point matériel ou son impulsion ne se transmet pas instantanément à un point voisin situé sur la même courbe orthogonale aux trajectoires, mais bien avec une vitesse égale à celle du son dans le fluide considéré et pour la température à laquelle se trouve ce fluide.

Examinons en effet (*fig. 1*) le corps immergé décrit par d'Alem-

Fig. 1.



bert. Soient AB une parallèle à la direction générale du fluide, CD une perpendiculaire passant par le milieu O de AB; M, M', N, N' quatre surfaces superposables, M étant égal à AOC, M' à AOD, N à COB et N' à DOB; le fluide partant de A léchant la surface antérieure suivant les arcs AC et AD et la surface postérieure suivant les arcs CB et DB. Suivant la surface du corps, les tangentes aux courbes orthogonales aux trajectoires seront normales à la surface. Alors, il s'ensuivra, d'après d'Alembert, que les composantes des pressions parallèles à AB se détruiront mutuellement

deux à deux et qu'il en sera de même pour les composantes des pressions parallèles à CD; de là, suivant d'Alembert, le paradoxe singulier, car en repliant le bas de la figure sur le haut, en le faisant tourner autour de CD, les tangentes aux courbes orthogonales aux trajectoires fluides, aux points où ces courbes orthogonales partent de la surface du corps et pour la partie N + N', viendront recouvrir exactement celles qui sont relatives à la partie supérieure M + M'; la résultante des pressions sera donc nulle.

Si, au lieu de cela, nous introduisons le principe posé dans notre publication de la *Revue d'Artillerie*, que le mouvement d'un point matériel ou son impulsion ne se transmet pas instantanément à un point voisin, situé sur la même courbe orthogonale aux trajectoires, mais bien avec une vitesse égale à celle du son, dans le fluide considéré et pour la température à laquelle se trouve ce fluide, alors les choses changent bien sur la figure que nous avons considérée. Tandis que le fluide se meut avec la vitesse c tangentiellement à la trajectoire, l'impulsion se transmet avec la vitesse ξ de transmission du mouvement, normalement à cette trajectoire; et alors, au lieu de considérer des courbes orthogonales aux trajectoires, nous devons considérer des lignes inclinées sur elles de l'angle dont la tangente est $\frac{c}{\xi}$; alors, quelque petite que soit la tangente de l'angle, $\frac{c}{\xi}$, nous voyons qu'il n'y a pas recouvrement pour ces nouvelles lignes, quand on rabat la partie de figure CBD sur CAD, ces nouvelles lignes étant, pour CBD, inclinées par rapport aux courbes orthogonales aux trajectoires, de l'autre côté que lorsque l'on considère CAD. Loin de se détruire, les pressions s'ajouteront pour la partie antérieure du corps immergé et pour la partie postérieure.

M. RIVIEREAU adresse la Note suivante :

**Invariants des équations aux dérivées partielles du second ordre
linéaires et homogènes.**

Soit l'équation

$$(1) \quad a \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2d \frac{\partial z}{\partial x} + 2e \frac{\partial z}{\partial y} + fz = 0,$$

où les coefficients de $a, \dots, f$ sont des fonctions de x et y . Cette équation conserve la même forme si l'on fait le changement de fonction ou de variables

$$(2) \quad z = u(x, y)\zeta, \quad \xi = F_1(x, y), \quad \eta = F_2(x, y),$$

où ζ est une fonction des nouvelles variables indépendantes ξ et η .

Pour trouver des expressions invariantes, nous particulariserons les fonctions indéterminées u, F_1, F_2 , de manière à obtenir une transformée de forme réduite, méthode employée dans le cas des équations différentielles ordinaires.

L'équation obtenue à l'aide des formules (2) est

$$(3) \quad \alpha \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi^2} + 2\beta \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \eta^2} + 2\delta \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} + 2\varepsilon \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} + \varphi \zeta = 0.$$

1° Si $b^2 - ac \neq 0$, on pourra choisir pour ξ et η des valeurs X, Y annulant α et γ . Il suffit, comme on sait, de prendre pour X et Y deux solutions distinctes de l'équation

$$a \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 + 2b \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y} + c \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)^2 = 0.$$

Pour simplifier l'écriture, nous pouvons supposer que l'on fasse d'abord le seul changement de variables X, Y . On obtient une équation de la forme

$$(4) \quad 2b_1 \frac{\partial^2 z}{\partial X \partial Y} + 2d_1 \frac{\partial z}{\partial X} + 2e_1 \frac{\partial z}{\partial Y} + f_1 z = 0,$$

où l'on a

$$\begin{aligned} b_1 &= a \frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial Y}{\partial x} + b \left(\frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial X}{\partial y} \frac{\partial Y}{\partial x} \right) + c \frac{\partial X}{\partial y} \frac{\partial Y}{\partial y}, \\ 2d_1 &= a \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 X}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} + 2d \frac{\partial X}{\partial x} + 2e \frac{\partial X}{\partial y}, \\ 2e_1 &= a \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 Y}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + 2d \frac{\partial Y}{\partial x} + 2e \frac{\partial Y}{\partial y}, \\ f_1 &= f. \end{aligned}$$

Si nous posons maintenant

$$z = U(X, Y)Z$$

et si nous déterminons U de manière à annuler le coefficient de

$\frac{\partial Z}{\partial X}$, par exemple, nous obtiendrons une équation réduite de la forme

$$2 \frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y} + 2 H \frac{\partial Z}{\partial Y} + K Z = 0.$$

Le calcul des coefficients H et K va nous fournir deux invariants relatifs. On trouve facilement que U doit vérifier l'équation

$$b_1 \frac{\partial U}{\partial Y} + d_1 U = 0.$$

H et K peuvent alors s'écrire

$$H = \int \left[\frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{e_1}{b_1} \right) - \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{d_1}{b_1} \right) \right] dY,$$

$$K = \frac{f_1}{b_1} - 2 \frac{d_1 e_1}{b_1^2} - \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{2 d_1}{b_1} \right) \quad (1)$$

$\frac{\partial H}{\partial Y}$ et K s'expriment en fonction des coefficients de l'équation proposée et du déterminant fonctionnel

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial y} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y} \end{vmatrix}.$$

Voici comment on peut faire ce calcul. Posons

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \alpha \frac{\partial X}{\partial y}, \quad \frac{\partial Y}{\partial x} = \beta \frac{\partial Y}{\partial y}.$$

α et β sont alors les deux racines distinctes de l'équation

$$a \lambda^2 + 2 b \lambda + c = 0.$$

Prenons

$$\alpha = \frac{-b - \sqrt{b^2 - ac}}{a}, \quad \beta = \frac{-b + \sqrt{b^2 - ac}}{a},$$

(1) Cf. DARBOUX, *Théorie des surfaces*, t. II, p. 27.

nous aurons

$$\begin{aligned} b_1 &= - \frac{\alpha (b^2 - ac)}{a} \frac{\partial X}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial x}, \\ \Delta &= (\alpha - \beta) \frac{\partial X}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial x} - \alpha \sqrt{b^2 - ac} \frac{\partial X}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{b_1}{\sqrt{b^2 - ac}}, \\ 2 d_1 &= \left[\alpha \left(\frac{\partial x}{\partial x} + x \frac{\partial x}{\partial y} \right) + 2 b \frac{\partial x}{\partial y} + 2 dx + 2 c \right] \frac{\partial X}{\partial Y}, \\ 2 e_1 &= \left[\alpha \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} + \beta \frac{\partial \beta}{\partial y} \right) + 2 b \frac{\partial \beta}{\partial y} + 2 d\beta + 2 c \right] \frac{\partial Y}{\partial y}. \end{aligned}$$

On calculera les dérivées de α à l'aide de la relation

$$a x^2 + 2 b x + c = 0.$$

Ainsi l'on aura

$$\frac{\partial x}{\partial x} = \frac{2 \left(b \frac{\partial a}{\partial x} - a \frac{\partial b}{\partial x} \right) x + c \frac{\partial a}{\partial x} - a \frac{\partial c}{\partial x}}{2 a (a x + b)}.$$

Or

$$a x + b = - \sqrt{b^2 - ac}, \quad a \beta + b = + \sqrt{b^2 - ac}.$$

Nous obtiendrons finalement

$$\frac{2 d_1}{b_1} = \frac{P}{\frac{\partial Y}{\partial x}}, \quad \frac{2 e_1}{b_1} = - \frac{P + \beta Q}{\frac{\partial X}{\partial y}},$$

où nous avons posé

$$\left\{ \begin{aligned} P &= - \frac{a}{4(b^2 - ac)^2} \left[c \frac{\partial a}{\partial x} - a \frac{\partial c}{\partial x} + 2 \left(c \frac{\partial b}{\partial y} - b \frac{\partial c}{\partial y} \right) + 4 (be - cd) \right], \\ Q &= - \frac{a}{4(b^2 - ac)^2} \left[c \frac{\partial a}{\partial y} - a \frac{\partial c}{\partial y} + 2 \left(b \frac{\partial a}{\partial x} - a \frac{\partial b}{\partial x} \right) + 4 (ae - bd) \right]. \end{aligned} \right.$$

En remarquant que l'on a les formules

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial X} &= \frac{1}{\Delta} \frac{\partial Y}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \beta \frac{\partial}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial}{\partial Y} &= \frac{1}{\Delta} \frac{\partial X}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \alpha \frac{\partial}{\partial y} \right), \end{aligned}$$

on trouve, après quelques réductions,

$$2 \frac{\partial H}{\partial Y} = \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{2c_1}{b_1} \right) - \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{2d_1}{b_1} \right) - \frac{1}{\Delta} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2}{\sqrt{b^2 - ac}} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{2}{\sqrt{b^2 - ac}} \right) \right];$$

or

$$\frac{2}{\sqrt{b^2 - ac}} = - \frac{2 \sqrt{b^2 - ac}}{a}.$$

On a donc

$$\frac{\partial H}{\partial Y} = \frac{1}{\Delta} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\sqrt{b^2 - ac} \frac{Q}{a} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\sqrt{b^2 - ac} \frac{P}{a} \right) \right] - \frac{1}{\Delta}.$$

Puis

$$\begin{aligned} K &= \frac{f_1}{b_1} - \frac{2d_1c_1}{b_1^2} - \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{2d_1}{c_1} \right) \\ &= \frac{1}{\Delta} \left(\frac{1}{\sqrt{b^2 - ac}} \left[f - \frac{b^2 - ac}{a^2} (aP^2 - 2bPQ - cQ^2) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{a}{\sqrt{b^2 - ac}} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{b}{\sqrt{b^2 - ac}} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{c}{\sqrt{b^2 - ac}} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{d}{\sqrt{b^2 - ac}} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{e}{\sqrt{b^2 - ac}} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\sqrt{b^2 - ac} Q}{a} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\sqrt{b^2 - ac} P}{a} \right) \right). \end{aligned}$$

On simplifierait l'écriture en posant

$$\sqrt{b^2 - ac} = h.$$

Alors, en appelant J la quantité en $\{ \}$, on aurait

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{h} \left[f - \frac{h^2}{a^2} (aP^2 - 2bPQ - cQ^2) \right] \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{c}{h} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{b}{h} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{a}{h} \right) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{d}{h} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{e}{h} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{hQ}{a} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{hP}{a} \right). \end{aligned}$$

Alors

$$K = \frac{J}{\Delta}.$$

Les expressions I, J sont des fonctions des coefficients de l'équation proposée et de leurs dérivées. Si l'on fait une transformation quelconque

$$x = u \xi, \quad y = F_1(x, y), \quad z = F_2(x, y),$$

et si l'on appelle Δ_1 le déterminant fonctionnel

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} \end{vmatrix}$$

les fonctions (I), (J), composées avec les coefficients de l'équation transformée comme I, J le sont avec ceux de l'équation primitive, vérifient les relations

$$(I) = \frac{I}{\Delta_1}, \quad (J) = \frac{J}{\Delta_1}.$$

Si l'on avait annulé le coefficient de $\frac{\partial Z}{\partial Y}$ au lieu d'annuler celui de $\frac{\partial Z}{\partial X}$, on eût obtenu un autre invariant λ , au lieu de J. On a entre ces deux invariants la relation

$$J - \lambda = 2I.$$

En résumé, les invariants obtenus sont ceux de M. Darboux.

La relation $I = 0$ exprime que les invariants J et λ sont égaux et que l'équation peut se ramener à la forme

$$2 \frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y} - KZ = 0.$$

M. Picard a étudié les équations du second ordre obtenues, en écrivant que la variation première de l'intégrale

$$\int f \left(V, \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y} \right) dx$$

est nulle, f étant une forme quadratique. Pour ces équations, $I = 0$. Cela explique comment on peut les ramener à la forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + F(x, y)z = 0 \quad (1).$$

2° Soit $b^2 - ac = 0$.

(1) *Acta mathematica*, t. XI, 1888, et *Bulletin des Sciences mathématiques*, avril 1892.

Nous prendrons comme variable Y une solution de l'équation

$$a \frac{\partial Y}{\partial x} + b \frac{\partial Y}{\partial y} = 0,$$

ce qui annule les termes en $\frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y}$ et $\frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2}$. Puis, z_1 et z_2 étant deux solutions distinctes de l'équation proposée, nous poserons

$$X = \frac{z_2}{z_1}, \quad z = z_1 Z.$$

L'équation réduite sera de la forme

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial X^2} + 2M \frac{\partial Z}{\partial Y} = 0.$$

Le calcul de M fournit un invariant. On a, en effet,

$$2M = \frac{2(ae - bd) + b \frac{\partial a}{\partial x} - a \frac{\partial b}{\partial x} + c \frac{\partial a}{\partial y} - b \frac{\partial b}{\partial y}}{\left(a \frac{\partial X}{\partial x} + b \frac{\partial X}{\partial y} \right)^2} \frac{\partial Y}{\partial y}.$$

Pour trouver la relation d'invariance, nous ferons le raisonnement suivant. On peut obtenir la même forme réduite précédente en faisant d'abord un changement de fonction et de variables quelconques

$$z = u \zeta, \quad \xi = F_1(x, y), \quad \eta = F_2(x, y)$$

qui donne la transformée (3). Nous opérerons sur cette équation comme sur l'équation primitive en posant

$$\alpha \frac{\partial Y}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial Y}{\partial \eta} = 0, \quad X = \frac{\xi^2}{\eta}, \quad z = \zeta_1 Z,$$

où ζ_1 et ζ_2 sont les solutions de (3) correspondant à z_1 et z_2 . Les fonctions X, Y, Z peuvent être supposées les mêmes que dans le cas précédent, puisque les équations qui les déterminent sont précisément les mêmes. On a, en effet,

$$z_1 = u \zeta_1, \quad z_2 = u \zeta_2.$$

D'où

$$X = \frac{\xi^2}{\eta} = \frac{z^2}{z_1}, \quad z = u \zeta = u \zeta_1 Z = z_1 Z.$$

D'ailleurs, on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}, \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y}, \\ a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} &= \left(a \frac{\partial \xi}{\partial x} + b \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial \xi} + \left(a \frac{\partial \eta}{\partial x} + b \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial \eta}, \\ \alpha &= \frac{1}{a} \left(a \frac{\partial \xi}{\partial x} + b \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 u, \\ \beta &= \frac{1}{a} \left(a \frac{\partial \xi}{\partial x} + b \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \left(a \frac{\partial \eta}{\partial x} + b \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) u, \\ a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{a}{u \left(a \frac{\partial \xi}{\partial x} + b \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)} \left(\alpha \frac{\partial}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial}{\partial \eta} \right).\end{aligned}$$

Les équations

$$a \frac{\partial Y}{\partial x} + b \frac{\partial Y}{\partial y} = 0, \quad \alpha \frac{\partial Y}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial Y}{\partial \eta} = 0$$

sont donc bien équivalentes. Les deux formes réduites ainsi obtenues étant identiques, nous aurons

$$\begin{aligned}& \frac{2(\alpha z - \beta \delta) + \beta \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} - \alpha \frac{\partial \beta}{\partial \xi} + \gamma \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} - \beta \frac{\partial \beta}{\partial \eta}}{\left(\alpha \frac{\partial X}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial X}{\partial \eta} \right)^2} \frac{\partial Y}{\partial \eta} \\ &= \frac{2(ac - bd) + b \frac{\partial a}{\partial x} - a \frac{\partial b}{\partial x} + c \frac{\partial a}{\partial y} - b \frac{\partial b}{\partial y}}{\left(a \frac{\partial X}{\partial x} + b \frac{\partial X}{\partial y} \right)^2} \frac{\partial Y}{\partial y}.\end{aligned}$$

Appelons, pour abrégé (L), L les numérateurs des expressions précédentes, et remarquons que nous avons

$$\begin{aligned}\Delta_1 \frac{\partial Y}{\partial \eta} &= \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{1}{a} \left(a \frac{\partial \xi}{\partial x} + b \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \frac{\partial Y}{\partial \eta}, \\ \alpha \frac{\partial X}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial X}{\partial \eta} &= \frac{a \frac{\partial \xi}{\partial x} + b \frac{\partial \xi}{\partial y}}{a} \left(a \frac{\partial X}{\partial x} + b \frac{\partial X}{\partial y} \right),\end{aligned}$$

nous obtenons donc

$$[L] = \frac{\Delta_1 u^2}{a} \left(a \frac{\partial \xi}{\partial x} + b \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) L.$$

Or

$$\sqrt{az} = \left(a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} \right) \sqrt{a};$$

nous avons finalement

$$(L) \quad \Delta_1 a^2 = \frac{L}{\sqrt{a}}.$$

Nous obtenons ainsi un seul invariant $\frac{L}{\sqrt{a}}$. S'il est nul, l'équation est réductible à la forme intégrable

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial X^2} = 0.$$

Les équations de M. Picard (*loc. cit.*) rentrent dans ce type lorsque la partie homogène du second degré en $\frac{\partial Y}{\partial x}, \frac{\partial Y}{\partial y}$ de la forme quadratique $f\left(V, \frac{\partial Y}{\partial x}, \frac{\partial Y}{\partial y}\right)$ est un carré parfait.

Remarquons en terminant que, si $L = 0$, un seul changement de variables ramène l'équation à la forme intégrable

$$a \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + x d \frac{\partial z}{\partial x} + f z = 0.$$

Il suffit de garder la variable x et de prendre, pour nouvelle variable y , une solution de l'équation

$$a \frac{\partial Y}{\partial x} + b \frac{\partial Y}{\partial y} = 0.$$

SÉANCE DU 21 NOVEMBRE 1900.

PRÉSIDENCE DE M. POINCARÉ.

Élections :

M. Auric, présenté par MM. Maillet et d'Ocagne; M. Levi Civita, présenté par MM. Drach et Borel; M. Estanave, présenté par MM. Blutel et Borel; M. Z. de Galdeano, présenté par MM. Laisant et Borel; M. Dickstein, présenté par MM. Niewenglowski et Borel; M. Ackermann-Teubner, présenté par MM. Claude Lafontaine et Gauthier-Villars; M. Hardel, présenté par MM. d'Ocagne et Bricard, sont élus, à l'unanimité, membres de la Société.

Communications :

M. Borel : *Sur les prolongements analytiques des séries de fractions rationnelles.*

M. Hadamard : *Sur les discontinuités dans l'étude du déplacement des fluides.*

MM. Poincaré et Borel présentent quelques observations à ce sujet.

M. APPELL adresse la Note suivante :

Déformation spéciale d'un milieu continu: tourbillons de divers ordres.

I. Soit une transformation ponctuelle continue transformant une région $\mathcal{R}_0$ de l'espace en une région $\mathcal{R}$ par les formules

$$(1) \quad \begin{cases} x = f(a, b, c), \\ y = f_1(a, b, c), \\ z = f_2(a, b, c), \end{cases}$$

faisant correspondre à chaque point $M_0(a, b, c)$ de $\mathcal{R}_0$ un point $M(x, y, z)$ de $\mathcal{R}$, et réciproquement. Nous supposons que $x da + y db + z dc$ est une différentielle exacte.

Soient trois fonctions A, B, C de a, b, c et trois fonctions X, Y, Z de x, y, z . Nous imaginerons le champ des vecteurs P_0 de projections A, B, C appliqués aux points M_0 , et le champ des vecteurs P de projections X, Y, Z appliqués aux points M.

Supposons que l'on ait, en vertu des relations (1), l'identité

$$(2) \quad A da + B db + C dc = X dx + Y dy + Z dz$$

ou

$$(3) \quad P_0 ds_0 \cos \widehat{P_0, ds_0} = P ds \cos \widehat{P, ds},$$

ds et ds_0 étant deux déplacements correspondants dans les deux régions. On peut établir alors la propriété suivante :

Permutons les deux champs de vecteurs, c'est-à-dire appliquons les vecteurs P aux points $M_0(a, b, c)$ et les vecteurs P_0 aux points $M(x, y, z)$. On peut évidemment supposer X, Y, Z fonctions de a, b, c et A, B, C fonctions de x, y, z . Alors les lignes de vecteurs des champs ainsi permutés se correspondent dans la transformation.

II. Mais il est possible d'aller plus loin et de déduire de l'identité (2) d'autres identités en nombre infini, de même forme et donnant lieu aux mêmes propriétés. Pour cela, considérons les tourbillons de ces deux vecteurs

$$X_1 = \frac{\partial C}{\partial b} - \frac{\partial B}{\partial c},$$

$$Y_1 = \frac{\partial A}{\partial c} - \frac{\partial C}{\partial a},$$

$$Z_1 = \frac{\partial B}{\partial a} - \frac{\partial A}{\partial b}$$

et

$$A_1 = D \left(\frac{\partial Z}{\partial y} \quad \frac{\partial Y}{\partial z} \right),$$

$$B_1 = D \left(\frac{\partial X}{\partial z} \quad \frac{\partial Z}{\partial x} \right),$$

$$C_1 = D \left(\frac{\partial Y}{\partial x} \quad \frac{\partial X}{\partial y} \right),$$

D étant le déterminant fonctionnel de x, y, z par rapport à a, b, c . On a la nouvelle identité

$$A_1 da + B_1 db + C_1 dc = X_1 dx + Y_1 dy + Z_1 dz,$$

qui donne lieu aux mêmes propriétés, et par la même transformation à une identité nouvelle, etc.

En outre on a la relation

$$AX_1 + BY_1 + CZ_1 = A_1X + B_1Y + C_1Z.$$

On obtient ainsi une infinité d'autres champs de vecteurs possédant des propriétés analogues et donnant des tourbillons des divers ordres. Ces théorèmes se rattachent à ceux que nous avons développés dans un Mémoire inséré dans le *Journal* de M. Jordan (1^{er} fascicule, 1899).

SÉANCE DU 3 DÉCEMBRE 1900.

PRÉSIDENCE DE M. DUCAGNE.

Communications :

M. Duporcq : *Sur l'hypocycloïde à trois rebroussements.*

XXIV.

M. Servant : *Sur la théorie des surfaces et la déformation du parabolôïde.*

M. BRICARD fait la Communication suivante :

Sur une propriété du cylindroïde.

1. Dans une Note récemment insérée au *Bulletin* ⁽¹⁾, M. Appell a donné une démonstration directe et fort élégante du théorème suivant :

Le cylindre et le cylindroïde (ou conoïde de Plucker) sont les seules surfaces réglées telles que le lieu des projections d'un point quelconque de l'espace sur leurs génératrices soit une courbe plane.

Ce même théorème peut être dérivé simplement de résultats connus, ainsi que je vais le montrer.

Soit (S) une surface réglée telle que le lieu des projections d'un point quelconque de l'espace α sur ses génératrices soit une courbe plane et G, l'une de ces génératrices. Quand G se déplace sur (S), le symétrique α' du point α par rapport à G décrit aussi une courbe plane.

Si donc on considère une figure fixe quelconque F, et si pour chaque position de G on construit la figure F' symétrique de F par rapport à cette droite, la figure F', qui est évidemment de grandeur invariable, sera assujettie à une loi de déplacement telle que tous ses points décrivent des courbes planes.

Or les conditions d'un pareil déplacement sont connues par les travaux de MM. Darboux et Mannheim ⁽²⁾; elles se résument en ceci :

Soit (C) un cylindre de révolution fixe : faisons rouler à l'intérieur de (C) un cylindre de révolution (C₁) de rayon moitié, ce cylindre pouvant en outre recevoir un glissement parallèle à son axe, et achevons de déterminer le déplacement

⁽¹⁾ 1900, p. 261.

⁽²⁾ V. KÖNIGS, *Leçons de Cinématique*, p. 353 (Note de M. Darboux); MANNHEIM, *Principes et développements de Géométrie cinématique*, p. 176 et 389.

de (C) en assujettissant un point quelconque, relié à ce cylindre, à rester sur un plan fixe, également quelconque; tous les points invariablement liés à (C_1) décrivent alors des courbes planes (des ellipses), et ces conditions de déplacement sont les plus générales qui permettent à tous les points d'une figure de grandeur invariable de décrire des courbes planes. (On laisse de côté le cas, sans intérêt, où la figure en question serait animée d'une translation telle que l'un de ses points décrive une courbe plane.)

Le déplacement de la figure F' doit donc pouvoir s'obtenir de cette manière. Mais il faut observer que, F' étant constamment symétrique d'une figure fixe par rapport à une droite, le déplacement de F' relativement à F doit être identique au déplacement inverse.

Il faut donc particulariser les conditions que j'ai rappelées plus haut de manière à réaliser cette identité du déplacement direct et du déplacement inverse. Cela n'est possible, on le voit, que si les cylindres (C_1) et (C) sont égaux, ce qui exige qu'ils soient tous deux réduits à une droite D .

Le déplacement de F' est donc ainsi défini : une droite D , invariablement liée à F' , occupe une position fixe dans l'espace, tout en pouvant glisser sur elle-même, et un point m' de F' reste sur un plan fixe.

Réciproquement, quand F' se déplace dans ces conditions, cette figure reste symétrique d'une figure fixe F par rapport à une droite qui se déplace suivant une loi convenable.

Soit, en effet, m un point fixe tel que sa distance à D soit égale à la distance constante du point m' à la même droite. Appelons G la perpendiculaire commune à D et mm' : G rencontre le segment mm' en son milieu μ . La figure constituée par le point m' et la droite D est symétrique par rapport à G de la figure constituée par le point m et la droite D . Tout point de la figure F' , point invariablement lié à m' et à D , reste donc symétrique par rapport à G d'un point invariablement lié à m et à D , c'est-à-dire d'un point fixe.

C. Q. F. D.

Puisque tous les points de F' décrivent des courbes planes, la projection d'un point fixe quelconque sur G décrit aussi une

courbe plane, et la surface engendrée par G jouit bien de la propriété énoncée.

La droite G , avons-nous dit, est la perpendiculaire commune à D et à mm' , et passe par le point μ , milieu du segment mm' . Or le point m' décrit une section plane d'un cylindre de révolution ayant pour axe D et passant par le point m . Le point μ décrit une courbe homothétique de la précédente par rapport au point m , le rapport d'homothétie étant $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire une section plane d'un cylindre de révolution contenant D .

La droite G est donc assujettie à rencontrer constamment à angle droit une droite D et s'appuie sur une section plane d'un cylindre de révolution contenant D : on retrouve une génération classique du cylindroïde.

Nous avons laissé de côté le cas où F' serait animée d'une translation : on voit immédiatement qu'à ce cas correspond celui où la surface cherchée (S) est un cylindre.

2. Il y aurait lieu de chercher à généraliser la propriété du cylindroïde, en traitant la question suivante :

Quelles sont les surfaces réglées telles que le lieu des projections d'un point quelconque de l'espace sur leurs génératrices soit une courbe sphérique?

Je n'ai pu encore résoudre complètement ce problème, mais je signalerai le résultat suivant, qui se présente comme conséquence immédiate de recherches, déjà publiées, relatives au déplacement d'une figure dont tous les points décrivent des lignes sphériques⁽¹⁾.

On considère le conoïde droit, ayant pour directrice curviligne la courbe d'intersection d'un cylindre de révolution dont l'axe se confond avec celui du conoïde, et d'une sphère ayant son centre sur le cylindre : ce conoïde est tel que le lieu des projections sur ses génératrices d'un point quelconque de l'espace est une courbe sphérique.

On a une propriété moins étendue pour la surface définie de la manière suivante :

(¹) Voir, sur ce sujet, un Mémoire de M. E. DUPORCQ et un Mémoire de l'auteur, insérés dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées* (années 1897 et 1898).

Soit $Oxyz$ un trièdre trirectangle. Considérons, dans le plan Oxy , un cercle C ayant son centre sur Oz et passant par le point O . La surface en question (S) est engendrée par une droite qui s'appuie sur C et sur Oz , et qui de plus fait un angle constant avec cette dernière droite.

Le lieu des projections d'un point quelconque du plan Oxy ou du plan Oxz sur les génératrices de (S) est une courbe sphérique.

J'énoncerai en dernier lieu deux théorèmes qui peuvent être utiles dans l'étude de la question indiquée plus haut.

Je dirai, pour abréger le langage, qu'une droite variable D est en relation sphérique avec le couple de points a, a' si le symétrique du point a par rapport à D reste constamment sur une sphère de centre a' .

Il est alors évident que le symétrique du point a' par rapport à la même droite reste sur une sphère de centre a , et que les projections des points a et a' sur D restent sur une même sphère ayant pour centre le point milieu de aa' .

Cela posé, on a les théorèmes suivants :

1° Si une droite variable est en relation sphérique avec deux couples de sommets opposés d'un quadrilatère complet, elle est également en relation sphérique avec le troisième couple de sommets opposés ⁽¹⁾.

(La droite en question, assujettie à deux conditions, engendre une congruence.)

2° Si une droite variable est en relation sphérique avec trois couples de points quelconques situés dans un même plan, elle est également en relation sphérique avec une infinité d'autres couples de points répartis sur une cubique plane passant par les six points donnés; deux points faisant partie d'un même couple sont en correspondance steinerienne sur cette cubique (autrement dit, les tangentes en ces deux points à la cubique vont se couper sur la même courbe).

(1) Ce théorème est dû à M. Duporcq.

M. BOREL fait la Communication suivante :

Sur les formules d'Olinde Rodrigues.

On sait que, si l'on désigne par x, y, z les coordonnées d'un point d'une surface, et par c, c', c'' les cosinus directeurs de la normale, on a, pour tout déplacement le long d'une ligne de courbure L les formules

$$(1) \quad \begin{cases} dx - R dc = 0, \\ dy - R dc' = 0, \\ dz + R dc'' = 0, \end{cases}$$

dans lesquelles R désigne le rayon de courbure qui correspond à L. Ces formules permettent de trouver aisément l'équation différentielle des lignes de courbure et l'équation aux rayons de courbure principaux.

Les trois formules (1) se réduisent d'ailleurs à deux, comme on le voit, en remarquant que l'on a, pour tout déplacement effectué sur la surface,

$$\int c(dx + R dc) = 0.$$

Dans les applications, il y a souvent avantage à employer, au lieu des cosinus directeurs c, c', c'' , des quantités proportionnelles u, v, w . Si dans les formules (1) on remplace c, c', c'' par u, v, w et R par φ on obtient les formules

$$(2) \quad \begin{cases} dx + \varphi du = 0, \\ dy - \varphi dv = 0, \\ dz - \varphi dw = 0, \end{cases}$$

dont nous allons chercher la signification. Les différentielles se rapportant toujours à un déplacement effectué sur la surface, on a

$$\int u dx + \varphi du = \varphi(u du + v dv + w dw),$$

On déduit donc des formules (2) la suivante :

$$\varphi d(u^2 + v^2 + w^2) = 0$$

qui se décompose en deux :

$$\begin{aligned} \rho &= 0, \\ u^2 + v^2 + w^2 &= h^2, \end{aligned}$$

h étant une constante. D'ailleurs, si l'on pose

$$\begin{aligned} u &= ch, & v &= c'h, & w &= c''h, \\ \rho &= \frac{R}{h}, \end{aligned}$$

les formules (2) deviennent identiques aux formules (1).

Donc les formules (2) peuvent remplacer les formules (1) pour la détermination des directions principales et des rayons de courbure principaux; il y a lieu seulement de remarquer : 1° que l'on a

$$(3) \quad \rho = \frac{R}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}},$$

2° que les équations (2) peuvent fournir la solution $\rho = 0$, étrangère à la question.

Comme application, proposons-nous de déterminer les rayons de courbure principaux d'une surface représentée par l'équation tangentielle

$$(4) \quad f(u, v, w, s) = 0.$$

Nous supposons les axes rectangulaires et l'équation d'un plan écrite sous la forme

$$ux + vy + wz + s = 0;$$

les coordonnées d'un point de la surface (4) sont alors

$$\begin{aligned} x &= -\frac{\frac{\partial f}{\partial u}}{\frac{\partial f}{\partial s}}, & y &= -\frac{\frac{\partial f}{\partial v}}{\frac{\partial f}{\partial s}}, & z &= -\frac{\frac{\partial f}{\partial w}}{\frac{\partial f}{\partial s}}. \end{aligned}$$

et les formules (2) deviennent

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial s} d \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial u} d \frac{\partial f}{\partial s} + \varphi \left(\frac{\partial f}{\partial s} \right)^2 du &= 0, \\ \frac{\partial f}{\partial s} d \frac{\partial f}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial v} d \frac{\partial f}{\partial s} + \varphi \left(\frac{\partial f}{\partial s} \right)^2 dv &= 0, \\ \frac{\partial f}{\partial s} d \frac{\partial f}{\partial w} - \frac{\partial f}{\partial w} d \frac{\partial f}{\partial s} + \varphi \left(\frac{\partial f}{\partial s} \right)^2 dw &= 0.\end{aligned}$$

L'introduction d'un paramètre auxiliaire $d\lambda$ permet de remplacer ces équations par les suivantes plus symétriques

$$\begin{aligned}d \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial u} d\lambda + \varphi \frac{\partial f}{\partial s} du &= 0, \\ d \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial v} d\lambda - \varphi \frac{\partial f}{\partial s} dv &= 0, \\ d \frac{\partial f}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial w} d\lambda - \varphi \frac{\partial f}{\partial s} dw &= 0, \\ d \frac{\partial f}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial s} d\lambda &= 0,\end{aligned}$$

auxquelles il y a lieu de joindre la relation

$$\frac{\partial f}{\partial u} du - \frac{\partial f}{\partial v} dv + \frac{\partial f}{\partial w} dw + \frac{\partial f}{\partial s} ds = 0,$$

obtenue en différenciant totalement l'équation (4). Si l'on élimine du , dv , dw , ds , $d\lambda$ entre les équations précédentes, on obtient l'équation

$$(5) \quad \Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial w} & \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial s} & \frac{\partial f}{\partial u} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} & \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial w} & \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial s} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial w \partial u} & \frac{\partial^2 f}{\partial w \partial v} & \frac{\partial^2 f}{\partial w^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial w \partial s} & \frac{\partial f}{\partial w} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial u} & \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial v} & \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial w} & \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} & \frac{\partial f}{\partial s} \\ \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} & \frac{\partial f}{\partial w} & \frac{\partial f}{\partial s} & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

dans laquelle on a posé

$$\varphi_1 = \varphi \frac{\partial f}{\partial s}, \quad R = \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}} \frac{\partial f}{\partial s}.$$

L'équation (5) est du troisième degré en φ_1 ; il est aisé de s'assurer qu'elle admet la solution étrangère prévue $\varphi_1 = 0$; les deux autres racines fournissent les deux rayons de courbures principaux de la surface donnée.

On peut éliminer aisément la solution $\varphi_1 = 0$ en remarquant que, si l'on désigne par m le degré d'homogénéité de $f(u, v, w, s)$, on a

$$u \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + v \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + w \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial w} + s \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial s} + (m-1) \frac{\partial f}{\partial u} = 0,$$

$$u \frac{\partial f}{\partial u} + v \frac{\partial f}{\partial v} + w \frac{\partial f}{\partial w} + s \frac{\partial f}{\partial s} - m f = 0.$$

L'équation (5) se transforme en la suivante (1) :

$$-(m-1)\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \varphi_1 & \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial w} & \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial s} & u \varphi_1 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + \varphi_1 & \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial w} & \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial s} & v \varphi_1 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial w} & \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial w} & \frac{\partial^2 f}{\partial w^2} + \varphi_1 & \frac{\partial^2 f}{\partial w \partial s} & w \varphi_1 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial s} & \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial s} & \frac{\partial^2 f}{\partial w \partial s} & \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} & \frac{\partial f}{\partial w} & \frac{\partial f}{\partial s} & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

dans laquelle le facteur φ_1 est en évidence et peut être supprimé. En le supprimant et en effectuant sur les lignes l'opération analogue à celle que nous avons effectuée sur les colonnes, on obtient l'équation

$$(6) \quad \frac{(m-1)^2 \Delta}{\varphi_1} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - \varphi_1 & \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial w} & \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial s} & u \\ \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} - \varphi_1 & \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial w} & \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial s} & v \\ \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial w} & \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial w} & \frac{\partial^2 f}{\partial w^2} - \varphi_1 & \frac{\partial^2 f}{\partial w \partial s} & w \\ \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial s} & \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial s} & \frac{\partial^2 f}{\partial w \partial s} & \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} & 0 \\ u \varphi_1 & v \varphi_1 & w \varphi_1 & 0 & h^2 \end{vmatrix} = 0.$$

(1) On peut toujours supposer que m n'est pas égal à un. Cette hypothèse sera toujours vérifiée dans le cas d'une surface algébrique, si, comme il est naturel, on prend pour f un polynôme.

La formule (5) montre immédiatement que, dans Δ , le coefficient de ρ_1^3 est $-\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)^2$; d'autre part le coefficient de ρ_1 est, d'après (6),

$$\frac{h^2}{(m-1)^2} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial w} & \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial s} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial w} & \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial s} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial w} & \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial w} & \frac{\partial^2 f}{\partial w^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial w \partial s} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial s} & \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial s} & \frac{\partial^2 f}{\partial w \partial s} & \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} \end{vmatrix} - \frac{h^2}{(m-1)^2} \text{H}.$$

On en déduit immédiatement l'expression de la courbure totale, car l'on a

$$R_1 R_2 = \frac{-h^4}{(m-1)^2 \left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)^4} \text{H};$$

H désigne le hessien de la forme f . On retrouve ainsi très simplement ce fait bien connu, que la relation $\text{H} = 0$ est la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (4) représente, non une surface, mais une courbe.

M. N. WEILL adresse la Note suivante :

Sur les points de base d'un faisceau linéaire de courbes algébriques.

Considérons une conique et un premier groupe G de $2m$ points sur cette conique, ces $2m$ points étant les points communs à la conique et à une première courbe C de degré m ; les droites, au nombre de $\frac{2m(2m-1)}{2}$, qui joignent ces points deux à deux, forment un premier groupe D . Considérons, sur la conique, un second groupe G' de $2m$ points, ces points étant les points communs à la conique et à une seconde courbe C' de degré m ; les droites qui joignent ces points deux à deux forment un groupe D' . Les courbes C et C' ont m^2 points communs; si par ces m^2 points nous faisons passer une courbe quelconque C'' de degré m , elle déterminera sur la conique un groupe G'' de $2m$ points et un groupe D'' de droites: l'enveloppe des droites du groupe variable D''

est une courbe de classe $(2m - 1)$, et les droites des groupes D et D' ont aussi cette courbe pour enveloppe. On peut énoncer ce résultat de la manière suivante : Étant donnés sur une conique deux groupes de $2m$ points chacun, les droites qui joignent deux à deux les points du premier groupe, et les droites qui joignent deux à deux les points du second groupe, au nombre total de $2m(2m - 1)$, sont tangentes à une courbe de classe $(2m - 1)$.

Le même résultat subsiste pour un nombre impair de points pris sur une conique ; il suffit d'adjoindre un point fixe de la conique. Transformant ce résultat par polaires réciproques, on a enfin l'énoncé suivant :

THÉORÈME. — *Deux polygones de m côtés étant circonscrits à une conique, il existe une courbe de degré $(m - 1)$ passant par tous leurs sommets, au nombre de $m(m - 1)$.*

Ainsi les six sommets de deux triangles circonscrits à une conique sont sur une conique, résultat bien connu.

Considérons 2 quadrilatères circonscrits à une conique ; leurs 12 sommets sont sur une cubique. Laissons fixes l'un des quadrilatères et 3 droites de l'autre, lesquelles formeront un triangle de sommets A, B, C, circonscrit à la conique ; soient P, Q, R les points où les côtés du triangle ABC sont rencontrés par le quatrième côté du second quadrilatère ; si ce quatrième côté se déplace, nous aurons des cubiques passant par les 3 points variables P, Q, R et par 9 points fixes, savoir : les 6 sommets du premier quadrilatère et les 3 points A, B, C ; en d'autres termes, ces 9 points sont les points de base d'un faisceau de cubiques.

En généralisant ce raisonnement, nous arrivons au théorème suivant que nous avons en vue :

THÉORÈME. — *Étant donnés un polygone de $(m + 1)$ côtés circonscrit à une conique et un polygone de m côtés circonscrit à cette même conique, leurs sommets, au nombre de*

$$\frac{(m + 1) \cdot m}{2} = \frac{m \cdot (m - 1)}{2},$$

c'est-à-dire de m^2 , sont les points de base d'un faisceau linéaire de courbes de degré m .

Ce théorème général, qui a de nombreuses conséquences, est le premier, croyons-nous, qui permette de construire *effectivement* le groupe des points de base d'un faisceau linéaire de degré quelconque.

Le cas le plus simple, celui où $m = 3$, a été signalé par Laguerre. Ainsi, si l'on considère toutes les cubiques qui passent par les 6 sommets d'un quadrilatère et par 2 points A, B, on obtient le neuvième point du faisceau en construisant une conique inscrite dans le quadrilatère et tangente à la droite AB, et prenant le point de rencontre des tangentes menées de A et B à cette conique.

Considérons la valeur $m = 4$; les 10 sommets d'un pentagone circonscrit à une conique et les 6 sommets d'un quadrilatère circonscrit à cette même conique sont les 16 points de base d'un faisceau de courbes du quatrième degré. Dès lors, considérons un pentagone circonscrit à une conique et 3 points A, B, C, pris sur une tangente à cette conique; toutes les courbes du quatrième degré qui passent par les 10 sommets du pentagone et les 3 points A, B, C passent par 3 autres points fixes que l'on obtient en menant par A, B, C les 3 tangentes à la conique, lesquelles se coupent aux 3 points cherchés. On pourrait de même prendre un point A quelconque et les points B et C respectivement sur les 2 tangentes partant de A; on aurait les 3 points restants en menant par B et C des tangentes à la conique, qui forment avec les tangentes AB, AC le quadrilatère dont les sommets sont les 6 points qui, avec les 10 sommets du pentagone, forment les 16 points demandés. Si les points A, B, C étaient les sommets d'un triangle circonscrit à la conique, les 13 points donnés ne seraient plus distincts; on ne pourrait donc en déduire les 3 points restants.

On peut énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Étant donné un polygone de $(m + 1)$ côtés circonscrit à une conique, et $(m - 1)$ points sur une tangente à cette conique, toutes les courbes du degré m qui passent par les sommets du polygone et par les $(m - 1)$ points passent par $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ autres points fixes que l'on obtient en menant par les $(m - 1)$ points des tangentes à la conique et prenant leurs points d'intersection.*

Plus généralement, on peut prendre $(m - 1)$ points sur des tangentes, pourvu que ces points permettent de déterminer complètement le polygone de m côtés circonscrit à la conique et dont ces points sont des sommets.

SÉANCE DU 19 DÉCEMBRE 1900.

PRÉSIDENCE DE M. LAISANT.

Communications :

M. Saltykow : *Sur les systèmes d'équations aux linéaires partielles.*

M. DUPORCQ fait la Communication suivante :

Sur une extension à l'espace du théorème de Simson.

Le lieu des points dont les projections sur les faces d'un tétraèdre sont situées dans un même plan est, comme on sait, une surface du troisième ordre à quatre points doubles, corrélative, par conséquent, d'une surface de Steiner. Cette surface correspond au plan de l'infini au moyen de la transformation qui associe entre eux les points dont les coordonnées normales, par rapport au tétraèdre, sont inversement proportionnelles; il suffit, pour le voir, de remarquer que deux points ainsi associés, qu'on peut appeler *inverses* par rapport au tétraèdre, sont les foyers principaux d'une même quadrique de révolution inscrite au tétraèdre : l'inverse du plan de l'infini est donc bien le lieu des foyers des paraboloïdes de révolution inscrits au tétraèdre.

On peut remarquer encore que deux points inverses sont conjugués à tous les hyperboloïdes équilatères conjugués au tétraèdre, et il en résulte que la surface obtenue est aussi le lieu des centres de ces hyperboloïdes, nouvelle analogie avec le problème correspondant dans le plan. Mais on peut en tirer encore une conséquence intéressante.

Rappelons, à cet effet, que toutes les quadriques qui passent par cinq points coupent un plan fixe P suivant des coniques harmoniquement circonscrites à une conique fixe Γ , qu'on dit *conjuguée* au pentagone des cinq points : cette conique est commune

aux cinq quadriques qui admettent l'un des cinq points comme pôle du plan P et le tétraèdre des quatre autres comme tétraèdre conjugué. Si P est le plan de l'infini, on voit que les cinq quadriques admettant un des points pour centre et respectivement conjuguées aux tétraèdres des quatre autres, sont homothétiques : en particulier, elles seront en même temps équilatères. On en conclut que :

Si cinq points sont tels que les projections de l'un sur les faces du tétraèdre déterminé par les quatre autres soient dans un même plan, cette propriété est symétrique par rapport aux cinq points.

D'après ce qui précède, on peut énoncer sous forme symétrique la relation qui existe entre ces cinq points de la manière suivante :

Il faut et il suffit que la conique du plan de l'infini, conjuguée au pentagone gauche formé par les cinq points, soit harmoniquement circonscrite à l'ombilicale.

Pour terminer, je me contenterai d'indiquer que *dans toute cubique gauche on peut inscrire une double infinité de tétraèdres sur les faces desquels tout point de la cubique a ses projections dans un même plan.*

Enfin, *si les points à l'infini de la cubique forment un triangle circonscrit à l'ombilicale, la propriété précédente a lieu pour tout tétraèdre inscrit à cette cubique.*

M. DE SPARRE adresse la Note suivante :

Sur une application des fonctions elliptiques à l'étude du mouvement des projectiles.

Lorsqu'on suppose la résistance de l'air proportionnelle à la quatrième puissance de la vitesse, si l'on désigne par

v , la vitesse horizontale du projectile;

θ l'angle de la tangente à la trajectoire avec l'horizon;

x et y les coordonnées horizontale et verticale du projectile dans le plan de tir;

γ une constante dépendant de la forme et du poids du projectile;
 g l'accélération de la pesanteur;

et si l'on pose de plus

$$v_1 = \gamma w, \quad x = \frac{\gamma^2}{g} \xi, \quad y = \frac{\gamma^2}{g} \eta,$$

on a

$$\frac{1}{w^3} = \frac{1}{w_0^3} - F(\theta_0) + F(\theta),$$

$$\xi = \int_{\theta_0}^{\theta} w^2 d \tan \theta, \quad \eta = \int_{\theta_0}^{\theta} w^2 \tan \theta d \tan \theta$$

où

$$F(\theta) = \tan \theta \left(\sec^3 \theta - \frac{3}{2} \sec \theta \right) - \frac{3}{2} \chi \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right).$$

Mais si l'angle θ de la tangente avec l'horizon ne dépasse pas 45° à 46° , on peut prendre, avec une approximation très suffisante,

$$F(\theta) = A_1 \tan \theta - A_2 \tan^3 \theta$$

avec

$$A_1 = 3,91, \quad A_2 = 2,36.$$

Par suite, si l'on pose de plus

$$A = \frac{1}{\gamma^3 A_2}, \quad \beta = \frac{A_1}{A_2}, \quad z = \tan^3 \theta_0 + \beta \tan \theta_0 + \frac{1}{A_2} u_0^3,$$

on aura

$$w^2 = \frac{2A}{\sqrt{1 - 4 \tan^3 \theta - 4 \beta \tan \theta + 4z}}.$$

Faisons maintenant

$$z = -\frac{\tan \theta}{\gamma^2}, \quad g_2 = -\frac{4\beta}{\gamma^2}, \quad g_3 = -\frac{4z}{\gamma^6};$$

il viendra

$$w^2 = \frac{2A}{\gamma^3 \sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}},$$

et, par suite, p désignant la fonction de Weierstrass, dont les invariants sont g_2 et g_3

$$z = p(u) = -\frac{\tan \theta}{\gamma^2},$$

$$w^2 = \frac{2A}{\gamma^3 p'(u)}.$$

Nous supposerons γ^2 toujours réel et, par suite, γ^4 positif; nous sommes donc dans le cas du discriminant négatif.

Les formules (78) et (80) du précis de M. Lévy donnent alors (1)

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \frac{K}{\sqrt{H}}, & H &= \sqrt{2e_1^2 + \frac{g_3}{4e_1}}, \\ \omega_2 &= \frac{iK'}{\sqrt{H}}, & k^2 &= \frac{1}{2} - \frac{3e_1}{4H}, \\ p(u) &= e_1 + H \frac{1 - \operatorname{cn} 2u}{1 - \operatorname{cn} 2u} \frac{\sqrt{H}}{H}.\end{aligned}$$

D'ailleurs e_1 est la racine réelle de l'équation

$$4z^3 - g_2z - g_3 = 0,$$

de sorte que, si θ_1 désigne la valeur réelle de θ , comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, racine de l'équation

$$\operatorname{tang}^3 \theta + \beta \operatorname{tang} \theta - \alpha = 0,$$

on a

$$e_1 = -\frac{\operatorname{tang} \theta_1}{\gamma^2}$$

et aussi

$$\alpha = \operatorname{tang}^3 \theta_1 + \beta \operatorname{tang} \theta_1.$$

Nous disposerons maintenant de γ , qui est arbitraire, de façon que $H = \frac{1}{4}$. En tenant compte de la valeur de H écrite plus haut, ainsi que de celles de e_1 et α que nous venons d'écrire, cette condition donne

$$\gamma^2 = \pm 4 \sqrt{\frac{\sqrt{\operatorname{tang}^3 \theta_1 + \beta} - \alpha}{\operatorname{tang} \theta_1}} = \pm 4 \sqrt{3 \operatorname{tang}^2 \theta_1 - \beta}.$$

Les formules écrites plus haut deviennent alors

$$\begin{aligned}\omega_1 &= 2K, & k^2 &= \frac{1}{2} - 3e_1 = \frac{1}{2} + \frac{3 \operatorname{tang} \theta_1}{\gamma^2}, \\ \omega_2 &= 2iK', & p(u) &= e_1 + \frac{1}{4} \frac{1 - \operatorname{cn} u}{1 - \operatorname{cn} u} = \frac{1}{4} \frac{1 - \operatorname{cn} u}{1 - \operatorname{cn} u} - \frac{\operatorname{tang} \theta_1}{\gamma^2}\end{aligned}$$

(1) En supprimant, pour simplifier l'écriture, les indices de K , K' et k , ce qui est ici sans inconvénient.

Les valeurs de ξ et τ_i deviennent de plus

$$\xi = \pm \frac{2\Lambda}{\gamma} (u - u_0),$$

$$\tau_i = \mp 2\Lambda\gamma \int_{u_0}^u p(u) du.$$

Nous distinguerons maintenant deux cas (1) :

1° On veut se servir des Tables.

Il faudra alors faire en sorte que u soit réel; il faudra donc prendre d'abord pour γ^2 une valeur positive; nous prendrons donc

$$\gamma^2 = 4\sqrt{3\tan^2\theta_1 + \beta}, \quad \gamma = 2\sqrt{3\tan^2\theta_1 + \beta}.$$

Nous aurons ensuite pour calculer u

$$-\frac{\tan\theta}{\gamma^2} = p(u) = -\frac{\tan\theta_1}{\gamma^2} - \frac{1}{4} \frac{1 + \operatorname{cn} u}{1 - \operatorname{cn} u},$$

d'où

$$\operatorname{cn} u = \frac{\tan\theta_1 - \tan\theta - \frac{\gamma^2}{4}}{\tan\theta_1 - \tan\theta + \frac{\gamma^2}{4}}.$$

Cette dernière formule fait voir que, lorsque θ décroît de θ_1 à $-\frac{\pi}{2}$, $\operatorname{cn} u$ croît de -1 à $+1$; on pourra donc, entre les mêmes limites, faire décroître u de $2K$ à 0, et il faudra, par suite, prendre les signes inférieurs dans les valeurs de ξ et τ_i et l'on aura donc

$$\xi = \frac{2\Lambda}{\gamma} (u_0 - u),$$

$$\tau_i = 2\Lambda\gamma \int_{u_0}^u \left(\frac{1}{4} \frac{1 + \operatorname{cn} u}{1 - \operatorname{cn} u} - \frac{\tan\theta_1}{\gamma^2} \right) du.$$

Si l'on se propose d'introduire l'argument φ des Tables, en posant

$$\operatorname{sn} u = \sin \varphi$$

(1) Cet exemple met en évidence un des avantages des fonctions de Weierstrass. En effet, nous passerons d'un cas à l'autre par le simple changement du signe de γ^2 , tandis qu'avec les fonctions de Jacobi il faudrait recourir à la théorie de la transformation.

on aura

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{tang} \theta_1}{\operatorname{cn} u + \cos \varphi} &= \frac{\operatorname{tang} \theta}{1} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}, \\ \frac{\operatorname{tang} \theta_1}{\operatorname{tang} \theta} &= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

On a d'ailleurs

$$\int \frac{1 + \operatorname{cn} u}{1 - \operatorname{cn} u} du = \int \frac{1 + \operatorname{cn} u + \operatorname{cn}^2 u}{\operatorname{sn}^2 u} du = 2 \int \frac{1 + \operatorname{cn} u}{\operatorname{sn}^2 u} du = u;$$

d'ailleurs

$$D_u \frac{du}{\operatorname{sn} u} = - \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{sn}^2 u};$$

de plus, la relation connue

$$k^2 \operatorname{sn}^2 u = \frac{J}{K} - D_u \frac{\theta_2(u)}{\theta_2(u)},$$

donne, en changeant u en $u + iK$,

$$\frac{1}{\operatorname{sn}^2 u} = k^2 \operatorname{sn}^2(u + iK) = \frac{J}{K} - D_u \frac{\theta_2(u)}{\theta_2(u)}.$$

On aura donc

$$\int \frac{1 + \operatorname{cn} u}{\operatorname{sn}^2 u} du = \frac{J}{K} u - \frac{\theta_2(u)}{\theta_2(u)} = \frac{du}{\operatorname{sn} u}.$$

Pour se servir des Tables, il faut introduire la fonction $E(\varphi)$ de Legendre; on a, pour cela,

$$E(\varphi) = \int_0^{\varphi} \operatorname{dn}^2 u \, du = u - \int_0^{\varphi} k^2 \operatorname{sn}^2 u \, du = \left(1 - \frac{J}{K}\right) u - \frac{\theta_2(u)}{\theta_2(u)},$$

et, de plus,

$$D_u \operatorname{sn} u = \frac{\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u} = \frac{\theta_1(u)}{\theta_2(u)} - \frac{\theta_2(u)}{\theta_2(u)},$$

d'où

$$\frac{\theta_1(u)}{\theta_2(u)} - \frac{\theta_2(u)}{\theta_2(u)} = \frac{\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u} = E(\varphi) - \left(1 - \frac{J}{K}\right) u = \frac{\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u}$$

et, par suite,

$$\begin{aligned} \int \frac{1 + \operatorname{cn} u}{\operatorname{sn}^2 u} du &= u = E(\varphi) + \frac{du}{\operatorname{sn} u} (1 + \operatorname{cn} u) \\ &= E(\varphi) + \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \cot \frac{\varphi}{2}, \end{aligned}$$

puisque

$$\sin u = \sin \varphi, \quad \cos u = \cos \varphi, \quad du = \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}.$$

On a donc, en fin de compte,

$$x = x_0 + \Lambda \left(\frac{\gamma}{2} - \frac{\gamma \tan \theta_1}{\gamma_1} \right) u + \Lambda \gamma \left[E(\varphi) - \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} \cot \frac{\varphi}{2} \right]$$

avec

$$x_0 = -\Lambda \left(\frac{\gamma}{2} - \frac{\gamma \tan \theta_1}{\gamma_1} \right) u_0 + \Lambda \gamma \left[E(\varphi_0) - \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi_0} \cot \frac{\varphi_0}{2} \right].$$

La formule

$$\cos \varphi = \frac{\tan \theta_1 - \tan \theta - \frac{\gamma^2}{\gamma_1}}{\tan \theta_1 - \tan \theta + \frac{\gamma^2}{\gamma_1}}$$

donnera φ , qui est compris entre 0 et π sans ambiguïté.

Si φ est compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, on en déduira de suite, au moyen des Tables, $E(\varphi)$ et $u = F(\varphi)$.

Si φ est compris entre $\frac{\pi}{2}$ et π , on aura

$$E(\varphi) = 2E - E(\pi - \varphi), \\ u = F(\varphi) = 2K - F(\pi - \varphi),$$

E et K désignant les intégrales complètes.

2° Supposons maintenant qu'on veuille recourir aux développements en séries.

On devra alors, pour que les séries soient plus convergentes, faire en sorte que k^2 soit plus petit que $\frac{4}{3}$.

On prendra, par suite (1),

$$\gamma^2 = -4\sqrt{3} \tan^2 \theta_1 \frac{\gamma_1^2}{\gamma_1^2 + 3} \beta = -\gamma_1^2.$$

γ_1 étant réel et positif.

On aura alors

$$k^2 = \frac{1}{3} - \frac{4 \tan^2 \theta_1}{\gamma_1^2 + 3}.$$

(1) γ étant toujours choisi de façon que H

Les valeurs de ξ et en u deviennent, par suite,

$$\xi = \pm \frac{2\Lambda}{\gamma_1 i} (u - u_0),$$

$$\operatorname{tang} \theta_1 = \operatorname{tang} \theta = \frac{\frac{\gamma_1^2}{4}}{\frac{\gamma_1^2}{4}},$$

$$\operatorname{en} u = \frac{\operatorname{tang} \theta_1 - \operatorname{tang} \theta = \frac{\gamma_1^2}{4}}{\operatorname{tang} \theta_1 + \operatorname{tang} \theta = \frac{\gamma_1^2}{4}}.$$

Cette formule fait voir que $\operatorname{en} u$ est toujours réel et plus grand que -1 en valeur absolue. Il décroît de -1 à $-\infty$ lorsque $\operatorname{tang} \theta$ décroît de $\operatorname{tang} \theta_1$ à $\operatorname{tang} \theta_1 - \frac{\gamma_1^2}{4}$ pour décroître ensuite de $+\infty$ à 1 lorsque $\operatorname{tang} \theta$ décroît de $\operatorname{tang} \theta_1 - \frac{\gamma_1^2}{4}$ à $-\infty$. Il résulte de là que l'on peut prendre la valeur de u entre 0 et $2iK'$ et que, lorsque θ décroît de θ_1 à $-\frac{\pi}{2}$, u variera de $2iK'$ à 0 . u sera donc de la forme $u = v i$, v étant réel. Il faudra donc prendre les signes inférieurs dans les valeurs de ξ et η , et l'on aura

$$\xi = -\frac{2\Lambda}{\gamma_1} (v_0 - v).$$

Il y a lieu toutefois de faire ici, *comme toutes les fois où u est imaginaire, une remarque très importante.*

Il faut, si l'on convient, par exemple, de négliger les termes de l'ordre de q^2 dans les séries, s'assurer que les termes que l'on *néglige sont bien effectivement* de cet ordre.

Prenons, en effet, la série

$$\theta_3(u) = 1 + 2q \cos \frac{\pi u}{K} + 2q^3 \cos \frac{2\pi u}{K} + \dots,$$

comme dans le cas actuel $u = v i$, nous aurons

$$\cos \frac{2\pi u}{K} = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{2\pi v}{K}} + e^{-\frac{2\pi v}{K}} \right).$$

D'ailleurs, nous avons dit que v varie de 0 à $2K'$, par suite $e^{\frac{2\pi v}{K}}$ varie de 1 à $e^{\frac{4\pi K}{K}} = q^{-4}$ de telle sorte que le terme $2q^3 e^{\frac{2\pi v}{K}}$ est égal à 1 pour $u = 2iK'$ et nullement très petit de l'ordre de q^3 . Si donc on gardait pour variable u et que l'on voulût obtenir les

résultats aux termes *effectivement* de l'ordre de q^2 près, on devrait, dans la série que nous venons de considérer, garder les termes en q^4 .

On évitera toutefois cet inconvénient en posant

$$u = iK' + \zeta,$$

ζ variant, par suite, de iK' à $-iK'$.

La formule

$$\operatorname{cn}(iK' + \zeta) = -i \frac{dn \zeta}{k \operatorname{sn} \zeta}$$

nous donne alors

$$\frac{1 + \operatorname{cn} u}{1 - \operatorname{cn} u} = \frac{k \operatorname{sn} \zeta - i \operatorname{dn} \zeta}{k \operatorname{sn} \zeta + i \operatorname{dn} \zeta} = (k \operatorname{sn} \zeta - i \operatorname{dn} \zeta)^{-2} (1),$$

donc

$$\tau_1 = 2A\gamma_1 i \int_{u_0}^u p(u) du = 2A\gamma_1 i \int_{\zeta_0}^{\zeta} \left[\frac{\tan \theta_1}{\gamma_1^2} + \frac{1}{4} (k \operatorname{sn} \zeta - i \operatorname{dn} \zeta)^{-2} \right] d\zeta.$$

Mais

$$\begin{aligned} \int (k \operatorname{sn} \zeta - i \operatorname{dn} \zeta)^{-2} d\zeta &= \int (2k^2 \operatorname{sn}^2 \zeta - 2ki \operatorname{sn} \zeta \operatorname{dn} \zeta - 1) d\zeta \\ &= 2 \frac{J}{K} \zeta - 2 \frac{\theta_2'(\frac{\zeta}{\gamma_1})}{\theta_2'(\frac{\zeta_0}{\gamma_1})} - 2ki \operatorname{cn} \zeta - \zeta. \end{aligned}$$

D'ailleurs, aux termes de q^2 près,

$$\frac{J}{K} = \frac{\theta_2''(0)}{\theta_2'(0)} = \frac{2q\pi^2}{K^2},$$

de sorte que l'on aura

$$\tau_1 = \tau_0 + 2A\gamma_1 i \left[\left(\frac{\tan \theta_1}{\gamma_1^2} - \frac{1}{4} + \frac{q\pi^2}{K^2} \right) \zeta - \frac{1}{2} ki \operatorname{cn} \zeta - \frac{1}{2} \frac{\theta_2'(\frac{\zeta}{\gamma_1})}{\theta_2'(\frac{\zeta_0}{\gamma_1})} \right]$$

où

$$\tau_0 = -2A\gamma_1 i \left[\left(\frac{\tan \theta_1}{\gamma_1^2} - \frac{1}{4} + \frac{q\pi^2}{K^2} \right) \zeta_0 + \frac{1}{2} ki \operatorname{cn} \zeta_0 - \frac{1}{2} \frac{\theta_2'(\frac{\zeta_0}{\gamma_1})}{\theta_2'(\frac{\zeta_0}{\gamma_1})} \right].$$

On pourra d'ailleurs, dans la série $\theta_2(\frac{\zeta}{\gamma_1})$, négliger les termes en q^4 , si l'on néglige ceux qui sont effectivement de l'ordre de q^2 .

En effet, ici $\zeta = \lambda i$, λ étant réel et plus petit que K' en valeur

(1) On a, en effet,

$$(k \operatorname{sn} \zeta + i \operatorname{dn} \zeta)(k \operatorname{sn} \zeta - i \operatorname{dn} \zeta) = k^2 \operatorname{sn}^2 \zeta + \operatorname{dn}^2 \zeta = 1.$$

absolue, de sorte que dans

$$\cos \frac{2\pi\lambda}{K} = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{2\pi\lambda}{K}} + e^{-\frac{2\pi\lambda}{K}} \right),$$

on a pour λ positif

$$e^{\frac{2\pi\lambda}{K}} < e^{\frac{2\pi K}{K}} = q^{-2},$$

de sorte que $q^2 \cos \frac{2\pi\lambda}{K}$ est inférieur à q^2 en valeur absolue.

On pourra donc prendre, avec cette approximation,

$$\frac{\theta_2(\frac{\lambda}{K})}{\theta_2(\frac{\lambda}{K})} = \frac{2q\pi}{K} = \frac{\sin \frac{\pi\lambda}{K}}{1 + 2q \cos \frac{\pi\lambda}{K}}.$$

Pour calculer ensuite $\operatorname{cn} \zeta$ et ζ , nous poserons

$$k \operatorname{sn} \zeta + i \operatorname{dn} \zeta = -i \operatorname{tang} \mu,$$

d'où

$$k \operatorname{sn} \zeta - i \operatorname{dn} \zeta = i \cot \mu.$$

On déduit ensuite de ces formules et de celles dont nous nous sommes déjà servi plus haut

$$p(u) = \frac{\operatorname{tang} \theta_1}{\gamma_1^2} - \frac{1}{4} \operatorname{tang}^2 \mu = \frac{\operatorname{tang} \theta}{\gamma_1^2},$$

d'où

$$\frac{1}{4} \operatorname{tang}^2 \mu = \frac{\operatorname{tang} \theta_1 - \operatorname{tang} \theta}{\gamma_1^2} = \frac{\sin(\theta_1 - \theta)}{\gamma_1^2 \cos \theta_1 \cos \theta}.$$

Cette formule fera connaître μ .

On aura ensuite

$$i \operatorname{dn} \zeta = \frac{i}{2} (\cot \mu - \operatorname{tang} \mu) = \frac{i}{\sin 2\mu},$$

$$k \operatorname{sn} \zeta = \frac{i}{2} (\cot \mu + \operatorname{tang} \mu) = i \cot \mu,$$

et l'on en déduira

$$\operatorname{cn} \zeta = \sqrt{1 - \frac{\cot^2 2\mu}{k^2}}.$$

Puis, aux termes *effectivement* de l'ordre q^2 près, d'après ce

que nous avons vu,

$$\frac{1 + 2q \cos \frac{\pi}{k}}{1 - 2q \cos \frac{\pi}{k}} = \frac{dn \frac{\pi}{k}}{\sqrt{k'} \sqrt{1 - k' \sin 2\varphi}},$$

d'où

$$2q \cos \frac{\pi}{k} = \frac{1 - \sqrt{k'} \sin 2\varphi}{1 + \sqrt{k'} \sin 2\varphi} = q \left(e^{\frac{\pi}{k}} - e^{-\frac{\pi}{k}} \right);$$

en posant comme plus haut $\varphi = \lambda i$, λ étant réel, tout est maintenant connu dans les expressions de ξ et η , qui se calculeront sans peine.

M. A. DEMOULIN adresse la Note suivante :

Sur le cylindroïde et sur la théorie des faisceaux de complexes linéaires.

Dans le dernier fascicule du *Bulletin de la Société mathématique de France*, M. P. Appell a établi que le cylindroïde est la seule surface réglée qui jouisse de la propriété suivante : *le lieu des projections orthogonales d'un point pris arbitrairement dans l'espace sur les génératrices est une courbe plane*. Je possède depuis près de deux ans une démonstration analytique de ce théorème et je la fais connaître ci-après. A cette méthode échappent les surfaces réglées à plan directeur isotrope. Une méthode directe me conduit aux surfaces de cette nature qui possèdent la propriété du cylindroïde. Ce sont : 1° une surface (A) qui est, comme le cylindroïde, le lieu des axes centraux des complexes linéaires compris dans une série linéaire à deux termes; 2° une surface (B) qui n'admet pas ce mode de génération. Ainsi se trouve mis en évidence un fait curieux : alors que la propriété du cylindroïde caractérise cette surface parmi les surfaces réglées réelles ou, plus généralement, parmi les surfaces qui n'ont pas un plan directeur isotrope, cette même propriété ne caractérise pas la surface (A), de même définition que le cylindroïde, parmi les surfaces à plan directeur isotrope.

I.

Soit à déterminer la surface réglée la plus générale telle que le

lien des projections d'un point quelconque de l'espace sur ses génératrices soit une courbe plane. Nous considérerons la surface cherchée comme engendrée par l'axe Oz d'un trièdre trirectangle $Oxyz$. Sur chaque génératrice, il y a un point central déterminé et situé à distance finie, à moins toutefois que la surface soit un cylindre ou qu'elle admette un plan directeur isotrope. Les cylindres constituent une solution évidente du problème et il n'y a pas à s'en occuper davantage. Quant aux surfaces à plan directeur isotrope, nous les étudierons au § III. Ces deux cas particuliers écartés, nous achèverons de définir le trièdre $Oxyz$ en plaçant l'origine O au point central de la génératrice et en faisant coïncider le plan xOz avec le plan tangent en O à la surface. Soient $\xi, \eta, \zeta, p, q, r$ les translations et les rotations du trièdre : ce sont des fonctions d'une variable t . La vitesse d'un point de coordonnées relatives x, y, z a pour composantes

$$\begin{aligned} V_x &= \xi + qz - ry - x', \\ V_y &= \eta - rx - pz + y', \\ V_z &= \zeta - py - qx + z' \end{aligned} \quad \left(x' = \frac{dx}{dt}, \dots \right).$$

Le plan tangent à la surface au point de coordonnées $(0, 0, z)$ fait avec le plan xOz un angle θ tel que

$$\tan \theta = \frac{V_y}{V_x} = \frac{\eta - pz}{\xi + qz}.$$

L'hypothèse $z = 0$ doit donner $\theta = 0$, donc $\eta = 0$. L'hypothèse $z = \infty$ doit donner $\theta = \frac{\pi}{2}$, donc $q = 0$. Nous pourrions supposer $p \neq 0$, car l'hypothèse $p = 0$ correspond au cas des cylindres. Observons enfin que le paramètre de distribution h égale $-\frac{\xi}{p}$.

Soient $P(x, y, z)$ un point fixe pris arbitrairement dans l'espace et $H(0, 0, z)$ la projection orthogonale du point P sur Oz .

Nous exprimerons la fixité du point P en égalant à zéro les composantes de sa vitesse, d'où les trois relations

$$(1) \quad \begin{cases} \xi - ry - x' = 0, \\ rx - pz - y' = 0, \\ \zeta - py + z' = 0. \end{cases}$$

La vitesse du point H a pour composantes

$$V_x = \xi, \quad V_y = -p z, \quad V_z = \zeta + z' - p y.$$

Soient A, B, C les projections d'un vecteur unitaire normal au plan de la trajectoire du point H. On a

$$AV_x + BV_y + CV_z = 0$$

ou

$$(2) \quad Ah + Bz + Cy = 0.$$

Par un point fixe de l'espace, menons un segment géométriquement égal au vecteur (A, B, C) et un trièdre parallèle au trièdre Oxyz. Par rapport à ce trièdre, les coordonnées de l'extrémité du segment sont A, B, C et, comme ce point est fixe, on a

$$(3) \quad \begin{cases} -rB + A' = 0, \\ rA - pC + B' = 0, \\ pB + C' = 0. \end{cases}$$

Différentions l'équation (2) en tenant compte des relations (1) et (3), il viendra

$$(4) \quad A(h' - rz) + B(k - 2py) + C(2pz - rx) = 0,$$

pourvu qu'on pose

$$k = rh - \zeta = -\frac{r\xi + p\zeta}{p}.$$

Différentions l'équation (4) à son tour, en tenant compte des mêmes relations (1) et (3),

$$(5) \quad \begin{cases} A(\alpha - r'z + 3pry) + B(\beta - 2p'z - 4p^2z' + 3prx) \\ \quad + C(-3p\zeta + 2p'z - r'x - \sqrt{p^2 + r^2}) = 0. \end{cases}$$

On a posé, pour la simplicité,

$$\begin{aligned} h'' + \zeta r - kr &= \alpha, \\ k' + rh' &= \beta. \end{aligned}$$

L'élimination de A, B, C entre les égalités (2), (4), (5) conduit

à la relation

$$\left. \begin{aligned} h' - h - rz &= r'z + iprv \\ z - h - 2py &= \xi - 2p'y - ip^2z - iprx \\ y - 2pz - rx &= ip\xi + 2p'z - r'x - (ip' + r^2)y \end{aligned} \right\} = 0,$$

qui doit avoir lieu quels que soient x, y, z, t .

Divisons les éléments de chaque colonne par y , puis faisons y infini. Il viendra $p^2r = 0$ et, comme p n'est pas nulle, $r = 0$.

Faisons ensuite $x = y = z = 0$, d'où $p\xi hk = 0$ ou $\xi\xi^2 = 0$. Si $\xi = 0$, Oz reste tangente à une courbe plane, solution évidente. Il faut donc supposer $\xi = 0$.

En résumé, on a jusqu'ici

$$\begin{aligned} q &= 0, & r &= 0, & \eta &= 0, & \xi &= 0, \\ \xi &= 0, & p &= 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, *la surface cherchée est nécessairement un conoïde droit dont la directrice rectiligne est l'axe Ox du trièdre.*

Introduisons ces valeurs des rotations et des translations dans l'équation ci-dessus; il viendra, après quelques réductions,

$$h'' - \frac{p'}{p} + ip^2h = 0.$$

En choisissant convenablement la variable indépendante t , on peut supposer p constant. Si l'on prend p égal à $\frac{1}{2}$, l'équation précédente devient

$$h'' + h = 0,$$

ou, comme $h = z - \frac{\xi}{p}$,

$$\xi'' + \xi = 0.$$

On déduit de là, en intégrant,

$$\xi = A \cos(t - B).$$

Nous allons établir l'équation du conoïde en prenant comme trièdre de référence la position O_1XYZ qu'occupe le trièdre $Oxyz$ à l'instant $t = t - B$.

Soit X l'abscisse du point O . On a

$$X = \int_{\frac{B}{2}}^t \xi dt = X \sin t + B.$$

L'angle des plans zOx et ZO_1X égale $t - \frac{B}{2}$.

Soient X, Y, Z les coordonnées d'un point quelconque de la génératrice Oz et o, o, z ses coordonnées relatives. On a

$$X = X \sin t + B,$$

$$Y = z \sin t + \frac{B}{2},$$

$$Z = z \cos t + \frac{B}{2}.$$

L'élimination de z et de t entre ces trois équations donne l'équation classique du cylindroïde

$$X = \frac{Y^2 + Z^2}{2},$$

ce qui démontre le théorème de M. Appell.

II.

A l'analyse qui précède échappent, nous l'avons vu, les surfaces réglées à plan directeur isotrope. Si l'on veut traiter ce cas par la méthode du trièdre, on pourra faire décrire à l'origine O une trajectoire orthogonale des génératrices et prendre pour plan des xz le plan tangent à la surface à l'origine, d'où les deux conditions $\tau_1 = 0, \zeta = 0$. On aura également, le plan asymptote étant isotrope, $p^2 + q^2 = 0$. Malgré la simplicité de ces relations, on est conduit à des conditions très compliquées desquelles il serait difficile de déduire les valeurs des translations et des rotations. Aussi avons-nous étudié par une méthode directe les surfaces en question. Avant d'exposer cette méthode, nous allons faire voir qu'il existe au moins une surface de cette nature jouissant de la propriété du cylindroïde.

Soient $C = 0, C' = 0$ les équations de deux complexes linéaires: l'équation

$$C = zC' = 0,$$

où ρ désigne un paramètre variable, définit une série simplement infinie de complexes linéaires dont les axes centraux sont parallèles à un même plan. Si ce plan n'est pas isotrope, le lieu des axes centraux est un cylindroïde. Si ce plan est isotrope, le lieu des axes centraux est une certaine surface (A). Pour cette surface comme pour le cylindroïde, le lieu des projections d'un point quelconque de l'espace sur les génératrices sera une courbe plane. Si l'on démontre, en effet, cette propriété pour le cylindroïde, en prenant des axes quelconques, les calculs s'appliqueront également à la surface (A). C'est, au reste, ce que nous allons vérifier par un calcul direct après avoir établi l'équation réduite de la surface (A).

Parmi les complexes de la famille $C + \rho C' = 0$, il y en a deux qui sont spéciaux; supposons que ce soient C et C'. Les axes étant rectangulaires, nous prendrons l'axe central de C pour axe des z et, pour axe des x , une droite rencontrant l'axe central de C'.

Soient $\alpha, \beta, \gamma, p, q, r$ les coordonnées pluckériennes d'une droite quelconque de l'espace; un complexe linéaire étant défini par l'équation

$$A\alpha + B\beta + C\gamma + Pp + Qq + Rr = 0,$$

les coordonnées de son axe central ont pour valeurs

$$\begin{aligned} \alpha &= P, & p &= A - kP, \\ \beta &= Q, & q &= B - kQ, \\ \gamma &= R, & r &= C - kR, \\ k &= \frac{AP - BQ - CR}{P^2 + Q^2 + R^2}. \end{aligned}$$

L'axe central du complexe C' est parallèle à l'un des plans isotropes passant par O, de là résulte la condition $P^2 + Q^2 = 0$; nous prendrons $P = 1, Q = i$. L'axe central rencontrant l'axe des x , une de ses équations se réduit à $\gamma\gamma - z\beta = 0$, donc $p = 0$, et, par suite, $A = 0$. Le complexe C' a donc une équation de la forme

$$B\beta + C\gamma + p - iq - Rr = 0,$$

avec la condition

$$Bi + CR = 0.$$

L'équation du complexe C est $r = 0$, l'équation de la famille de

complexes sera donc

$$B\beta + C\gamma + p + iq = (R + \varphi)r = 0.$$

L'axe central du complexe du paramètre φ a pour coordonnées

$$\begin{aligned} \alpha &= 1, & p &= -\frac{C\varphi}{(R + \varphi)^2}, \\ \beta &= i, & q &= B - \frac{C\varphi i}{(R + \varphi)^2}, \\ \gamma &= R + \varphi, & r &= C - \frac{C\varphi}{R + \varphi}. \end{aligned}$$

On déduit de là les équations de cette droite

$$\begin{aligned} xi - y &= \frac{RC}{R + \varphi}, \\ y(R + \lambda) - zi &= -\frac{C\varphi}{(R + \varphi)^2} \end{aligned}$$

et, par l'élimination de φ entre ces deux équations, l'équation de la surface (A)

$$y = -\frac{(y - ix)zi}{RC} - \frac{(y - ix)^3}{R^2 C^2} - \frac{(y - ix)^2}{R^2 C}.$$

Cette équation est de la forme

$$(A) \quad y = Mz(y - ix) + M^2(y - ix)^3 + N(y - ix)^2,$$

M et N désignant deux constantes *essentiellement différentes de zéro*.

Vérifions que la surface (A) jouit bien de la propriété indiquée.

Les équations d'une génératrice quelconque g de la surface peuvent s'écrire

$$(g) \quad \begin{cases} y - ix = \lambda, \\ y - M\lambda z + M^2\lambda^3 - N\lambda^2. \end{cases}$$

Soient (x_0, y_0, z_0) les coordonnées d'un point P pris arbitrairement dans l'espace.

Le plan mené par le point P, perpendiculairement à la génératrice g , a pour équation

$$M\lambda [(x - x_0) + i(y - y_0)] - i(z - z_0) = 0$$

Le lieu de la projection du point P sur la génératrice g s'obtient en éliminant λ entre cette dernière équation et les équations (2), ce qui donne pour équation du lieu cherché, l'équation (A) et la suivante

$$(1) \quad M(y - ix)[(x - x_0) + i(y - y_0)] + i(z - z_0) = 0.$$

L'élimination de z entre les équations (A) et (1) donne

$$y = Mz_0(y - ix) + Mu_0 = N(y - ix)^2,$$

pourvu qu'on pose $y_0 = ix_0 = u_0$, et si l'on porte dans cette dernière équation la valeur de $(y - ix)^2$, tirée de (1), il viendra

$$(2) \quad y = Mz_0(y - ix) + \frac{M^2u_0 + N}{M} [Mu_0(y - ix) + z - z_0].$$

Cette équation étant linéaire, le théorème est démontré.

On reconnaîtra aisément que le plan π renferme la génératrice qui correspond à la valeur $-\frac{M^2u_0 + N}{M^2}$ du paramètre λ .

III.

Cherchons maintenant toutes les surfaces réglées à plan directeur isotrope qui ont la même propriété que le cylindroïde.

Soient

$$\begin{aligned} y - ix &= \lambda, \\ y &= zf(\lambda) + z_0(\lambda), \end{aligned}$$

les équations d'une génératrice variable de la surface. Les coordonnées de la projection d'un point quelconque (x_0, y_0, z_0) sur cette génératrice ont pour expression

$$\begin{aligned} x - \lambda i &= iz_0f' + iu_0f' + i\psi, \\ y - z_0f' - u_0f^2 &= \psi, \\ z - z_0 - u_0f &= \lambda f, \end{aligned}$$

Pour abréger, on a écrit f et ψ au lieu de $f(\lambda)$ et $\psi(\lambda)$, et l'on a posé $u_0 = y_0 - ix_0$, $\psi = \psi(\lambda)$, $z_0 = \lambda f^2$.

Ces équations doivent définir une courbe plane quel que soient

x_0, y_0, z_0 ; il faut donc et il suffit qu'il y ait une relation linéaire entre x, y, z ou bien entre y, z et $y' = \lambda x$ ou λ . De là cette condition très simple

$$y''z - zy'' = 0$$

qui s'écrit, en tenant compte des valeurs de y et de z ,

$$(1) \quad \begin{vmatrix} 1 - u_0 f'' & \lambda f' - 2f'' - z_0 f' + u_0 (f')^2 & \psi \\ -u_0 f' & \lambda f'' - 3f''' - z_0 f'' - u_0 (f')^2 & \psi' \end{vmatrix} = 0.$$

Si f' est nulle, cette équation est identiquement vérifiée et ψ est arbitraire. La surface correspondante est un cylindre dont les génératrices sont parallèles au plan $y = \lambda x = 0$, solution évidente. Nous pourrions donc supposer $f' \neq 0$.

Divisons les éléments de la seconde colonne du déterminant par z_0 , puis faisons z_0 infini; il viendra

$$(2) \quad 2f'f'' = 3f'''.$$

Divisons ensuite les éléments de chaque colonne par u_0 , puis faisons u_0 infini, nous obtiendrons, toutes réductions faites,

$$3f''' = f'f''.$$

Pour que cette équation soit compatible avec l'équation (1), il faut que $f'' = 0$, c'est-à-dire que f' soit constante. On a donc

$$f'(\lambda) = a\lambda = a.$$

L'équation (1) se réduit alors à $\psi''' = 0$, d'où

$$\psi(\lambda) = b\lambda^2 + b'\lambda + b''$$

et

$$\psi'(\lambda) = \lambda(a\lambda) = a'\lambda^2 + b'\lambda = b',$$

Les équations de la génératrice peuvent donc s'écrire

$$\begin{aligned} y &= \lambda x = \lambda, \\ z &= z_0(a\lambda) = a\lambda = a^2\lambda^2 = m\lambda^2 = m\lambda + m', \end{aligned}$$

On conclut de là l'équation de la surface cherchée

$$\begin{aligned} y &= z \left[a(y' - \lambda x) + a' \right] + a^2(y - \lambda x)^2 \\ &+ m(y' - \lambda x)^2 - m'(y - \lambda x) = 0. \end{aligned}$$

Le changement d'axes coordonnés défini par les équations

$$\lambda x = x' - h, \quad \lambda = y' - h', \quad z = z' - h''$$

permet, par un choix convenable et toujours possible des constantes h, h', h'' , de ramener cette équation à la suivante

$$(S) \quad Y = \alpha Z(Y - iX) + \alpha^2(Y - iX)^3 - (m - 3\alpha\alpha')(Y - iX)^2.$$

Il y a maintenant deux cas à distinguer : 1° si $m - 3\alpha\alpha'$ n'est pas nul, l'équation ci-dessus est de même forme que l'équation (A), et la surface (S) est une surface (A); 2° si $m - 3\alpha\alpha' = 0$, l'équation (S) se réduit à

$$(B) \quad Y = \alpha Z(Y - iX) + \alpha^2(Y - iX)^3.$$

La surface (B) est-elle une surface (A)? En d'autres termes, est-il possible de déterminer les coefficients M et N de manière que les équations (A) et (B) représentent deux surfaces égales? La réponse est négative : en effet, si les deux surfaces étaient égales, elles seraient applicables l'une sur l'autre avec correspondance des asymptotiques; or, nous allons montrer que cette condition nécessaire (et d'ailleurs suffisante) n'est pas vérifiée.

Occupons-nous d'abord de la surface (A) ou plus généralement de la surface (A') définie par l'équation

$$(A') \quad y = M k z(y - ix) + M^2(y - ix)^3 + N(y - ix)^2$$

qui se réduit à l'équation (A) pour $k = 1$.

Si l'on pose $y - ix = \lambda$, l'équation des lignes asymptotiques sera $z = -\frac{3M\lambda^2}{2k} + \mu$, μ désignant une constante arbitraire. On déduit des trois équations ci-dessus les expressions des coordonnées de la surface (A') en fonction des paramètres des asymptotiques et l'on trouve, pour le carré de l'élément linéaire, l'expression

$$ds^2 = \left[2kM\mu + \frac{3M^2\lambda^2}{k^2}(2k^2 + 3) + 2N\lambda - 1 \right] d\lambda^2 \\ + \frac{2M\lambda}{k}(k^2 - 3)d\lambda d\mu + d\mu^2.$$

Pour $k = \pm\sqrt{3}$, le terme en $d\lambda d\mu$ s'évanouit et la surface (A') est minima. Nous retrouvons ainsi la surface minima réglée imaginaire, signalée en premier lieu par Ribaucour, et que nous avons

étudiée ailleurs d'une manière détaillée ⁽¹⁾. La relation entre la surface (A) et cette surface minima est extrêmement simple : deux points correspondants ont mêmes coordonnées x et y , et leurs z sont dans le rapport de $\sqrt{3}$ à 1.

Si l'on fait dans la formule ci-dessus $k = 1$, on aura le ds^2 de la surface (A)

$$ds^2 = (2M\mu - 15M^2\lambda^2 + 2N\lambda - 1)d\lambda^2 - 4M\lambda d\lambda d\mu + d\mu^2.$$

Quant au carré de l'élément linéaire de la surface (B), il est donné par la formule

$$ds'^2 = (2a\mu' - 15a^2\lambda'^2 - 1)d\lambda'^2 - 4a\lambda' d\lambda' d\mu' + d\mu'^2.$$

Pour que ces deux surfaces fussent applicables l'une sur l'autre avec correspondance des asymptotiques, il faudrait que l'on eût

$$dz^2 = ds'^2$$

pour toutes les valeurs de λ , μ , $d\lambda$, $d\mu$, les paramètres λ' et μ' étant respectivement fonctions de λ et de μ seulement. Or, on reconnaîtra aisément que cette identité est impossible. La surface (B) n'est donc, en aucun cas, une surface (A) et nous pouvons énoncer ce théorème :

Il y a deux surfaces réglées à plan directeur isotrope qui jouissent de la propriété du cylindroïde : la surface (A) et la surface (B).

Cette dernière n'est pas, comme la surface (A) et le cylindroïde, le lieu des axes centraux des complexes linéaires définis par une équation de la forme $C + \varphi C' = 0$. Autrement dit, la propriété qui caractérise le cylindroïde parmi les surfaces réglées qui n'ont pas de plan directeur isotrope, ne caractérise pas la surface (A) parmi celles qui ont un plan directeur isotrope.

La surface (B) est, comme la surface (A), une transformée ho-

⁽¹⁾ A. DEMOULIN. *Sur les surfaces minima réglées et les surfaces minima à lignes de courbure planes*. Mémoires, n° 8, de l'Académie royale et Belge, t. LVIII: 1899.

mographique d'une surface minima réglée de Ribaucour. Or deux surfaces minima de Ribaucour sont nécessairement semblables. Concluons de là que les surfaces (A) et (B) se correspondent dans une homographie.

Observons enfin que, pour $M = \alpha$, les surfaces (A) et (B) sont applicables l'une sur l'autre : c'est ce qu'on reconnaîtra en exprimant leurs ds^2 en fonction des paramètres des génératrices et de leurs trajectoires orthogonales.

M. HADAMARD adresse la Note suivante :

Sur la propagation des ondes.

On sait que Hugoniot a, le premier, défini avec précision ce que l'on doit entendre par *propagation d'un mouvement dans un autre*. Il a appliqué sa méthode aux équations de l'Hydrodynamique et a retrouvé, sous ce nouveau point de vue, la formule classique donnant la vitesse des ondes dans les gaz; d'autre part, il a indiqué les conditions de compatibilité de deux mouvements gazeux, mais dans le cas du mouvement rectiligne seulement.

Non seulement il y a lieu d'étendre la définition et l'étude de la compatibilité au mouvement à trois dimensions, mais, d'une manière plus générale, la méthode d'Hugoniot demandait à être complétée sur deux points importants, dont le premier est l'interprétation géométrique et le second, la distinction, nécessaire ici comme en toute autre question de Mécanique, entre les faits d'ordre proprement dynamique, ayant leur source dans les propriétés propres aux fluides, et les faits d'origine purement cinématique.

Dans le Cours que j'ai professé au Collège de France en 1898-1899 et 1899-1900, j'ai été amené à étudier cette question. J'indiquerai ici sommairement les conclusions auxquelles je suis parvenu.

1. Soit un milieu déformable, divisé en deux régions 1 et 2 par une surface qui occupe, à l'instant t_0 , la position S. Nous supposons : 1° que, dans chacune des régions 1 et 2, les coordonnées x, y, z sont des fonctions continues, tant des coordonnées

initiales a, b, c que du temps t , et qu'il en est de même de leurs dérivées jusqu'à un ordre déterminé n ; 2° que, au contraire, lorsqu'on traverse S, l'une au moins des dérivées d'ordre n éprouve une variation brusque, toutes les dérivées d'ordre inférieur à n restant d'ailleurs continues.

Nous considérons comme ordre d'une dérivée quelconque l'ordre *total* de dérivation par rapport à a, b, c et t indistinctement. Nous nommerons, par exemple, dérivées du second ordre les dérivées des trois catégories suivantes :

1° Dérivées du second ordre par rapport à a, b, c ;

2° Dérivées du premier ordre par rapport à a, b ou c et du premier ordre par rapport à t ;

3° Dérivées du second ordre par rapport à t

(la première catégorie comprenant 18 dérivées, la seconde 9, la troisième 3 seulement, qui ne sont autres que les composantes de l'accélération). D'une manière générale, les dérivées d'ordre n se distribueront en $n + 1$ catégories analogues aux précédentes.

Cela posé, il est aisé de voir que, en toute hypothèse, les variations brusques qu'éprouvent les dérivées d'ordre n lorsqu'on traverse la surface S ont entre elles des relations qui permettent de les exprimer toutes par le moyen de $n + 1$ vecteurs seulement. Si, pour simplifier l'écriture, nous nous bornons au cas de $n = 2$, un premier vecteur (λ, μ, ν) fera connaître les variations brusques des dérivées appartenant à la première des trois catégories distinguées plus haut, et cela par le moyen des formules que l'on déduira des identités (par rapport à A, B, C)

$$\left[A \left(\frac{\partial}{\partial a} \right) + B \left(\frac{\partial}{\partial b} \right) + C \left(\frac{\partial}{\partial c} \right) \right]^2 x = \lambda + A \alpha + B \beta + C \gamma,$$

$$\left[A \left(\frac{\partial}{\partial a} \right) + B \left(\frac{\partial}{\partial b} \right) + C \left(\frac{\partial}{\partial c} \right) \right]^2 y = \mu + A \alpha + B \beta + C \gamma,$$

$$\left[A \left(\frac{\partial}{\partial a} \right) + B \left(\frac{\partial}{\partial b} \right) + C \left(\frac{\partial}{\partial c} \right) \right]^2 z = \nu + A \alpha + B \beta + C \gamma,$$

où α, β, γ sont les cosinus directeurs de la normale à S au point considéré; (M) désignant, pour abréger, la variation brusque éprouvée par la quantité quelconque M, à la traversée de S.

Le second vecteur λ_1, μ_1, ν_1 fera connaître les dérivées de la

seconde catégorie, par les formules déduites des identités

$$\left[A \left(\frac{\partial^2}{\partial a \partial t} \right) + B \left(\frac{\partial^2}{\partial b \partial t} \right) + C \left(\frac{\partial^2}{\partial c \partial t} \right) \right] x = \lambda_1 (Ax + B\beta + C\gamma),$$

$$\left[A \left(\frac{\partial^2}{\partial a \partial t} \right) + B \left(\frac{\partial^2}{\partial b \partial t} \right) + C \left(\frac{\partial^2}{\partial c \partial t} \right) \right] y = \mu_1 (Ax + B\beta + C\gamma),$$

$$\left[A \left(\frac{\partial^2}{\partial a \partial t} \right) + B \left(\frac{\partial^2}{\partial b \partial t} \right) + C \left(\frac{\partial^2}{\partial c \partial t} \right) \right] z = \nu_1 (Ax + B\beta + C\gamma).$$

Enfin le troisième vecteur $(\lambda_2, \mu_2, \nu_2)$ n'est autre que la variation brusque de l'accélération.

2. Il semble, au premier abord, que ces relations sont les seules qu'il y ait lieu d'écrire : elles sont, en effet, suffisantes pour que, à l'instant t_0 , il existe une discontinuité de la nature indiquée en chaque point S. Mais si d'autres relations ne sont pas vérifiées, la nature du phénomène sera assez profondément modifiée avant et après l'instant t_0 . Si, en effet, les trois vecteurs précédents ont des composantes arbitraires, il est cinématiquement impossible de concevoir aucun mouvement dans lequel, aux instants $t_0 \pm \varepsilon$ existe, comme à l'instant t_0 , une discontinuité du second ordre suivant une surface *unique* (voisine de S). Il faut tout au moins supposer (c'est l'hypothèse la plus simple) que la surface S engendre deux feuilletts (au moins) de discontinuité, réunis seulement à l'instant t_0 et séparés, avant et après, par toute une région intermédiaire 3 dans laquelle règne un troisième mouvement, en discontinuité du second ordre avec chacun des deux premiers.

Pour que les mouvements 1 et 2 soient *cinématiquement compatibles*, c'est-à-dire pour que la surface de discontinuité puisse rester unique, il faut donc des conditions nouvelles. Ces conditions s'énoncent ainsi :

Les trois vecteurs (λ, μ, ν) , $(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$, $(\lambda_2, \mu_2, \nu_2)$ sont de même direction et en progression géométrique.

La raison de cette progression donne d'ailleurs la vitesse de propagation.

Pendant la durée d'un mouvement déterminé quelconque, on

doit considérer la compatibilité comme le cas général; on peut alors parler de la *direction* d'une discontinuité : cette direction est (si la discontinuité est du second ordre) la direction commune des trois vecteurs (λ, μ, ν) , $(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$, $(\lambda_2, \mu_2, \nu_2)$.

3. Signalons quelques conséquences des principes précédents.

Puisqu'on a défini la direction d'une discontinuité, on peut considérer, en particulier, des discontinuités purement *longitudinales*, dans lesquelles la direction de la discontinuité est, en chaque point, perpendiculaire à celle du plan tangent à la surface S; et des discontinuités purement *transversales*, dans lesquelles ces deux directions sont parallèles entre elles.

Or on sait que, dans la théorie des vibrations, on est obligé de renoncer à la définition primitive des mouvements longitudinaux et transversaux lorsqu'on sort du cas des ondes planes ou sphériques, pour en adopter une autre fondée sur la densité ou la rotation moléculaire. Cette nécessité disparaît lorsqu'on se place au point de vue d'Hugoniot, complété comme nous venons de l'indiquer. Les deux définitions n'en font d'ailleurs plus qu'une : en effet, on constate que les variations brusques des dérivées de la densité dépendent de la composante normale de la discontinuité, tandis que les variations du tourbillon et de ses dérivées dépendent de la composante tangentielle.

4. A cette remarque s'en rattache une autre d'un certain intérêt théorique.

Les discontinuités dont nous venons de parler s'introduisent nécessairement dans la mise en équation des problèmes d'Hydrodynamique des gaz : il est impossible, en effet, sans leur concours, de faire cadrer les équations du mouvement interne avec les équations aux parois.

On peut se demander si la présence de ces discontinuités ne compromettrait pas la validité des propositions bien connues relatives au potentiel des vitesses ou aux tourbillons. Il n'en est rien : s'il y a compatibilité, les discontinuités hydrodynamiques sont toujours normales et il en résulte, ainsi que nous venons de le dire, qu'elles n'influent pas sur la rotation moléculaire ⁽¹⁾.

(1) La nécessité du raisonnement que nous venons d'indiquer apparaît claire-

5. Supposons maintenant qu'au sein d'un fluide on considère deux mouvements contigus avec discontinuité et non compatibles entre eux. Les équations précédemment écrites permettent d'étudier le mouvement ou les mouvements intermédiaires qui prendront naissance.

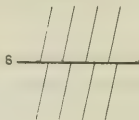
Prenons d'abord le cas d'un liquide. Alors, en vertu du n° 3, les trois vecteurs caractéristiques de la discontinuité (dont deux seulement seront donnés, puisque l'accélération se calcule par les

Fig. 1.



équations générales de l'Hydrodynamique) seront tangentiels. Le premier (le vecteur λ, μ, ν) influera directement sur l'accélération : il produira, s'il n'est pas nul, un glissement (au sens vulgaire du mot) des deux couches liquides l'une sur l'autre, de sorte que des lignes tracées à la fois dans les deux couches et à l'instant t_0 , comme l'indique la *fig. 1*, auront à l'instant $t_0 + \varepsilon$ l'aspect représenté *fig. 2*.

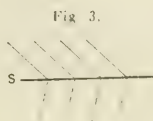
Fig. 2.



Le second vecteur (λ_1, μ_1, ν_1) n'influera pas sur l'accélération des points situés sur la surface de discontinuité : il produira un glissement (au sens que ce mot a en théorie de l'élasticité) de

ment lorsqu'on se rapporte à un cas un peu différent, lequel paraît d'ailleurs très intéressant et sur lequel j'espère avoir l'occasion de revenir : je veux parler des *liquides à frottement*. On sait que, pour de tels liquides, le théorème sur le potentiel des vitesses cesse de s'appliquer. Cette circonstance est uniquement due aux singularités du mouvement : tant que, dans une région déterminée, celui-ci reste analytique, le théorème dont nous parlons conserve sa validité.

chaque couche sur elle-même, ces glissements étant différents entre eux : autrement dit, les lignes qui avaient à l'instant t_0 l'aspect de la *fig. 1* prendront, à l'instant $t_0 + \varepsilon$, celui qui est représenté *fig. 3*. C'est ce qui se produit, par exemple, dans les



mouvements bien connus où le tourbillon est discontinu.

Bien entendu, il y aura, dans cas le plus général, superposition des deux effets.

6. Si maintenant nous passons au cas d'un gaz, nous pourrions commencer par considérer l'hypothèse où les deux vecteurs caractéristiques sont normaux. Si leur rapport a la valeur bien connue $\pm \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$, il y aura compatibilité, et l'onde se propagera suivant la loi classique. On observera qu'il n'y a aucune ambiguïté sur le sens de cette propagation [puisque le signe du radical résulte de la connaissance des deux vecteurs (λ, μ, ν) et $(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$] : ce qui ne ressortait pas des développements d'Hugoniot ⁽¹⁾.

Si le rapport $\frac{\lambda_1}{\lambda}$ n'a pas la valeur $\pm \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$, la discontinuité se divisera en deux, qui se propageront, en sens inverse l'une de l'autre, avec la même vitesse $\sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$. La valeur de l'accélération dans la tranche intermédiaire qui prendra naissance sera, bien entendu, différente des valeurs que prendra cette grandeur dans les deux mouvements donnés : on saura d'ailleurs calculer cette valeur nouvelle.

Supposons enfin que la discontinuité donnée ait des composantes tangentielle. Il y aura alors superposition du phénomène que nous venons d'indiquer avec celui dont nous avons parlé dans

⁽¹⁾ Voir DUREM, *Hydrodynamique, Élasticité, Acoustique*, t. I, p. 661.

le cas des liquides; de sorte que l'on trouvera, dans le cas le plus général, quatre mouvements séparés par trois surfaces de discontinuité dont deux seront mobiles et une fixe.

7. La méthode d'Hugoniot s'applique aux ondes qui peuvent se produire dans les solides élastiques, et cela non seulement dans le cas des déformations infiniment petites, mais aussi dans celui des déformations finies tel que l'ont traité MM. Boussinesq et Brillouin. Il est intéressant de comparer les conclusions auxquelles on parvient dans les deux cas.

Dans l'hypothèse des déformations finies comme dans celle des déformations infiniment petites, à une direction d'onde déterminée correspondent trois directions de discontinuité différentes que cette onde est susceptible de propager, et ces trois directions sont rectangulaires entre elles *dans le milieu déformé* : ce sont les directions d'axes d'une certaine quadrique E, dont l'équation dépend de la direction d'onde.

Si l'équilibre interne du solide (sous l'influence des forces données et des forces d'inertie) est stable, la quadrique E sera toujours un ellipsoïde réel, ce qui est nécessaire pour que les vitesses de propagation soient réelles. Le calcul qui établit cette proposition fournit une interprétation simple de l'ellipsoïde E (autrement dit, de l'ellipsoïde de polarisation dans le cas des mouvements infiniment petits). Le premier membre de son équation n'est autre que le travail interne correspondant à une certaine déformation immédiatement liée à une direction de discontinuité arbitrairement donnée.

8. Jusqu'ici, les résultats sont les mêmes, qu'il s'agisse de déformations infiniment petites ou finies. Au contraire, la proposition d'après laquelle, dans un milieu isotrope, les discontinuités correspondant à une direction d'onde donnée sont, les unes exclusivement longitudinales, les autres exclusivement transversales, est particulière aux déformations infiniment petites.

Si, en effet, on cherche les conditions pour qu'un axe de l'ellipsoïde E soit toujours normal à l'onde, on constate que la fonction W qui représente l'énergie de déformation rapportée à l'unité

de masse, doit avoir la forme

$$W = F(D) + \sum_{i=1}^3 a_i (\gamma_i^2 - \{ \varepsilon_i \varepsilon_i \}) + \sum_l b_l (\gamma_l \gamma_l - \varepsilon_l \gamma_l)$$

(à une partie linéaire près), où $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ désignent, comme dans le travail de MM. E. et Fr. Cosserat (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, t. X) les composantes de la déformation, i, k, l étant une permutation des indices 1, 2, 3; D , la densité. F est une fonction arbitraire, mais les a et les b sont des constantes.

Or l'isotropie du solide se caractérise par ce fait que W est une fonction de D et des quantités

$$A = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \quad B = \sum_l (\gamma_l^2 - \{ \varepsilon_l \varepsilon_l \}).$$

On voit que cette condition n'entraîne pas la précédente, laquelle exige que W soit linéaire par rapport à A, A^2 et B . La séparation des mouvements longitudinaux et transversaux est donc exceptionnelle lorsqu'on sort du cas des déformations infiniment petites.

9. Les résultats d'Hugoniot ne sont que l'interprétation mécanique de ceux auxquels conduit la théorie des caractéristiques pour les équations aux dérivées partielles à plus de deux variables indépendantes ⁽¹⁾. Toutefois, pour adapter cette théorie à la Mécanique, il est nécessaire de l'étendre aux systèmes d'équations. Le cas d'un système de trois équations à trois fonctions inconnues, par exemple, est, comme on sait, essentiellement distinct en général de celui d'une seule équation à une seule inconnue. L'étude des caractéristiques, lesquelles sont définies en égalant à zéro un certain déterminant Δ , s'y fait toutefois d'une façon analogue en général à ce qui se passe pour le cas d'une seule équation; mais cette analogie n'est pas absolue, en ce sens que (si l'on suppose, pour fixer les idées, les équations du second ordre) elle ne commence qu'au calcul des dérivées du troisième ordre.

⁽¹⁾ Ce fait, dont j'ai développé les conséquences au Collège de France dans les premiers mois de l'année 1900, a été constaté, d'autre part, indépendamment par M. Coulon (*Comptes rendus*, 17 avril 1900).

Le calcul des dérivées du second ordre impose bien certaines conditions restrictives aux dérivées premières, mais ces conditions laissent complètement arbitraires les dérivées de deux des fonctions inconnues et ne jouissent nullement (du moins si l'on n'effectue pas un changement d'inconnues convenables) des mêmes propriétés que les conditions analogues relatives au cas d'une seule équation ou aux dérivées d'ordre supérieur. Aussi la théorie des ondes de choc ne présente-t-elle pas une analogie complète avec celle des ondes d'accélération et n'est-elle pas, comme cette dernière, complètement dépendante de la théorie des caractéristiques.

Les conclusions dont nous venons de parler sont celles que l'on obtient dans le cas général où les caractéristiques annulent le déterminant Δ sans annuler tous les mineurs. Il est des problèmes importants, tels que celui des vibrations transversales des corps isotropes, dans lesquels les caractéristiques, *tout en conservant le même degré de généralité que dans le cas général*, annulent à la fois Δ et tous ses mineurs. Les conclusions, dans ce cas, ne sont d'ailleurs pas notablement modifiées. Mais il n'en est pas de même dans l'hypothèse intermédiaire où certaines caractéristiques, à l'exclusion des autres, annulent tous les mineurs de Δ . Cette hypothèse est réalisée dans le phénomène de la réfraction conique, lequel mériterait d'être étudié à ce point de vue.

10. A ces restrictions près, la théorie pour les systèmes de n équations à n inconnues se développe d'une manière analogue à celle qui est relative au cas de $n = 1$. On a, en particulier, à considérer des lignes correspondant à celles que Beudon a découvertes ⁽¹⁾ et qu'on peut appeler les *bicaractéristiques*, ou encore les *rayons*. Cette dernière dénomination aurait l'avantage de rappeler l'une des propriétés les plus importantes de ces lignes, au point de vue du physicien. Si, en effet, les caractéristiques correspondent aux *ondes* sonores ou lumineuses, les bicaractéristiques correspondent aux *rayons* sonores ou lumineux. On peut, dans une certaine mesure, prévoir l'importance

(¹) Ce Bulletin, tome XXV, pages 108 et suiv.; 1897.

du rôle physique dévolu aux lignes en question par la proposition suivante :

Un ébranlement étant, à l'instant t_0 , limité à une certaine région de l'espace, soit P un point extérieur à cette région, et qui est atteint par l'onde à l'instant $t_0 + T$. Le mouvement produit, à cet instant, au point P, ne dépend que du mouvement qu'avait, à l'instant t_0 , le point de la surface d'onde primitive situé sur la même bicaractéristique que P.

11. Bendon ⁽¹⁾ a également démontré la proposition suivante, généralisation d'un théorème de M. Goursat :

Étant donnée une équation aux dérivées partielles du second ordre analytique aux variables indépendantes $x_1, x_2, \dots, x_n$, telle que $x_{n=0}$ et $x_{n-1} = 0$ soient des caractéristiques (ou même simplement soient tangentes à des caractéristiques en un de leurs points communs), il existe une solution holomorphe qui prend des valeurs données (lesquelles sont supposées fonctions holomorphes des variables dont elles dépendent) sur chacune de ces multiplicités $x_n = 0, x_{n-1} = 0$.

Cette proposition a également son importance au point de vue de l'étude des ondes.

Nous avons vu, en effet, que, lorsque deux mouvements contigus avec discontinuité (celle-ci étant supposée normale pour fixer les idées) ne sont pas compatibles, il naît entre eux un mouvement intermédiaire dont on peut aisément indiquer l'accélération initiale. Or, si l'on veut les équations complètes de ce mouvement intermédiaire, et qu'il y ait potentiel des vitesses (de manière qu'on n'ait qu'une seule équation à considérer), on est ramené précisément au problème qui fait l'objet de la proposition rappelée tout à l'heure.

La proposition analogue dans le cas des systèmes s'énonce ainsi :

Si un système de trois équations du second ordre définissant les inconnues u, v, w en fonction des variables indépendantes

(1) *Loc. cit.*, pages 110-114.

$x_1, x_2, \dots, x_n$ ne contient pas $\frac{\partial^2 w}{\partial x_n^2}$ et est résoluble par rapport à $\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial x_n^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x_n \partial x_{n-1}}$, il existe (sous les conditions de régularité habituelles) une solution telle que $u, v, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial v}{\partial x_n}, w$ prennent des valeurs données pour $x_n = 0$ et que, en outre, w prenne des valeurs également données pour $x_{n-1} = 0$.

Autrement dit :

Un système de trois équations du second ordre à trois fonctions inconnues étant donné, ainsi que deux multiplicités, l'une caractéristique, l'autre quelconque ⁽¹⁾, sécantes entre elles, on peut opérer un changement de fonctions inconnues tel que la solution soit déterminée par les valeurs de deux des nouvelles inconnues et de leurs dérivées premières sur la multiplicité caractéristique, jointes aux valeurs de la troisième inconnue sur la seconde multiplicité (toutes ces données étant supposées analytiques et régulières).

Cette proposition démontre, en particulier, l'existence de la solution pour le problème suivant :

Trouver le mouvement produit, dans une masse gazeuse animée initialement d'un mouvement analytique donné, par un mouvement analytique donné des parois.

Par contre, il ne faudrait pas croire que la question se présente aussi simplement pour le mouvement intermédiaire entre deux mouvements non compatibles donnés, dans le cas où il n'existe pas de potentiel des vitesses. Dans ce cas, pour qu'il n'y ait qu'un mouvement intermédiaire (en Hydrodynamique, pour qu'il ne se produise pas de glissements analogues à ceux dont nous avons parlé au n° 5), il faut une série de conditions nouvelles introduites par les éléments infinitésimaux d'ordre supérieur.

(¹) La restriction d'après laquelle la seconde multiplicité devrait être caractéristique est inutile, ainsi qu'il est connu dans le cas de $n = 2$.

MÉMOIRES.

SUR LES SURFACES DE TRANSLATION ET LES FONCTIONS ABÉLIENNES:

Par M. H. POINCARÉ.

M. Lie, dans une série de Notes (*Archiv for Matematik og Naturvidenskab*, vol. 7; *Comptes rendus*; 1892; *Berichte der K. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften*; 1896), a montré qu'une surface (ou une variété de l'espace à plus de trois dimensions) ne peut être doublement de translation que si elle est engendrée d'une certaine manière par un système de fonctions abéliennes ou par leurs dégénérescences.

La démonstration de Lie repose sur la considération de certaines équations aux dérivées partielles.

Dans un Mémoire publié au *Journal de Liouville* (1895), j'ai été conduit moi-même à aborder le même problème par une voie toute différente.

Depuis, en réfléchissant à cette question, j'ai trouvé un troisième chemin qui peut conduire au but; le théorème fondamental se trouve démontré d'une façon pour ainsi dire intuitive et sans qu'on ait à faire intervenir des équations aux dérivées partielles de Lie.

Malheureusement, la démonstration de ce théorème n'est pas tout et elle devrait être suivie d'une longue discussion à cause du très grand nombre de cas particuliers que l'on est forcé de distinguer. Je ne les ai pas tous traités; je me suis borné à parler de ceux sur lesquels j'avais à dire quelque chose de nouveau. Pour les autres, qui sont d'ailleurs très particuliers, je n'aurais pu que renvoyer aux travaux de Lie.

I. — THÉORÈME FONDAMENTAL.

Supposons qu'une surface soit doublement de translation. Comme elle est de translation, ses équations pourront se mettre

sous la forme

$$(1) \quad \begin{cases} x = f_1(t_1) + f_2(t_2), \\ y = \varphi_1(t_1) + \varphi_2(t_2), \\ z = \psi_1(t_1) + \psi_2(t_2), \end{cases}$$

où t_1 et t_2 sont deux variables indépendantes; et comme elle est doublement de translation, cela pourra se faire de deux manières, de sorte qu'on aura, outre les équations (1), les équations

$$(1 \text{ bis}) \quad \begin{cases} x = f_3(t_3) + f_4(t_4), \\ y = \varphi_3(t_3) + \varphi_4(t_4), \\ z = \psi_3(t_3) + \psi_4(t_4), \end{cases}$$

t_3 et t_4 étant deux autres variables.

Posons

$$\begin{aligned} f_1(t_1) &= u_1, & f_2(t_2) &= u_2, & f_3(t_3) &= -u_3, & f_4(t_4) &= -u_4, \\ \varphi_1(t_1) &= v_1, & \varphi_2(t_2) &= v_2, & \varphi_3(t_3) &= -v_3, & \varphi_4(t_4) &= -v_4, \\ \psi_1(t_1) &= w_1, & \psi_2(t_2) &= w_2, & \psi_3(t_3) &= -w_3, & \psi_4(t_4) &= -w_4. \end{aligned}$$

En rapprochant les équations (1) et (1 bis), nous aurons

$$(2) \quad \begin{cases} u_1 - u_3 + u_3 - u_4 = 0, \\ v_1 - v_2 + v_3 - v_4 = 0, \\ w_1 + w_2 + w_3 + w_4 = 0. \end{cases}$$

Ces relations doivent avoir lieu quelles que soient les variables t_1 et t_2 , les deux autres variables t_3 et t_4 étant précisément définies en fonctions de t_1 et de t_2 par ces relations (2).

Considérons les trois dérivées $f'_1(t_1)$, $\varphi'_1(t_1)$, $\psi'_1(t_1)$ des trois fonctions f_1 , φ_1 et ψ_1 et regardons-les comme les coordonnées homogènes d'un point M_1 dans un plan.

Définissons de même le point M_i dont les coordonnées homogènes seront

$$f'_i(t_i), \quad \varphi'_i(t_i), \quad \psi'_i(t_i) \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Nous aurons ainsi quatre points M_1, M_2, M_3, M_4 . Chacun de ces points décrira une courbe plane. J'appellerai C_i la courbe décrite par le point M_i .

Nous pouvons dire également que les coordonnées homogènes de M_i sont

$$du_i = f'_i(t_i) dt_i, \quad dv_i = \varphi'_i(t_i) dt_i, \quad dw_i = \psi'_i(t_i) dt_i \quad (i = 1, 2).$$

ou

$$du_i = -f'_i(t_i) dt_i, \quad dv_i = -\varphi'_i(t_i) dt_i, \quad dw_i = -\psi'_i(t_i) dt_i \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Faisons d'abord varier t_1 en laissant t_2 constant, de telle sorte que

$$dt_2 = du_2 = dv_2 = dw_2 = 0;$$

la différentiation des équations (2) nous donnera

$$(3) \quad \begin{cases} du_1 - du_3 - du_4 = 0, \\ dv_1 - dv_3 - dv_4 = 0, \\ dw_1 - dw_3 - dw_4 = 0. \end{cases}$$

Faisons ensuite varier t_2 en laissant t_1 constant, de telle sorte que

$$dt_1 = du_1 = dv_1 = dw_1 = 0;$$

la différentiation des équations (2) nous donnera

$$(3 \text{ bis}) \quad \begin{cases} du_2 + du_3 - du_4 = 0, \\ dv_2 + dv_3 - dv_4 = 0, \\ dw_2 + dw_3 - dw_4 = 0. \end{cases}$$

Les équations (3) signifient que les trois points M_1, M_3, M_4 sont en ligne droite et les équations (3 bis) que les trois points M_2, M_3, M_4 sont en ligne droite. Les quatre points M_1, M_2, M_3, M_4 sont donc en ligne droite.

La droite $M_1 M_2 M_3 M_4$ est une ligne droite quelconque du plan; en effet, les variables t_1 et t_2 étant indépendantes, le point M_1 est un point quelconque de C_1 et le point M_2 un point quelconque de C_2 . En joignant un point quelconque de C_1 et un point quelconque de C_2 , on obtient évidemment une droite quelconque du plan.

Supposons que nous fassions varier cette droite d'une manière continue; les quatre points M_1, M_2, M_3, M_4 varieront également d'une manière continue. Supposons maintenant qu'au bout d'un certain temps cette droite mobile soit revenue à sa position initiale; on peut se demander si les quatre points M_i reviendront également à leur position initiale.

Ce que je me propose de démontrer, c'est que, quand la droite mobile revient à sa position initiale, l'ensemble des quatre points

n'a pas changé; ces points ont pu seulement s'échanger entre eux.

J'en déduirai que l'ensemble des courbes C_1, C_2, C_3, C_4 forme une courbe plane algébrique du quatrième ordre. Dans certains cas particuliers, cette courbe peut se décomposer, de telle façon que plusieurs des courbes C_i peuvent être distinctes. Mais, en général, la courbe du quatrième degré est indécomposable, de sorte que les quatre courbes sont le prolongement analytique l'une de l'autre.

Pour établir ces différents points, j'envisage d'abord une tangente T à la courbe C_1 . Je suppose qu'il s'agisse d'une tangente ordinaire et non d'une tangente d'inflexion. Je suppose que la droite $M_1 M_2 M_3 M_4$ que j'appelle D soit d'abord très voisine de T , qu'on la fasse varier d'une manière continue de façon qu'elle reste toujours très peu différente de T et qu'elle revienne finalement à sa position initiale *après avoir tourné autour de* T .

Dans ces conditions, le point M_1 est d'abord très voisin du point de contact de T et de C_1 , il reste ensuite très voisin de ce point de contact; mais, quand la droite D revient à sa position initiale, le point M_1 ne revient pas à sa position initiale; il s'est échangé avec un autre point d'intersection M'_1 de la droite D et de la courbe C_1 .

Soient de même M'_2, M'_3, M'_4 ce que deviennent les points d'intersection de D avec C_2, C_3 et C_4 quand la droite D , après avoir tourné autour de T , revient à sa position initiale. Ces points M'_2, M'_3, M'_4 peuvent différer des positions initiales M_2, M_3, M_4 de ces points d'intersection ou se confondre avec elles.

Soient u'_i, v'_i, w'_i les valeurs de $\pm f_i(t_i), \mp \varphi_i(t_i), \pm \psi_i(t_i)$ correspondant au point M'_i (on prend le signe $+$ pour $i = 1, 2$, et le signe $-$ pour $i = 3, 4$); on a alors les relations

$$(2 \text{ bis}) \quad \begin{cases} u'_1 + u'_2 + u'_3 + u'_4 = 0, \\ v'_1 + v'_2 + v'_3 + v'_4 = 0, \\ w'_1 - w'_2 + w'_3 + w'_4 = 0. \end{cases}$$

Le point M'_1 différant du point M_1 , on ne saurait avoir

$$u_1 = u'_1, \quad v_1 = v'_1, \quad w_1 = w'_1.$$

On aura donc, par exemple,

$$u'_1 = u_1.$$

Dans ces conditions, on ne saurait avoir à la fois

$$u_2 = u'_2, \quad u_3 = u'_3, \quad u_4 = u'_4,$$

sans quoi il y aurait incompatibilité entre la première relation (2) et la première relation (2 bis). Il faut donc que l'un au moins des points M'_2, M'_3, M'_4 diffère du point correspondant M_2, M_3 ou M_4 .

Il faut donc que, par exemple, le point M_2 se soit échangé avec un autre point d'intersection M'_2 de la courbe C_2 et de la droite D quand cette droite D a tourné autour de T.

Il est clair qu'il n'en serait pas ainsi si la droite T coupait la courbe C_2 en un point ordinaire (très voisin de M_2) et sans le toucher.

D'où cette conclusion : la droite T doit être tangente à l'une des courbes C_2, C_3, C_4 ou passer par l'un des points singuliers de ces courbes.

Ce raisonnement s'applique à toutes les tangentes de la courbe C_1 ; or, il est clair que toutes ces tangentes ne peuvent pas passer par un des points singuliers de C_2, C_3 ou C_4 ou toucher en deux points différents, outre la courbe C_1 , une autre des courbes C_2, C_3 et C_4 .

Si une tangente T de C_1 passe par un point singulier de C_2, C_3 ou C_4 , il est clair que la tangente infiniment voisine ne passera pas par ce point. Si une droite T touche C_1 et C_2 en deux points P_1 et P_2 différents, il est clair que la tangente de C_1 dont le point de contact est infiniment voisin de P_1 ne touchera pas C_2 .

Il faut donc que le point de contact d'une tangente quelconque T de C_1 se confonde avec le point de contact de cette même tangente avec une autre de trois courbes C_2, C_3 et C_4 ; il faut donc que deux au moins des quatre courbes, C_1 et C_2 par exemple, se confondent ou plutôt soient le prolongement analytique l'une de l'autre.

Que se passera-t-il alors si la droite D tourne autour de la tangente T qui touche les deux courbes C_1 et C_2 (qui se prolongent analytiquement l'une l'autre) en un certain point P? Dans la posi-

tion initiale, les deux points M_1 et M_2 seront très voisins l'un de l'autre et très voisins du point P . Quand la droite D aura décrit un tour complet, les deux points d'intersection M_1 et M_2 se seront échangés, les points M_3 et M_4 étant d'ailleurs revenus à leurs positions initiales.

L'ensemble des quatre points M_1, M_2, M_3, M_4 n'aura pas varié.

Ce raisonnement, toutefois, demande à être complété. Car l'échange entre plusieurs points d'intersection de la droite D et de la courbe C_1 pourrait se faire aussi quand la droite D , au lieu de tourner autour d'une tangente ordinaire de la courbe C_1 , tournerait autour d'une tangente singulière, par exemple d'une tangente d'inflexion, ou autour d'une droite passant par un point singulier de C_1 .

Pour ne pas avoir à répéter notre raisonnement pour chacun de ces cas, j'emploierai l'artifice suivant. J'envisage une position particulière D_0 de la droite D et les positions correspondantes $M_1^0, M_2^0, M_3^0, M_4^0$ des quatre points M_1, M_2, M_3, M_4 .

Supposons que la droite D_0 vienne couper la courbe C_1 en un point M'_1 autre que le point M_1^0 . Soient P_1 et Q_1 deux points de la courbe C_1 très voisins de M'_1 ; nous pouvons toujours supposer que la tangente en Q_1 est une tangente ordinaire. Soit T cette tangente en Q_1 ; les points P_1 et M_1^0 appartenant tous deux à la courbe C_1 et étant très voisins de Q_1 , la droite $M_1^0 P_1$ différera très peu de T .

Considérons maintenant une suite continue de points M''_1 tous situés sur la courbe C_1 et allant de M'_1 jusqu'en P_1 ; soit S cette suite. Faisons maintenant varier la droite D de la manière suivante : nous joindrons successivement le point M_1^0 à tous les points M''_1 de la suite S depuis le point M'_1 jusqu'au point P_1 , de telle façon que la droite D se confonde à l'origine avec $M_1^0 M'_1$ et à la fin avec $M_1^0 P_1$.

La droite D étant ainsi devenue très voisine de T , je pourrai la faire tourner autour de T , sans qu'elle cesse jamais d'être très voisine de cette tangente. Après un tour complet, elle se confondra de nouveau avec $M_1^0 P_1$.

Je joindrai ensuite le point M_1^0 à tous les points M''_1 de la suite S depuis le point P_1 jusqu'au point M'_1 de telle façon que la droite D ,

repassant par les mêmes positions dans l'ordre inverse, se confond à l'origine avec $M_1^0 P_1$ pour revenir finalement à sa position primitive $M_1^0 M_1'$.

La droite D a ainsi décrit un véritable lacet, qui se divise en trois parties; comment, dans ces trois parties, se sont comportés les points d'intersection? Dans la première partie, la droite D a occupé successivement les positions $M_0^0 M_1'$, $M_1^0 M_1'$, $M_1^0 P_1$; l'un des points d'intersection M_1^0 est resté fixe; un autre est parti de M_1' pour aboutir en P_1 en parcourant d'une façon continue toute la suite S.

Dans la deuxième partie, la droite D tourne autour de T et, comme T est une tangente ordinaire et que M_1^0 et P_1 sont très voisins du point de contact, les deux points d'intersection M_0^0 et P_1 s'échangent.

Dans la troisième partie, la droite D repasse, dans l'ordre inverse, par les mêmes positions que dans la première partie; le point qui coïncidait avec M_1^0 pendant toute la première partie coïncidera avec P_1 à la fin de la deuxième partie et, pendant la troisième partie, variera d'une façon continue de P_1 à M_1' en parcourant toute la suite S. Le point qui coïncidait avec M_1' au début de la première partie et avec P_1 à la fin de la première partie se trouvera en M_1^0 à la fin de la deuxième partie et restera fixe en M_1^0 pendant toute la troisième partie.

Finalement, les deux points M_1^0 et M_1' se seront échangés.

Voyons ce que deviennent les quatre points M_1 , M_2 , M_3 , M_4 quand on fait varier ainsi la droite D. Le point M_1 est celui des points d'intersection de D et de C_1 qui se confondait primitivement avec M_1^0 . Il se confondra donc avec M_1^0 pendant toute la première partie du lacet, s'échangera avec P_1 pendant la deuxième partie et variera de P_1 à M_1' pendant la troisième partie.

D'après ce que nous venons de voir, quand D tournera autour de T, M_1 doit s'échanger avec l'un des trois points M_2 , M_3 , M_4 ; si, par exemple, il s'échange avec M_2 , les points M_3 et M_4 reviennent à leur position primitive, et la courbe C_2 est le prolongement analytique de la courbe C_1 .

Dans la deuxième partie du lacet, les deux points d'intersection M_1^0 et P_1 s'échangent; or, M_1 coïncide avec M_1^0 au début de la deuxième partie et avec P_1 à la fin. Comme il doit s'échanger

avec M_2 , c'est que M_2 coïncide avec P_1 au début de la deuxième partie et avec M_1^0 à la fin.

Comment maintenant se comporte M_2 dans la première et la deuxième parties du lacet ? M_2 est l'intersection de D avec la courbe C_2 qui est identique à la courbe C_1 ; il est clair que si nous faisons parcourir à D en sens inverse la première partie du lacet, de façon à ramener le droite D dans sa position initiale D_0 , le point M_2 , qui coïncide avec P_1 quand la droite D (à la fin de la première partie du lacet) est en $M_1^0 P_1$, parcourra en sens inverse la suite S , de sorte qu'il se trouvera en M_1' quand la droite D sera en D_0 .

Ainsi, le point M_2^0 (c'est-à-dire la position que prend M_2 quand D est en D_0) n'est autre chose que M_1' .

Si donc la droite D_0 coupe la courbe C_1 en un autre point que M_1^0 , cet autre point ne peut être que l'un des points

$$M_2^0, M_3^0, M_4^0.$$

Ainsi, la droite D_0 (qui est une droite quelconque) ne peut avoir avec l'ensemble des courbes C_1, C_2, C_3, C_4 d'autres points d'intersection que les quatre points $M_1^0, M_2^0, M_3^0, M_4^0$.

Donc l'ensemble de ces quatre courbes forme une courbe algébrique du quatrième degré.

C. Q. F. D.

De là, il est aisé de déduire le théorème de Lie que les seules surfaces qui soient doublement de translation sont les surfaces

$$\Theta(x, y, z) = 0$$

(où Θ est la fonction Θ ordinaire à trois variables) et leurs dégénérescences.

II. — EXTENSION DES RÉSULTATS PRÉCÉDENTS.

Le raisonnement s'étend presque sans changement au cas d'un plus grand nombre de variables.

Soient $x_1, x_2, \dots, x_p$ les coordonnées d'un point dans l'espace à p dimensions et supposons que l'on ait dans cet espace une variété V à $p - 1$ dimensions qui soit doublement de translation.

Les équations de la variété V pourront se mettre sous la forme

$$(1) \quad x_q = f_{q,1}(t_1) + f_{q,2}(t_2) + \dots + f_{q,p-1}(t_{p-1}) \quad (q = 1, 2, \dots, p)$$

$t_1, t_2, \dots, t_{p-1}$ étant $p - 1$ variables indépendantes.

La variété V étant deux fois de translation, ses équations pourront se mettre de deux manières sous la forme (1), de sorte que nous aurons, outre les relations (1), les relations

$$(1 \text{ bis}) \quad x_q = f_{q,p}(t_p) - f_{q,p+1}(t_{p+1}) - \dots + f_{q,2p-2}(t_{2p-2}) \quad (q = 1, 2, \dots, p),$$

où $t_p, t_{p+1}, t_{p+2}, \dots, t_{2p-2}$ représentent $p-1$ nouvelles variables.

Si nous posons

$$f_{q,i}(t_i) = u_{q,i} \quad \left(\begin{matrix} q = 1, 2, \dots, p \\ i = 1, 2, \dots, p-1 \end{matrix} \right),$$

$$f_{q,i}(t_i) = -u_{q,i} \quad (q = 1, 2, \dots, p; i = p, p+1, \dots, 2p-2),$$

des relations (1) et (1 bis) nous déduirons les suivantes :

$$(2) \quad u_{q,1} + u_{q,2} + \dots + u_{q,2p-3} + u_{q,2p-2} = 0 \quad (q = 1, 2, \dots, p),$$

où les $p-1$ variables $t_1, t_2, \dots, t_{p-1}$ doivent être regardées comme indépendantes, tandis que les $p-1$ variables $t_p, t_{p+1}, \dots, t_{2p-2}$ sont des fonctions des $p-1$ premières.

Considérons maintenant

$$f'_{1,i}(t_i), f'_{2,i}(t_i), \dots, f'_{p,i}(t_i)$$

ou, si l'on préfère,

$$du_{1,i}, du_{2,i}, \dots, du_{p,i},$$

comme les coordonnées homogènes d'un point M_i dans l'espace à $p-1$ dimensions, et appelons C_i la courbe gauche de l'espace à $p-1$ dimensions qui est décrite par le point M_i .

Supposons que l'on fasse varier t_1 , les variables $t_2, t_3, \dots, t_{p-1}$ demeurant constantes de telle sorte que l'on ait

$$dt_i = du_{q,i} = 0 \quad (i = 2, 3, \dots, p-1; q = 1, 2, \dots, p),$$

La différentiation des relations (2) nous donnera alors

$$(3) \quad du_{q,1} + du_{q,p} + du_{q,p+1} - du_{q,p+2} + \dots + du_{q,2p-2} = 0,$$

et l'on trouverait de même

$$(3 \text{ bis}) \quad \left\{ \begin{array}{l} du_{q,i} + du_{q,p} + du_{q,p+1} - \dots + du_{q,2p-2} = 0 \\ (q = 1, 2, \dots, p; i = 1, 2, \dots, p-1). \end{array} \right.$$

Ces relations signifient que les $2p - 2$ points

$$M_1, M_2, \dots, M_{2p-2}$$

sont dans une même variété plane P à $p - 2$ dimensions. Je dirai, pour abrégé, dans un même plan P .

Voyons maintenant comment pourraient s'échanger entre eux les différents points d'intersection de la courbe C_1 et du plan P .

Soient T un plan tangent à C_1 et M_1^0 le point de contact; je supposerai que ce plan tangent soit un plan tangent ordinaire rencontrant la courbe en deux points confondus; je supposerai, de plus, que ce plan ne touche ni la courbe C_1 , ni aucune des autres courbes C_i en un autre point que M_1^0 ; ce n'est donc ni un plan tangent commun à deux courbes C_i , ni un plan touchant double à C_1 . Je supposerai que ce n'est pas non plus un plan tangent à la fois en M_1^0 à deux branches de courbe C_1 et C_i tangentes l'une à l'autre. Il est clair, en effet, que les plans tangents à C_1 satisfont *en général* à toutes ces conditions.

Supposons ensuite que le plan P , d'abord très peu différent de T , fasse un tour complet autour de T . Le plan P , dans sa position primitive, coupe C_1 en deux points M_1 et M'_1 très voisins de M_1^0 . Quand P a tourné autour de T , ces deux points M_1 et M'_1 s'échangent; les autres points d'intersection de P avec les courbes C_i reviennent à leurs positions primitives.

Quand P tourne autour de T , le point M_1 change; par conséquent, pour que les relations (2) subsistent, il faut que l'un au moins des autres points M_i , le point M_2 , change également.

Or cela ne peut arriver que d'une seule manière, puisque, d'après nos hypothèses, le plan T n'est pas tangent à la fois à deux branches de courbe différentes; cela ne peut arriver que si les deux courbes C_1 et C_2 sont le prolongement analytique l'une de l'autre.

Dans ce cas, M'_1 n'est autre chose que M_2 , de sorte que les deux points M_1 et M_2 s'échangent simplement.

Reprenons maintenant le raisonnement dans toute sa généralité.

Soit P_0 une position particulière du plan P et M_i^0 la position correspondante du point M_i .

Je suppose que P_0 coupe C_1 en un point M'_1 différent de M_1^0 .

Soient Q_1 et R_1 deux points de C_1 très voisins de M_1^0 ; nous pouvons toujours supposer que le plan tangent T en Q_1 est un *plan tangent ordinaire*. J'entends par là : 1° que ce plan tangent rencontre la courbe en deux points confondus seulement; 2° qu'il n'est pas tangent à la fois à deux branches de courbe C_i différentes (soit en touchant la courbe C_1 en deux points différents, ou en touchant la courbe C_1 et une courbe C_i en deux points différents; soit en touchant en Q_1 deux branches de courbe C_1 et C_i tangentes l'une à l'autre, mais différentes l'une de l'autre).

Faisons maintenant décrire au plan P un lacet.

Dans la première partie du lacet, le plan P part de la position P_0 et aboutit à une position finale où il passe par R_1 et M_1^0 et est très peu différent de T ; dans les positions intermédiaires, il ne cesse pas de passer par M_1^0 . Par conséquent, l'un des points d'intersection de P et de C_1 est resté fixe en M_1^0 , l'autre a varié d'une manière continue de M_1' à R_1 ; le point M_1 en particulier est resté fixe en M_1^0 .

Dans la deuxième partie du lacet, le plan P décrit un tour complet autour de T . Les deux points d'intersection de P et de C_1 qui sont en M_1^0 et R_1 s'échangent entre eux. Le plan T étant un plan tangent ordinaire, deux des points M_i , à savoir M_1 et, par exemple, M_2 s'échangent; les autres points M_i reviennent à leurs positions primitives. Le point M_1 qui était en M_1^0 au commencement de cette deuxième partie vient donc en R_1 à la fin et l'on voit qu'inversement le point M_2 devait être en R_1 au commencement de la deuxième partie et venir en M_1^0 à la fin. Enfin les deux courbes C_1 et C_2 doivent être le prolongement analytique l'une de l'autre.

Dans la troisième partie du lacet, le plan P repasse dans l'ordre inverse, par les positions qu'il a occupées dans la première. Les points d'intersection de P avec C_1 (ou avec son prolongement analytique C_2) qui, au début de la troisième partie, se trouvaient en R_1 et en M_1^0 , doivent venir à la fin de cette troisième partie en M_1' et M_1^0 . Les points $M_3, M_4, \dots, M_{2p-2}$ qui avaient, à la fin de la deuxième partie, repris les mêmes positions qu'au début de la deuxième partie, repasseront dans la troisième partie, dans l'ordre inverse par les mêmes positions que dans la première partie; de sorte qu'ils seront à la fin de la troisième partie dans les

mêmes positions qu'au début de la première partie, c'est-à-dire en $M_3^0, M_4^0, \dots, M_{2p-2}^0$. Le point M_1 qui, au début de la troisième partie, était en R_1 , viendra à la fin de la troisième partie en M_1' ; le point M_2 qui était en M_1^0 sera encore en M_1^0 à la fin de la troisième partie.

Enfin, le point M_2 qui était en R_1 à la fin de la première partie avait dû, pendant cette première partie, coïncider constamment avec un des points d'intersection de C_1 et de P , puisque C_1 et C_2 ne diffèrent pas au point de vue analytique. Avec lequel de ces points d'intersection? Il est clair que c'est avec celui qui est en R_1 à la fin de la première partie. Nous devons donc conclure qu'au début de la première partie il était en M_1' .

Donc M_1' n'est autre chose que M_2^0 .

Ainsi, il ne peut pas y avoir d'autre point d'intersection de P_0 et de C_1 que les points M_i^0 .

Donc l'ensemble des courbes C_i forme une courbe algébrique d'ordre $2p - 2$.

III. — DISCUSSION.

Considérons donc cette courbe d'ordre $2p - 2$ que j'appellerai la *courbe* C et qui est formée de l'ensemble des courbes C_i . Je dis maintenant que les quantités que nous avons appelées $u_{q,i}$ sont des intégrales abéliennes de première espèce relatives à cette courbe algébrique.

Nous avons représenté par

$$du_{1,i}, \quad du_{2,i}, \quad \dots, \quad du_{p,i}$$

les coordonnées homogènes du point M_i ; nous pouvons représenter de même par

$$du_1, \quad du_2, \quad \dots, \quad du_p$$

où

$$du_q = f'_{q,i}(t) dt$$

les coordonnées homogènes du point général M de la courbe C [comme en général C est indécomposable, de sorte que les différentes courbes C_i sont le prolongement analytique les unes des autres, je puis écrire simplement $f_q(t)$ au lieu de $f_{q,i}(t)$, de sorte que $du_q = f'_q(t) dt$].

Je poserai d'ailleurs

$$\frac{du_1}{\xi_1} = \frac{du_2}{\xi_2} = \dots = \frac{du_{p-1}}{\xi_{p-1}} = \frac{du_p}{\xi_p}.$$

PREMIÈRE PROPOSITION. — *Supposons d'abord que la courbe C ne présente aucun point singulier, tel que point double, point de rebroussement, etc.*

Alors dans le voisinage d'un point quelconque de C les rapports des coordonnées ξ à l'une d'entre elles, à ξ_p par exemple, seront des fonctions holomorphes de l'un de ces rapports, de $\frac{\xi_1}{\xi_p}$ par exemple.

Soit M un point de C dont les coordonnées sont $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p$; si, par exemple, dans le voisinage de ce point, tous les $\frac{\xi_i}{\xi_p}$ sont fonctions holomorphes de $\frac{\xi_1}{\xi_p}$, je dirai que toutes les fonctions holomorphes $\frac{\xi_i}{\xi_p}$ sont des fonctions holomorphes du point analytique $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p)$ ou simplement du point M. Si, dans le voisinage de M, ce n'étaient pas tous les $\frac{\xi_i}{\xi_p}$ qui fussent fonctions holomorphes de $\frac{\xi_1}{\xi_p}$, mais tous les $\frac{\xi_i}{\xi_{p-1}}$, par exemple, qui fussent fonctions holomorphes de $\frac{\xi_2}{\xi_{p-1}}$, ce seraient alors les fonctions holomorphes de $\frac{\xi_2}{\xi_{p-1}}$ que j'appellerais *fonctions holomorphes du point M*, etc.; dans tous les cas, cette expression, fonction holomorphe du point M, se trouvera parfaitement définie.

Si, dans le voisinage d'un point de C, la fonction u_2 n'est pas une fonction holomorphe du point M, je dirai que ce point est un point singulier de la fonction u_q .

Je dis maintenant que la fonction u_q n'aura pas de point singulier. Considérons, en effet, le plan P qui coupe C aux $2p - 2$ points

$$M_1, M_2, \dots, M_{2p-2},$$

de sorte qu'on aura

$$(1) \quad u_{q,1} + u_{q,2} + \dots + u_{q,2p-2} = 0.$$

Si les points $M_2, M_3, \dots, M_{2p-2}$ ne sont pas singuliers, les

fonctions

$$u_{q,2}, \dots, u_{q,2p-2}$$

seront holomorphes; en vertu de (1), la fonction $u_{q,1}$ le sera également, de sorte que le point M_i ne sera pas non plus singulier.

Si le plan P passe par un point singulier de la fonction u_q sur C, il devra donc passer par un second point singulier. Mais le plan P est quelconque; quelles que soient les positions attribuées aux points singuliers, on pourrait donc faire passer le plan P par un de ces points et par un seul. Or, cela est impossible, nous venons de le voir; donc il ne peut y avoir de point singulier.

En particulier, la fonction u_q ne pourra devenir infinie (à moins que le point M ne décrive une infinité de cycles sur la surface de Riemann S relative à la courbe C), mais nous ne pouvons encore affirmer que u_q soit une fonction uniforme du point M; nous voyons déjà que u_q revient à sa valeur primitive quand le point M décrit un contour fermé *infinitement petit* sur la surface de Riemann S; mais il pourrait n'en pas être de même quand le point M décrit un *cycle fermé* sur S.

Le raisonnement ne s'appliquerait pas si la courbe C présentait un point singulier, un point double, par exemple; car alors tout plan P passant par ce point double couperait C en *deux* points confondus qui pourraient être tous deux singuliers pour la fonction u . Tout plan P passant par un de ces points singuliers passerait alors par l'autre. En revanche, le raisonnement s'applique sans changement si la courbe algébrique C se décompose sans avoir de point multiple.

DEUXIÈME PROPOSITION. — Soient maintenant

$$v_1, v_2, \dots, v_h$$

les intégrales abéliennes de première espèce de la courbe C et soit $v_{q,i}$ la valeur de v_q au point M_i . Nous aurons

$$(2) \quad v_{q,1} + v_{q,2} + \dots + v_{q,2p-2} = 0,$$

relations analogues aux relations (1).

Considérons maintenant

$$\begin{aligned} &\text{les } du_{q,1} \quad (q = 1, 2, \dots, p) \\ &\text{et les } dv_{q,1} \quad (q = 1, 2, \dots, h) \end{aligned}$$

comme les coordonnées homogènes d'un point N_i dans l'espace à $p + h - 1$ dimensions. Nous trouverons comme plus haut par différentiation

$$(2\text{ bis}) \quad \left\{ \begin{array}{l} dv_{q,i} + \sum_{k=p}^{2p-2} dv_{q,k} = 0 \quad (q = 1, 2, \dots, h), \\ du_{q,i} + \sum_{k=p}^{2p-2} du_{q,k} = 0 \quad (m = 1, 2, \dots, p), \\ \quad \quad \quad (i = 1, 2, \dots, p-1); \end{array} \right.$$

ces relations nous montrent que les $2p - 2$ points N_i sont dans une même variété plane P' à $p - 2$ dimensions.

Soient C'_i la courbe décrite par le point N_i et C' l'ensemble des courbes C'_i .

Soit P'_0 une position particulière du plan P' et soit N_i^0 la position correspondante du point N_i . Soit T_i la tangente à la courbe C' au point N_i^0 .

Pour définir P'_0 , il suffira de nous donner $p - 1$ des points N_i^0 , par exemple les points $N_1^0, N_2^0, \dots, N_{p-1}^0$. Nous pourrions toujours supposer que ces $p - 1$ points n'appartiennent pas à une même variété plane à $p - 3$ dimensions. Si, en effet, les points $N_1, N_2, \dots, N_{p-1}$ appartenaient *en général* à un plan de $p - 3$ dimensions, il en serait de même des points $M_1, M_2, \dots, M_{p-1}$ et alors la courbe C devrait être contenue dans un plan à $p - 2$ dimensions, de sorte que la variété V se réduirait à un plan à $p - 2$ dimensions.

Soit maintenant N_1^1 un point de C' infiniment voisin de N_1^0 ; par les $p - 1$ points

$$N_1^1, N_2^0, N_3^0, \dots, N_{p-1}^0,$$

je puis faire passer une variété plane P'_1 à $p - 2$ dimensions, infiniment peu différente de P'_0 .

P'_1 coupera C' en $p - 1$ autres points

$$N_p^1, N_{p+1}^1, \dots, N_{2p-2}^1,$$

infiniment voisins des points

$$N_p^0, N_{p+1}^0, \dots, N_{2p-2}^0.$$

Les deux variétés P'_0 et P'_1 ayant $p - 2$ points communs

$$N_2^0, N_3^0, \dots, N_{p-1}^0$$

(non situés sur une même variété plane à $p - 4$ dimensions, puisque avec N_1^0 ils ne sont pas dans un plan à $p - 3$ dimensions) détermineront une variété plane Q_0 à $p - 1$ dimensions.

Q_0 contiendra évidemment la droite

$$N_q^0 N_q^1 \quad (q = 1, p, p + 1, \dots, 2p - 2),$$

c'est-à-dire la tangente T_q . (C'est ainsi que le plan tangent à un cône contient les tangentes à toutes les courbes tracées sur le cône et coupant la génératrice de contact.)

Ainsi, la variété plane qui contient P'_0 et la tangente T_1 contient aussi les tangentes

$$T_p, T_{p+1}, \dots, T_{2p-2}.$$

Comme rien ne distingue les différents points d'intersection de C' et de P'_0 , je pourrais démontrer de même que cette variété contient aussi les tangentes

$$T_2, T_3, \dots, T_{p-1}.$$

En résumé, à toute variété plane P' à $p - 2$ dimensions coupant C' en $2p - 2$ points N_i correspondra une variété plane Q à $p - 1$ dimensions qui contiendra les $2p - 2$ tangentes T_i .

Soit maintenant P'_2 une position de P' infiniment voisine de P'_0 ; soient Q_0 et Q_2 les variétés Q correspondant à P'_0 et à P'_2 . Je me propose de démontrer que Q_0 et Q_2 sont identiques. Je désignerai par N_i^0 et N_i^2 les intersections de C' avec P'_0 et avec P'_2 et par T_i^0 et T_i^2 les tangentes correspondantes à C' .

En effet, supposons d'abord que P'_2 et P'_0 ait un point commun, par exemple N_1^0 . Alors Q_2 et Q_0 contiendront tous deux la tangente T_1^0 .

De plus, Q_0 contient la tangente T_q^0 et Q_2 contient la tangente infiniment voisine T_q^2 . En négligeant des infiniment petits d'ordre supérieur, on peut dire que T_q^0 et T_q^2 se coupent en un point infiniment voisin de N_q^0 .

Done, les $2p - 2$ points N_q^0 sont infiniment voisins de l'intersection de Q_2 et Q_0 ; la limite de l'intersection de Q_2 et Q_0 ,

quand P'_2 et P_0 tendent à se confondre, ne peut donc être que P'_0 . Or cette intersection doit contenir la tangente T_1^0 . Mais en général (c'est-à-dire si les points $N_1^0, N_2^0, \dots, N_{p-1}^0$ qui définissent P'_0 ont été choisis d'une façon quelconque sur C), la tangente T_1^0 ne fait pas partie de P'_0 (sans cela, en effet, la tangente à la courbe C au point M_1 serait également, en général, dans le plan P ; or le plan P est un plan *quelconque* de $p-2$ dimensions de l'espace plan à $p-1$ dimensions où se trouve C . Il est donc impossible que la tangente à C s'y trouve toujours). La contradiction ne peut être levée que si l'on suppose que Q_0 et Q_2 se confondent.

Ainsi Q_2 et Q_0 se confondent si P'_0 et P'_2 ont comme point commun $N_1^0 = N_1^2$; ils se confondraient également si P'_0 et P'_2 avaient comme point commun $N_2^0 = N_2^2$.

Supposons maintenant que P'_0 et P'_2 n'aient aucun point commun. Je pourrai construire une variété P'_3 passant par N_1^0 et par N_2^2 . Alors P'_0 et P'_3 ayant pour point commun N_1^0 , Q_0 et Q_3 se confondent; d'autre part, P'_3 et P'_2 ayant pour point commun N_2^2 , Q_3 et Q_2 se confondent. Donc Q_0 et Q_2 se confondent encore.

Maintenant, si deux variétés Q correspondant à deux variétés P' très peu différentes se confondent, il est aisé de conclure que deux variétés Q correspondant à deux variétés P' quelconques se confondront encore. Donc toutes les variétés Q se confondent.

Donc, la courbe C' est située dans un espace plan à $p-1$ dimensions (le théorème correspondant dans l'espace ordinaire est le suivant : *Si toutes les droites qui joignent deux points quelconques d'une courbe gauche vont rencontrer cette même courbe en un troisième point, c'est que la courbe gauche se réduit à une courbe plane*). Remarquons que le raisonnement s'applique quand même les courbes C et C' présenteraient des points multiples ou seraient décomposables.

TROISIÈME PROPOSITION. — Donc entre les $p+h$ fonctions u et v il y a h relations linéaires.

Donc p est au moins égal à h ; et, parmi les fonctions u , il y en a h qui sont des combinaisons linéaires des intégrales abéliennes de première espèce.

Nous pouvons, sans restreindre la généralité, supposer que

$$u_1, u_2, \dots, u_h$$

sont des intégrales abéliennes de première espèce.

Je dis qu'il en est de même de $u_i (i > h)$.

En effet, du_i est une différentielle abélienne, puisque du_1 en est une et que

$$du_i = \sum_{\xi=1}^{\xi'} du_1.$$

De plus, u_i ne devenant pas infini sera une intégrale abélienne de première espèce.

Ainsi toutes les fonctions u sont des intégrales abéliennes de première espèce, de sorte que $p = h$.

Il semblerait que le raisonnement est en défaut si la courbe C est unicursale, c'est-à-dire si $h = 0$; on n'a pas, en effet, dans ce cas, le droit de dire que du_1 est une différentielle abélienne, puisque nous n'avons plus de différentielle abélienne de première espèce.

Mais ce cas doit être exclu. Et, en effet, si la courbe C est unicursale, il n'y a plus de cycles sur la surface de Riemann S; il en résulte que les fonctions u qui sont des fonctions holomorphes du point M sur toute cette surface de Riemann sont en même temps des fonctions uniformes. Elles doivent donc se réduire à des constantes.

Supposons maintenant que la courbe C présente des points singuliers, par exemple des points doubles, des points de rebroussement, etc.

Nous ne pourrions plus dire que la fonction u_q est une fonction holomorphe du point M sur toute la surface de Riemann S; elle pourra présenter des singularités quand le point M vient en un point singulier de C. Voyons quelle peut être la nature de ces singularités.

Soit donc O un point singulier de C; le plan P coupera C en $2p - 2$ points et quand la distance de ce plan P à O tendra vers zéro de la manière la plus générale, m de ces $2p - 2$ points tendront vers O; de sorte que O sera un point multiple d'ordre m .

Je suppose d'abord que m est au plus égal à $p - 1$.

Nous devons introduire ici la notion des intégrales de première espèce dégénérées.

Lorsqu'une courbe algébrique acquiert un point double de plus, son genre s'abaisse d'une unité; elle perd donc une intégrale abélienne de première espèce. Que devient à la limite cette intégrale de première espèce qui disparaît ainsi? Elle devient une intégrale de troisième espèce que j'appellerai *intégrale de première espèce dégénérée*.

Dans le cas d'un point double ordinaire, il arrive que le point double correspond à deux points de la surface de Riemann. L'intégrale dégénérée correspondante est alors l'intégrale de troisième espèce qui admet ces deux points comme points singuliers logarithmiques avec deux résidus égaux et de signe contraire.

En vertu du théorème d'Abel, si l'on coupe une courbe de l'espace à $p - 1$ dimensions par un plan à $p - 2$ dimensions, la somme des valeurs d'une intégrale de première espèce relatives aux différents points d'intersection sera une constante, par exemple zéro. Par raison de continuité, cela sera encore vrai pour une intégrale dégénérée.

Soit donc v une intégrale de première espèce ou une intégrale dégénérée relative à C , et v_i sa valeur en M_i ; on aura

$$v_1 + v_2 + \dots + v_{2p-2} = 0.$$

Regardons

$$du_{1,i}, du_{2,i}, \dots, du_{p,i}, dv_i$$

comme les coordonnées homogènes d'un point N_i dans l'espace à p dimensions.

Soit C' l'ensemble des courbes décrites par les points N_i ; la deuxième proposition restant vraie, cette courbe C' sera dans un espace plan à $p - 1$ dimensions, c'est-à-dire que l'on aura

$$dv = \alpha_1 du_1 + \alpha_2 du_2 + \dots + \alpha_p du_p,$$

les α étant des coefficients constants. On tire de là

$$du_q = dv \frac{\xi_q}{\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \dots + \alpha_p \xi_p},$$

ce qui montre que du_q est une différentielle abélienne.

Le raisonnement s'applique sans difficulté au cas où la courbe C est indécomposable, et où elle possède au moins une intégrale de première espèce ou une intégrale dégénérée.

Or, elle aura toujours au moins une intégrale de première espèce, à moins qu'elle ne soit unicursale.

D'autre part, si elle a un ou plusieurs points multiples, elle aura au moins une intégrale dégénérée. En un de ces points multiples viendront passer une ou plusieurs branches de courbe distinctes. Par exemple, en un point double à tangentes séparées passeront deux branches sans point singulier; en un point de rebroussement une seule branche avec un point singulier; en un point triple pourront passer ou bien trois branches sans point singulier, ou bien une branche sans point singulier et une autre à point de rebroussement, ou bien une branche unique avec un point singulier d'ordre plus élevé, etc.

Si l'une des branches de courbe présente ainsi un point singulier, l'intégrale de deuxième espèce qui admet ce point singulier comme pôle sera une intégrale dégénérée. Si aucune des branches n'admet de point singulier, il y aura au moins deux branches, et le point multiple correspondra au moins à deux points de la surface de Riemann (à autant de points de cette surface qu'il y a de branches distinctes). Alors, l'intégrale de troisième espèce qui admet ces deux points comme points logarithmiques avec des résidus égaux et de signe contraire est une intégrale dégénérée.

Si la courbe C était indécomposable, le raisonnement ne serait donc en défaut que si elle était unicursale et dépourvue de points multiples.

Mais ce cas, comme nous l'avons remarqué plus haut, doit être exclu, car, en l'absence de point multiple et d'après la première proposition, les fonctions u sont holomorphes sur toute la surface de Riemann et, si la courbe est unicursale, elles sont uniformes et, par conséquent, se réduisent à des constantes.

Il en serait encore de même si la courbe C était décomposable et qu'une des composantes, que j'appellerai K , soit unicursale, sans point multiple et ne coupant aucune des autres composantes. En effet, les fonctions u ne peuvent avoir d'autres points singuliers que les points multiples des diverses composantes et leurs points d'intersection: comme la courbe K ne passe par aucun de

ces points, les fonctions u seront holomorphes sur toute la surface de Riemann Σ relative à K ; comme K est unicursale, cette surface Σ n'aura pas de cycle et, par conséquent, les fonctions u seront uniformes; elles se réduisent donc à des constantes sur toute la surface Σ .

Si alors nous reprenons les relations

$$u_{q,1} + u_{q,2} + \dots + u_{q,2p-2} = 0,$$

un certain nombre des quantités $u_{q,i}$ (à savoir celles qui correspondent aux points M_i qui sont sur la composante K) se réduisent à des constantes que l'on peut supposer nulles sans restreindre la généralité. Alors la variété V aurait moins de $p - 1$ dimensions, de sorte que ce cas doit être encore exclu.

Supposons donc que C se décompose et qu'une des composantes K soit de genre supérieur à zéro, on ait un point multiple. Cette composante admettra une intégrale de première espèce ou une intégrale dégénérée. Appelons v cette intégrale. Sur les autres composantes nous supposons $v = 0$. Si la composante K rencontre une autre des composantes, il arrivera ainsi généralement que v n'aura pas la même valeur sur les deux branches de courbe qui passeront au point d'intersection, mais cela n'a aucun inconvénient.

Si les $du_{q,i}$ et v_i sont encore les coordonnées homogènes du point N_i , on verra encore que la courbe C est dans un espace plan à $p - 1$ dimensions; d'où il résulte :

1° Que les composantes de C autres que K sont dans des plans à moins de $p - 1$ dimensions;

2° Que sur les composantes K , on a

$$dv = z_1 du_1 + z_2 du_2 + \dots + z_p du_p,$$

d'où l'on déduit, comme plus haut, que, sur cette composante K , les du sont des différentielles abéliennes.

Si donc toutes les composantes sont de genre supérieur à zéro ou ont un point multiple, il n'y a pas de difficulté.

Supposons donc qu'une composante K soit unicursale et sans point multiple. Elle devra avoir au moins un point commun avec une des autres composantes, le cas où elle ne coupe aucune de ces

composantes (tout en étant unicursale et sans point multiple) ayant été exclu plus haut.

Supposons d'abord que K coupe une autre composante K' en deux points Q et Q' .

Définissons une fonction v de la façon suivante : Sur K , v sera l'intégrale de troisième espèce qui admet Q et Q' comme points logarithmiques avec les résidus $+1$ et -1 ; sur K' , v sera l'intégrale de troisième espèce qui admet Q et Q' comme points logarithmiques avec les résidus -1 et $+1$; sur les autres composantes, v sera nulle.

Dans ces conditions, on aura encore

$$\sum v_i = 0,$$

en appelant v_i la valeur de v au point M_i .

Si donc $du_{q,i}$ et dv_i sont les coordonnées homogènes de N_i , la courbe C sera dans un espace plan à $p-1$ dimensions, d'où il résulte que, sur les composantes K et K' , on a encore

$$dv = \sum x_q du_q,$$

et que, sur ces deux composantes, les du sont des différentielles abéliennes.

Le résultat s'étend au cas où les deux composantes K et K' se touchent en un point Q , c'est-à-dire où les deux points Q et Q' se confondent: l'intégrale de troisième espèce v se réduit alors à une intégrale de deuxième espèce.

Considérons maintenant un autre cas: je suppose que, parmi les composantes de C , il y en ait m que j'appellerai

$$K_1, K_2, \dots, K_m,$$

et qui se coupent mutuellement de telle sorte que K_1 coupe K_2 en Q_1 , que K_2 coupe K_3 en Q_2 , ..., que K_{m-1} coupe K_m en Q_m , et enfin que K_m coupe K_1 en Q_m .

Pour plus de symétrie dans les notations, je désignerai indifféremment K_1 par K_1 ou par K_{m+1} et de même Q_1 par Q_1 ou Q_{m+1} , K_m par K_m ou K_0 , Q_m par Q_m ou Q_0 .

Alors K_i coupe K_{i+1} en Q_i et K_{i-1} en Q_{i-1} .

Je dirai alors que ces composantes forment une chaîne fermée.

Je définirai alors la fonction v comme il suit : Sur K_L , ce sera l'intégrale de troisième espèce qui admet Q_i et Q_{i-1} comme points logarithmiques avec les résidus $+1$ et -1 ; sur les composantes étrangères à la chaîne, v sera nul.

On a alors $\Sigma v_i = 0$ et, toujours par le même raisonnement, on verrait que sur les composantes de la chaîne les du sont des différentielles abéliennes.

Nous avons laissé de côté un certain nombre de cas d'exception qui pourraient sans doute être traités par des principes analogues.

J'examinerai encore un cas dont la généralité est très grande.

La courbe C , décomposable ou non, n'admet aucun point multiple d'ordre supérieur à $p-1$.

Je commencerai par établir le point suivant :

Soient $F = 0$, $F_1 = 0$ les équations de deux variétés algébriques de même degré à $p-2$ dimensions et situées dans l'espace à $p-1$ dimensions. L'équation

$$F - \lambda F_1 = 0$$

sera l'équation générale du faisceau déterminé par ces deux variétés.

Une variété quelconque du faisceau coupera C en μ points que j'appellerai

$$M_1, M_2, \dots, M_\mu.$$

Soient

$$u_{i,1}, u_{i,2}, \dots, u_{i,\mu}$$

les valeurs correspondantes de la fonction u_i . Soient

$$M'_1, M'_2, \dots, M'_\mu$$

les μ points d'intersection de C avec une variété du faisceau infiniment voisine de la première. Ces μ points seront évidemment infiniment voisins de $M_1, M_2, \dots, M_\mu$.

Soit $du_{i,k}$ l'accroissement que subit $u_{i,k}$ quand on passe de M_k à M'_k .

Je dis que l'on a

$$du_{i,1} + du_{i,2} + \dots + du_{i,\mu} = 0.$$

C'est le théorème d'Abel. Nous aurons ainsi montré que nos fonctions u_i satisfont au théorème d'Abel comme les intégrales abéliennes de première espèce.

En effet, les fonctions $u_{i,k}$ et $\frac{du_{i,k}}{d\lambda}$ sont des fonctions holomorphes de λ (ou de $\frac{1}{\lambda}$ pour $\lambda = \infty$) à part les exceptions suivantes :

1° Quand la variété $F + \lambda F_1 = 0$ est tangente à C et que, par conséquent, plusieurs des points M_k s'échangent entre eux. (Soient, par exemple, pour fixer les idées, les trois points M_1, M_2, M_3 ; mais alors la somme

$$\frac{du_{i,1}}{d\lambda} + \frac{du_{i,2}}{d\lambda} + \frac{du_{i,3}}{d\lambda}$$

est fonction holomorphe de λ .)

2° Quand la variété $F + \lambda F_1 = 0$ va passer par un point multiple ou singulier de la courbe C .

Nous avons vu, en effet, que les fonctions u_i sont des fonctions holomorphes du point M , sauf quand ce point M vient en un des points multiples de C .

Si donc nous posons

$$du_{i,1} + du_{i,2} + \dots + du_{i,\mu} = \varphi(\lambda) d\lambda,$$

$\varphi(\lambda)$ est holomorphe (de même que $\int \varphi(\lambda) d\lambda$), sauf pour les valeurs de λ telles que $F + \lambda F_1 = 0$ aille passer par un point multiple.

Supposons donc que pour $\lambda = \lambda_0$, q des points M_k , à savoir les points $M_1, M_2, \dots, M_q$ aillent se confondre ensemble et avec un point multiple A d'ordre q ; les points $M_{q+1}, \dots, M_\mu$ restant distincts entre eux du point A et de tous les autres points singuliers.

Posons

$$\begin{aligned} du_{i,1} + du_{i,2} + \dots + du_{i,q} &= \varphi_1(\lambda) d\lambda, \\ du_{i,q+1} + du_{i,q+2} + \dots + du_{i,\mu} &= \varphi_2(\lambda) d\lambda, \\ \varphi(\lambda) &= \varphi_1(\lambda) + \varphi_2(\lambda). \end{aligned}$$

Il est clair que $\int \varphi_2(\lambda) d\lambda$ est encore holomorphe pour $\lambda = \lambda_0$, puisque les points $M_{q+1}, \dots, M_\mu$ restent ordinaires et que, par

conséquent, les fonctions $u_{i,q+1}, \dots, u_{i,q}$ restent holomorphes.

Puisque q a été supposé toujours plus petit que p , par les points $M_1, M_2, \dots, M_q$, je puis faire passer un plan que j'appelle P ; pour $\lambda = \lambda_0$, ce plan vient en P_0 . Soient $M'_1, M'_2, \dots, M'_{2p-2-q}$ les $2p-2-q$ autres points d'intersection de P avec C . Nous supposerons que ces points restent ordinaires pour $\lambda = \lambda_0$. C'est-à-dire que P_0 ne passe par aucun point multiple que A ; qu'il ne touche pas C en dehors de A ; qu'il ne touche aucune des branches de courbe qui passent par A . Soit $u'_{i,k}$ la valeur de la fonction u_i au point M'_k . On aura

$$du_{i,1} + du_{i,2} + \dots + du_{i,q} - du'_{i,1} - \dots - du'_{i,2p-2-q} = 0,$$

ce qui est la définition des fonctions u_i ; si donc on pose

$$du'_{i,1} - du'_{i,2} - \dots - du'_{i,2p-2-q} = \varphi'_i(\lambda) d\lambda,$$

il viendra

$$\varphi'_i(\lambda) = -\varphi_i(\lambda).$$

Comme les points M'_k restent ordinaires pour $\lambda = \lambda_0$, les fonctions $u'_{i,k}$ restent holomorphes et il en est de même de $\int \varphi'_i(\lambda) d\lambda$, de $\int \varphi_i(\lambda) d\lambda$ et, par conséquent, de $\int \varphi_i(\lambda) d\lambda$. Donc la fonction $\int \varphi_i(\lambda) d\lambda$, holomorphe pour toutes les valeurs de λ (même pour $\lambda = \infty$), se réduit à une constante. C. Q. F. D.

Il semble d'abord que nous nous sommes imposé de nombreuses conditions restrictives, au sujet de la variété $F + \lambda_0 F_1 = 0$ et du plan P_0 qui ne doivent pas passer par d'autres points singuliers que A , ni toucher C en dehors de A , ni toucher une des branches de courbe qui passent en A .

Mais comme ces circonstances ne se présentent pas quand les polynômes F et F_1 seront les plus généraux de leur degré, il est possible d'étendre le théorème à tous les cas par passage à la limite.

Or nous savons que si une courbe, décomposable ou non, est coupée en μ points par une variété $F = 0$, il y aura entre ces μ points h relations si notre courbe admet h intégrales abéliennes de première espèce et dégénérées.

Si $v_1, v_2, \dots, v_h$ sont ces intégrales et $v_{i,h}$ la valeur de v_i au point M_h , ces h relations s'écriront

$$v_{i,1} + v_{i,2} + \dots + v_{i,p} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, h)$$

et il n'y en aura pas d'autres si le degré de V est suffisant.

Il résulte de là que les u_i ne peuvent être que des combinaisons linéaires des v_i et que p est au plus égal à h .

D'ailleurs, le même raisonnement que plus haut (deuxième et troisième propositions) montrerait que p est au moins égal à h .

On a donc $p = h$, ce qui suffit pour établir le théorème proposé.

SUR LES INTÉGRALES DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU PREMIER ORDRE D'UNE SEULE FONCTION;

Par M. N. SALTYSKOW.

Il s'agit, dans le Mémoire qui va suivre, de démontrer un théorème que j'ai énoncé dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* ⁽¹⁾ et d'en donner une extension aux systèmes en involution les plus généraux.

Nous allons étudier les équations en involution

$$(1) \quad \begin{cases} F_k(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0, \\ k = 1, 2, \dots, m, \end{cases}$$

en désignant par p_s la dérivée $\frac{\partial z}{\partial x_s}$ et en supposant

$$(2) \quad \Delta = D \begin{pmatrix} F_1, F_2, \dots, F_m \\ p_1, p_2, \dots, p_m \end{pmatrix} \neq 0.$$

Considérons le système correspondant d'équations linéaires aux dérivées partielles d'une seule fonction f

$$(3) \quad \begin{cases} [F_k, f] = 0, \\ k = 1, 2, \dots, m, \end{cases}$$

les crochets ayant la signification bien connue de M. Mayer.

⁽¹⁾ *Comptes rendus*, 21 juillet 1890.

Supposons encore connues toutes les intégrales distinctes du système (3), en les représentant par les fonctions

$$(4) \quad F_1, F_2, \dots, F_m, f_1, f_2, \dots, f_{2n-2m+1}.$$

Le problème que nous nous proposons de résoudre, c'est de former, à l'aide des fonctions (4), des intégrales du système (1), dans le sens classique de cette notion, c'est-à-dire de trouver des valeurs

$$z, p_1, p_2, \dots, p_n,$$

en fonction des variables indépendantes $x_1, x_2, \dots, x_n$, vérifiant les identités

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = p_1, \quad \frac{\partial z}{\partial x_2} = p_2, \quad \dots, \quad \frac{\partial z}{\partial x_n} = p_n$$

et identifiant les équations (1).

Comme on le sait bien, ce problème fut déjà traité par MM. Mayer et Morera ⁽¹⁾, pour les équations résolues par rapport aux dérivées partielles et ne contenant pas z explicitement, par des méthodes basées, soit sur la réduction des systèmes en involution à une équation unique, soit sur la théorie du problème de Pfaff. La question est aussi étudiée par cette dernière méthode dans le Traité récemment publié par M. Weber ⁽²⁾. Or dans les pages suivantes je poursuivrai toujours l'ordre d'idées développé dans mon Travail : *Mémoire sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre*, inséré dans le *Journal de M. Jordan* ⁽³⁾.

Égalons les m premières fonctions (4) à zéro et toutes les autres respectivement à des constantes arbitraires $C_1, C_2, \dots, C_{2n-2m+1}$. En vertu de l'hypothèse (2), les équations obtenues sont résolubles par rapport aux variables $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$,

⁽¹⁾ *Nachrichten von der K. Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts Universität, Göttingen*, p. 299; 1873.

Mathematische Annalen, Bd VI, p. 191; 1873.

Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Rendiconti, 2^e série, vol. XVI, p. 637, 641; 1883.

⁽²⁾ *Vorlesungen über das Pfaff'sche Problem und die Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung*, 1900.

⁽³⁾ *Journal de Mathématiques*, 3^e série, t. V, p. 155; 1899.

$z, p_1, p_2, \dots, p_n$ et nous en tirons

$$(5) \quad \begin{cases} z = \psi(x_1, x_2, \dots, x_m, C_1, C_2, \dots, C_{2n-2m+1}), \\ p_s = \psi_s(x_1, \dots, C_{2n-2m+1}), \\ x_{m+i} = \theta_i(x_1, \dots, C_{2n-2m+1}), \\ s = 1, 2, \dots, n, \quad i = 1, 2, \dots, n-m. \end{cases}$$

Formons ensuite le système aux différentielles totales admettant les équations (5) comme solution. Désignons par

$$\Delta_k, \quad \Delta_{kv}, \quad \Delta'_k$$

ce que devient le déterminant fonctionnel

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial p_1} & \frac{\partial F_1}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial p_m} \\ \frac{\partial F_2}{\partial p_1} & \frac{\partial F_2}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial p_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_m}{\partial p_1} & \frac{\partial F_m}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial p_m} \end{vmatrix}$$

lorsqu'on y remplace les éléments de la $k^{\text{ième}}$ colonne par les dérivées correspondantes des fonctions $F_1, F_2, \dots, F_m$ prises par rapport aux variables

$$z, \quad p_{m+v}, \quad x_i.$$

En résolvant les équations (3) par rapport aux dérivées

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}, \quad \dots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_m},$$

on obtient un système jacobien. Les équations aux différentielles totales qui lui correspondent sont précisément celles que nous cherchons :

$$(6) \quad \begin{cases} dx_{m+v} = \sum_{k=1}^m \frac{\Delta_{kv}}{\Delta} dx_k, \\ dp_i = - \sum_{k=1}^m \frac{\Delta'_k - \Delta_k p_i}{\Delta} dx_k, \\ dz = \sum_{k=1}^m \left(p_k + \sum_{v=1}^{n-m} \frac{\Delta_{kv}}{\Delta} p_{m+v} \right) dx_k, \\ v = 1, 2, \dots, n-m, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{cases}$$

Comme les équations (5) identifient ce système (6), nous tirons de la dernière identité, en vertu des $n - m$ premières, une identité nouvelle

$$dz = \sum_{k=1}^m p_k dx_k + \sum_{v=1}^{n-m} p_{m+v} dx_{m+v}.$$

Il en résulte la conséquence importante que, si l'on parvient à obtenir des équations (5) les valeurs z , p_{m+v} satisfaisant aux conditions

$$(7) \quad \frac{\partial z}{\partial x_{m+v}} = p_{m+v}, \quad v = 1, 2, \dots, n - m,$$

on a de même les identités

$$\frac{\partial z}{\partial x_k} = p_k, \quad k = 1, 2, \dots, m,$$

car les variables $x_1, x_2, \dots, x_m$ sont indépendantes.

Cela étant, pour résoudre le problème posé nous nous appuyons sur les résultats établis dans mon Mémoire cité. Nous y avons démontré que, pour satisfaire aux égalités (7), il faut et il suffit d'éliminer $n - m$ constantes arbitraires de la première équation (5), en vertu des $n - m$ dernières, de telle manière que les fonctions

$$U_c = \frac{\partial z}{\partial C_c} = - \sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i} \frac{\partial x_{m+i}}{\partial C_c}$$

correspondant aux constantes éliminées soient identiquement nulles. Si, de plus, les fonctions U_c correspondant à toutes les autres constantes C ne s'annulent point, alors la solution obtenue est une intégrale complète du système (1).

On est ainsi ramené à l'étude des fonctions U , C_c désignant une constante quelconque parmi $C_1, C_2, \dots, C_{2n-2m+1}$. Il va sans dire que, dans certains cas, la forme spéciale des équations (5) nous indique elle-même et immédiatement la marche des éliminations à faire pour calculer une des intégrales en question. Or nous sommes en état d'établir, comme dans le cas particulier étudié dans mon Mémoire mentionné, d'une manière analogue, un théorème démontrant l'existence d'une série de constantes arbitraires dont l'élimination donne toujours le résultat requis.

Dans ce but nous allons calculer les valeurs des dérivées de la fonction U_c par rapport à $x_1, x_2, \dots, x_m$. Il est aisé de mettre ces dérivées sous la forme suivante

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_c}{\partial x_k} &= \frac{\partial}{\partial C} \left(\frac{\partial \bar{z}}{\partial x_k} - \sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i} \frac{\partial x_{m+i}}{\partial C} \right) \\ &+ \sum_{i=1}^{n-m} \left(\frac{\partial p_{m+i}}{\partial C} \frac{\partial x_{m+i}}{\partial x_k} - \frac{\partial p_{m+i}}{\partial x_k} \frac{\partial x_{m+i}}{\partial C} \right). \end{aligned}$$

Désignons par M_k^h le mineur du déterminant Δ correspondant, au signe près, à son élément $\frac{\partial F_h}{\partial p_k}$, de sorte que l'on a

$$\begin{aligned} \Delta &= \sum_{h=1}^m M_k^h \frac{\partial F_h}{\partial p_k}, & \Delta_k &= \sum_{h=1}^m M_k^h \frac{\partial F_h}{\partial \bar{z}}, \\ \Delta_{h\nu} &= \sum_{k=1}^m M_k^h \frac{\partial F_h}{\partial p_{m+\nu}}, & \Delta_k' &= \sum_{h=1}^m M_k^h \frac{\partial F_h}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

Par conséquent en substituant les valeurs des dérivées

$$\frac{\partial \bar{z}}{\partial x_k}, \quad \frac{\partial x_{m+i}}{\partial x_k}, \quad \frac{\partial p_{m+i}}{\partial x_k}$$

résultant des identités (6), nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_c}{\partial x_k} &= \frac{\partial p_k}{\partial C} - \frac{1}{\Delta} \sum_{h=1}^m M_k^h \sum_{i=1}^{n-m} \left(\frac{\partial F_h}{\partial p_{m+i}} \frac{\partial p_{m+i}}{\partial C} - \frac{\partial F_h}{\partial x_{m+i}} \frac{\partial x_{m+i}}{\partial C} \right) \\ &- \frac{\Delta_k}{\Delta} \sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i} \frac{\partial x_{m+i}}{\partial C}. \end{aligned}$$

Mais comme les équations (1) sont identifiées par les valeurs (5), on a encore des identités

$$\sum_{i=1}^{n-m} \left(\frac{\partial F_h}{\partial x_{m+i}} \frac{\partial x_{m+i}}{\partial C} + \frac{\partial F_h}{\partial p_{m+i}} \frac{\partial p_{m+i}}{\partial C} \right) + \sum_{k=1}^m \frac{\partial F_h}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial C} + \frac{\partial F_h}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial C} = 0,$$

pour tous les indices h de 1 à m et pour chacune des constantes C . Il s'ensuit donc

$$\frac{\partial U_c}{\partial x_k} = U_c \frac{\Delta_k}{\Delta}.$$

Moyennant les conditions d'involution du système (1), on démontre aisément que l'expression

$$\sum_{k=1}^m \frac{\Delta_k}{\Delta} dx_k$$

devient une différentielle exacte, en vertu des équations (5). En nommant cette différentielle dV , on obtient par une quadrature la formule suivante

$$(8) \quad U_c = U_c^0 e^{\int_{V_0}^V dV},$$

U_c^0 , V_0 désignant les valeurs initiales des fonctions U_c , V .

La démonstration mentionnée étant un peu longue, on pourrait transformer le problème étudié dans un autre équivalent. En effet, par l'introduction, au lieu de z , d'une nouvelle fonction w définie par l'égalité

$$w(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = 0,$$

les équations transformées ne dépendent plus explicitement de la fonction w elle-même. Il est à remarquer de plus qu'en substituant dans les équations en involution (1) les valeurs

$$p_s = -\frac{q_s}{q},$$

q_s désignant $\frac{\partial w}{\partial x_s}$ et q la dérivée $\frac{\partial w}{\partial z}$, les équations obtenues restent encore en involution, car on a

$$(F'_k, F'_h) = \frac{1}{q} [F_k, F_h],$$

les expressions accentuées représentant les résultats de notre substitution effectuée sur les fonctions correspondantes privées d'accent. Nous n'étudierons que des fonctions w , dont la dérivée q admet une valeur finie, distincte de zéro. Dans ces cas, les conditions d'involution du système (1) entraînent comme conséquence immédiate l'involution du système transformé. La généralité de notre problème ne serait donc pas restreinte, si nous admettions dès à présent que les équations étudiées ne contien-

nent plus la fonction inconnue explicitement. Or, dans ce cas, les coefficients du système (6) ne contenant plus z , ses $2n - m$ premières équations forment un nouveau système aux différentielles totales, indépendamment de la dernière équation (6). Quant à celle-là, son intégrale s'obtient par une quadrature, dès que les $2n - m$ premières équations (6) sont intégrées, comme c'est aussi indiqué dans ma Note citée des *Comptes rendus*. Ce point de vue admis, les dérivées $\frac{\partial U_c}{\partial x_h}$ sont identiquement nulles, et il viendra la formule

$$U_c = U_c^0$$

que l'on pourrait aussi déduire de la formule (8), en y posant la différentielle dV égale à zéro.

Pour fixer les idées, nous bornerons nos considérations à un domaine où les fonctions $F_1, F_2, \dots, F_m$ sont holomorphes relativement à toutes les variables x, z et p , envisagées comme indépendantes. Dans ces conditions, quelles que soient les équations (1), qu'elles renferment la fonction z explicitement ou non, les fonctions U_c s'annulent ou bien diffèrent de zéro en même temps que leurs valeurs initiales U_c^0 . Notre problème revient donc à examiner ces dernières quantités.

Introduisons comme constantes arbitraires les valeurs initiales a_i, b_i, b des variables correspondantes

$$x_{m+i}, \quad p_{m+i}, \quad z = \sum_{v=1}^{n-m} x_{m+v} p_{m+v},$$

en présentant les équations (5) sous la forme nouvelle

$$(9) \quad \begin{cases} z = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_m, a_1, a_2, \dots, a_{n-m}, b, b_1, b_2, \dots, b_{n-m}), \\ p_s = \varphi_s(x_1, \dots, b_{n-m}), \\ x_{m+i} = \omega_i(x_1, \dots, b_{n-m}), \\ s = 1, 2, \dots, n, \quad i = 1, 2, \dots, n - m. \end{cases}$$

Évidemment les $n - m$ dernières équations sont résolubles par rapport à $a_1, a_2, \dots, a_{n-m}$, et l'on a les identités suivantes :

$$U_{a_i}^0 = 0, \quad U_{b_i}^0 = a_i, \quad U_b^0 = 1.$$

Par conséquent le résultat de l'élimination des constantes a_i de

la première équation (9), en vertu des $n - m$ dernières, est une intégrale complète du système (1).

Supposons que nous ayons les équations (9) dans l'hypothèse

$$b = z^0.$$

Si, dans ce cas, les $n - m$ dernières équations (9) étaient résolubles par rapport à $b_1, b_2, \dots, b_{n-m}$, alors leur élimination de la première équation fournirait de même une des intégrales complètes en question.

Enfin, soit

$$b = z^0 = \sum_i a_i b_i,$$

la somme étant étendue aux indices i des valeurs b_i par rapport auxquelles les $n - m$ dernières équations (9) sont résolubles. On trouve encore une des intégrales requises dans ce cas, en éliminant de la première équation (9) les valeurs indiquées b_i et les a_i , correspondant à $\mu \geq i$, définies par les $n - m$ dernières équations (9).

Nous retrouvons ainsi les intégrales complètes du système (1). Pour établir cette méthode nous avons considéré une certaine solution particulière (5) ou (9) du système (6). Nous pourrions particulariser encore davantage le caractère de cette intégrale, afin d'en tirer des solutions du système (1) satisfaisant aux conditions spéciales.

Prenons, par exemple, l'intégrale (5) sous la forme suivante :

$$(10) \quad \begin{cases} z = z_s(x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1}^0, \dots, x_n^0, z^0, p_{m+1}^0, \dots, p_n^0), \\ p_s = p_s(x_1, \dots, p_n^0), \\ x_{m+i} = \omega_i(x_1, \dots, p_n^0), \\ s = 1, 2, \dots, n, \quad i = 1, 2, \dots, n - m, \end{cases}$$

et supposons de plus les constantes arbitraires liées par $n - m + 1$ relations

$$(11) \quad \begin{cases} z^0 = \Theta_0, & p_{m+i}^0 = \frac{\partial \Theta_0}{\partial x_{m+i}^0}, \\ i = 1, 2, \dots, n - m, \end{cases}$$

en désignant par Θ_0 l'expression de la fonction $\Theta(x_1, x_2, \dots, x_n)$ pour les valeurs initiales $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$ de ses variables. D'ailleurs il va sans dire que la fonction Θ doit jouir de la propriété

de représenter par les formules (11) les valeurs z^0, p_{m+i}^0 appartenant au domaine considéré. Les équations (10) et (11) nous donnent

$$(12) \quad \begin{cases} z = \varphi'(x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1}^0, x_{m+2}^0, \dots, x_n^0), \\ p_s = \varphi'_s(x_1, \dots, x_n^0), \\ x_{m+i} = \omega'_i(x_1, \dots, x_n^0), \\ s = 1, 2, \dots, n, \quad i = 1, 2, \dots, n - m, \end{cases}$$

par l'élimination des z^0, p_{m+i}^0 . Évidemment les $n - m$ dernières équations sont résolubles par rapport à $x_{m+1}^0, x_{m+2}^0, \dots, x_n^0$, car les fonctions ω_i deviennent identiques à x_{m+i}^0 pour les valeurs initiales $x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0$, les quantités $x_{m+i}^0, z^0, p_{m+i}^0$ étant prises arbitrairement dans le domaine considéré. Par conséquent, le déterminant fonctionnel

$$D \left(\frac{\omega'_1, \omega'_2, \dots, \omega'_{n-m}}{x_{m+1}^0, x_{m+2}^0, \dots, x_n^0} \right)$$

devient égal à 1 pour les valeurs initiales $x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0$. Enfin, toutes les fonctions

$$1, x_{m+1}^0, \quad i = 1, 2, \dots, n - m$$

sont identiques à zéro, en vertu des relations (11). Donc en éliminant $x_{m+1}^0, x_{m+2}^0, \dots, x_n^0$ de la première équation (12), en vertu des $n - m$ dernières, on obtient une solution des équations (1).

C'est une *intégrale de Cauchy*. En effet, désignant par

$$\Theta(x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n)$$

ce que devient la fonction Θ , quand on y substitue les valeurs initiales $x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0$, il est alors évident que, pour ces dernières valeurs, l'intégrale obtenue z , ainsi que ses dérivées $\frac{\partial z}{\partial x_{m+1}}, \frac{\partial z}{\partial x_{m+2}}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n}$, deviennent relativement égales à

$$\Theta(x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n)$$

et à ses dérivées premières par rapport à $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$.

On pourrait insister sur les formules (10), en leur joignant des

conditions complémentaires pour généraliser, sur le cas qui nous occupe, les considérations de Cauchy ⁽¹⁾, en évitant cependant les objections auxquelles est sujette sa méthode, objections qui ont conduit à l'introduction des notions de S. Lie sur les intégrales des équations aux dérivées partielles. Or toutes les solutions que l'on pourrait en avoir s'obtiennent aussi en partant d'une intégrale complète. Cette assertion pourrait être évidemment admise, *a priori*, d'après ce qui vient d'être dit, mais il est aussi aisé de la démontrer rigoureusement, comme l'avait fait Jacobi ⁽²⁾ pour une équation unique.

SUR UNE MANIÈRE DE REPRÉSENTER GÉOMÉTRIQUEMENT UN SYSTÈME DE TROIS VARIABLES COMPLEXES;

Par M. LÉON AUTONNE.

N variables complexes sont toujours assimilables aux N coordonnées d'un point X dans un espace $\mathcal{R}$, à N dimensions complexes. Comme X dépend de $2N$ paramètres réels, X peut être représenté, dans un espace réel R à $2N$ dimensions, par un couple Ξ de deux points x et x' . Il est loisible d'employer dans R les coordonnées homogènes

$$X_j, \quad j = 1, 2, \dots, N + 1$$

et la dualité.

Une variété de $\mathcal{R}$ à m dimensions complexes, fournie par $N - m$ équations entre les X_j , est représentée dans R par une variété M_{2m} de ∞^{2m} couples Ξ .

Dans la présente Note, je cherche à préciser ces théories, dans le cas $N = 3$, où R est l'espace ordinaire à trois dimensions. J'emploie surtout les couples Ξ où le point x' est à l'infini.

Après avoir, dans le Chapitre I, introduit les couples, je construis, dans le Chapitre II, les variétés M_1 et M_2 qui représentent

⁽¹⁾ Exercices d'Analyse et de Physique mathématique. (II) p. 187-189.

⁽²⁾ Gesammelte Werke, Bd V, S. 307, n° 4.

dans R le plan (et, par dualité, le point) et la droite de l'espace imaginaire $\mathcal{R}$.

Dans le couple Ξ des deux points x et x' , je distingue le *support*, qui est la droite xx' , un point *modulaire* ζ et trois angles *arguments* ω , φ et ψ .

Le modulaire ζ et les arguments ω , φ et ψ s'introduisent d'une façon projective et géométrique (considération d'un certain système de quadriques, autopolaires par rapport au tétraèdre de référence), qui est analogue à celle du module et de l'argument, pour la variable imaginaire unique.

Après avoir, au Chapitre III, établi les propriétés du modulaire et des arguments, je construis, au Chapitre IV, le point imaginaire X , ou le couple Ξ , qui admet des arguments et un modulaire donnés.

On a à considérer des intersections de complexes et de congruences de droites, ainsi qu'une certaine surface réglée du quatrième degré.

J'interprète aussi très simplement la substitution linéaire quaternaire canonique

$$S = |X_j - X_j e^{i\theta_j} \quad j = 1, 2, 3, 4,$$

où les angles θ sont constants. S ne modifie pas le modulaire; elle peut être envisagée comme une généralisation de la *rotation autour de l'origine des coordonnées*, rotation qui représente la substitution canonique

$$|t - te^{i\pi}|$$

pour la variable complexe unique t dans la conception habituelle des imaginaires.

Dans un Travail ultérieur, j'espère arriver à représenter de même la S générale à coefficients complexes

$$S = \left| X_j - \sum_k X_k (a_{jk} + i b_{jk}) \right|.$$

$$a_{jk}, b_{jk} = \text{réels}; \quad i = \sqrt{-1}; \quad j, k = 1, 2, 3, 4.$$

On laisse entièrement de côté le cas $N = 2$. Le lecteur le rétablirait sans peine. Toutes les théories subsistent avec de très notables simplifications.

Il ne serait pas non plus difficile d'introduire les modulaires et les arguments dans le cas $N \geq 3$.

CHAPITRE I.

COORDONNÉES HOMOGÈNES COMPLEXES.

1° Soient, dans un espace réel à trois dimensions R,

$$x_j \quad (j = 1, 2, 3, 4)$$

quatre quantités réelles, coordonnées homogènes d'un point x . La position de x dans R dépend seulement des quotients

$$x_j/x_k \quad (k = 1, 2, 3, 4; k \neq j).$$

Pour déterminer les valeurs absolues des x_j , on prendra quatre constantes numériques réelles e_j et l'on écrira

$$x_0 = \sum_j e_j x_j = \sum e x = 1.$$

Dès lors, si x a ses coordonnées proportionnelles à quatre quantités t_j , on écrira

$$x_j = t_j t_0^{-1}, \quad t_0 = \sum e t.$$

2° Pour le plan e , $\sum e t = 0$, la règle conduirait à attribuer à un point x' de e des coordonnées infinies. Aussi e se nomme-t-il *plan de l'infini*.

J'agirai un peu autrement. Si x' , situé sur e , a ses coordonnées x'_j proportionnelles à quatre quantités connues t_j , j'écrirai, pour fixer la valeur absolue des x'_j ,

$$x'_j = t_j \left(\sum_i t_i^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{d'où} \quad \sum_i x_j'^2 = 1.$$

Les x'_j jouent ainsi un rôle analogue à celui des cosinus directeurs dans la Géométrie métrique ordinaire.

3° Un plan u de R aura de même ses quatre coordonnées ho-

mogènes u_j liées par la relation $u_0 = \sum_j g_j u_j = \sum g u = 1$. Les g_j seront quatre constantes numériques arbitraires. Le point g , de coordonnées g_j , sera le point de l'infini. Un plan u' passant par g aura encore la valeur absolue de ses coordonnées u'_j donnée par la condition $\sum u'^2 = 1$.

4° Considérons maintenant quatre quantités complexes X_j , liées par la relation $X_0 = \sum e X = 1$, les e_j étant les mêmes qu'au 1°. Je dirai que les X_j sont les *coordonnées homogènes* d'un point *imaginaire* X , dans un *espace imaginaire* $\mathcal{R}$, à trois dimensions imaginaires ou à six dimensions réelles.

Posons $X_j = \xi_j + i\eta_j$, $i = \sqrt{-1}$. On aura, par hypothèse,

$$1 = X_0 = \xi_0 + i\eta_0, \quad \text{d'où} \quad \xi_0 = 1, \eta_0 = 0.$$

Ainsi, les ξ_j sont les coordonnées x_j d'un point x de l'espace R ; dans le même espace R , les η_j sont proportionnelles aux coordonnées x'_j d'un point x' situé dans le plan de l'infini e (2°). On écrira donc $\eta_j = \sigma x'_j$ et $X_j = x_j + i\sigma x'_j$.

Les six paramètres dont dépend le point imaginaire X sont :

Les quatre quantités x_j , liées par $\sum e x = 1$ et équivalentes à trois paramètres;

Les quatre quantités x'_j liées par les deux relations

$$\sum e x' = 0, \quad \sum x'^2 = 1$$

et équivalentes à deux paramètres;

Le paramètre σ .

La droite $\overline{xx'}$ ou D se nommera le *support* du point imaginaire X .

5° Les six coordonnées homogènes de D sont les six déterminants $(xx')_{jk} = x_j x'_k - x_k x'_j$. Le point X dépend seulement des rapports

$$\frac{X_j}{X_k} = \frac{x_j + i\sigma x'_j}{x_k + i\sigma x'_k} = \frac{x_j x'_k - \sigma^2 x'_j x'_k + i\sigma (x x')_{jk}}{x_k^2 - \sigma^2 x_k'^2}.$$

On écrira souvent aussi (jk) pour la coordonnée $(x, x')_{jk}$ du support.

On peut dire aussi que les six paramètres réels dont dépend X sont :

Les quatre paramètres qui définissent le support D;

Un paramètre qui définit la position de x sur D;

Le paramètre σ .

La figure de l'espace réel R définie par D, x , x' , σ se nommera le *couple* Ξ , qui représente, dans l'espace réel R, le point X de l'espace imaginaire $\mathcal{R}$.

6° Si un point y est sur D, on a $y_j = x_j + \lambda x_j$ et l'on dira que λ est la *distance* du point y au point x . Si le paramètre réel λ prend la valeur complexe $i\tau$, y est précisément X. On pourra dire que τ est le *quotient par i de la distance de X à x* . Cela donne la signification géométrique de τ . Je nommerai τ *diamètre* du couple Ξ . Les couples de diamètre nul représentent des points X dégénérés en points réels; il en est de même pour les couples dont le support D est indéterminé, x étant venu en x' .

7° Pareillement, un plan imaginaire U de l'espace $\mathcal{R}$ aura pour coordonnées les quatre quantités (3°)

$$U_j = u_j + i\tau u'_j; \quad u_0 = 1; \quad u'_0 = \sum u_j^2 = 1 - \sigma^2$$

et sera représenté par le *couple* H de l'espace réel R, figure définie par les deux plans u et u' , par leur intersection (*support* du couple) et par le *diamètre* τ .

8° En général, les raisonnements géométriques dans l'espace $\mathcal{R}$ ne fourniront pas les coordonnées X_j ou le point X, mais seulement quatre quantités $\xi_j + i\tau_j$ proportionnelles aux X_j . Comment construirons-nous le couple Ξ ?

On posera $\varphi X_j = \xi_j + i\tau_j$, d'où $\varphi = \xi_0 + i\tau_0$,

$$X_j = \frac{\xi_j + i\tau_j}{\xi_0 + i\tau_0} = \frac{\xi_j \xi_0 + \tau_j \tau_0 + i(\tau_j \xi_0 - \xi_j \tau_0)}{\xi_0^2 + \tau_0^2},$$

$$x_j = \frac{\xi_j \tau_0 - \tau_j \xi_0}{\xi_0^2 + \tau_0^2}, \quad x'_j = \frac{\tau_j \xi_0 + \xi_j \tau_0}{\xi_0^2 + \tau_0^2}.$$

Les points y et z , dont les coordonnées sont $\xi_j \xi_0^{-1}$ et $\tau_j \tau_0^{-1}$, sont sur le support D.

9° Prenons sur une droite quelconque D' de l'espace R deux points quelconques y et z . Quel sera le point X dont les coordonnées sont proportionnelles à $y_j + iz_j$?

Il suffit, dans le calcul du ξ^0 , de faire $\xi_0 = \tau_0 = 1$, $\xi_j = y_j$, $\tau_j = z_j$. Il viendra

$$(1) \quad x_j = \frac{z_j - \tau_j}{2}, \quad \sigma x'_j = \frac{z_j + \tau_j}{2}.$$

Ainsi X est aussi représenté par deux points y et z de l'espace R, ce qui équivaut encore à six paramètres.

Nous pourrions parler de couples $\overline{yz}$ dont aucun point n'est sur le plan de l'infini e . La droite qui joint les deux points du couple en est le support.

Les formules (1) donnent aussi

$$z_j = x_j - \sigma x'_j, \quad y_j = x_j + \sigma x'_j.$$

Sur le support, les deux points y et z sont harmoniquement placés par rapport à x et à x' , les deux points du couple Ξ . En attribuant au mot *distance* le sens expliqué au 6°, on peut dire que x est le milieu du segment yz et que le diamètre σ du couple Ξ est la demi-longueur du segment yz .

10° En résumé, on représente tous les points X de l'espace R, en réunissant deux à deux dans un même couple les divers points de l'espace R. Si les deux points d'un même couple coïncident, X dégénère en un point réel, le support devenant indéterminé.

11° La formule

$$(1) \quad \sigma x'_j = \frac{z_j - y_j}{2}$$

du 9° permet de faire entrer le facteur σ dans x'_j . Dorénavant, le couple yz étant connu, j'écrirai simplement

$$X_j = x_j + ix'_j,$$

où les valeurs absolues des x'_j ne seront plus définies par la

règle $\sum x'^2 = 1$ donnée au 2°, mais par la formule (1) ci-dessus.

Par contre, pour déterminer complètement les couples, il faudra donner non seulement la position de x' sur le plan de l'infini, mais encore la *valeur absolue* des x'_j .

Dans la formule (1) ci-dessus, le segment yz a

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{pour demi-longueur, le diamètre } \tau \text{ du couple } \Xi, \\ \text{pour cosinus directeurs, les } x'_j, \\ \text{pour composantes, les différences } z_j - y_j, \end{array} \right.$$

en empruntant le langage de la Géométrie métrique et ordinaire. Écrire

$$X_j = x_j + ix'_j \quad \text{au lieu de} \quad X_j = x_j + i\tau x'_j,$$

c'est représenter par x'_j non plus le cosinus directeur, mais la composante du demi-segment yz .

12° Pareillement, le plan imaginaire U aura pour coordonnées

$$U_j = u_j + iu'_j,$$

à condition de connaître non seulement la position du plan u' autour du point g de l'infini (3°), mais encore les valeurs absolues des u'_j .

CHAPITRE II.

PLAN, POINT, DROITE COMPLEXES.

13° Le point imaginaire X de l'espace $\mathcal{R}$ dépend de trois paramètres complexes ou de six paramètres réels, qui sont ceux du couple représentatif Ξ dans l'espace réel R. L'équation

$$F(X) = F(X_1, \dots, X_4) = 0$$

d'une *surface* S dans $\mathcal{R}$ équivaut donc pour Ξ à deux relations. S est représentée dans R par une multiplicité de 2^4 couples M_v .

La *courbe* T

$$F(X) = F_1(X) = 0$$

de $\mathcal{R}$ est représentée dans R par une multiplicité M_2 de 2^2 couples.

Enfin, les trois équations $F(X) = F_1(X) = F_2(X) = 0$ fournissent, en général, un nombre fini de couples.

Je vais construire M_1 et M_2 lorsque la figure de $\mathcal{A}$ est :

un plan U

$$F(X) = \sum_j U_j X_j = 0, \quad U_j = \text{const.};$$

un point X

$$\Phi(U) = \sum_j X_j U_j, \quad X_j = \text{const.};$$

une droite, intersection de deux plans U et V donnés, ou jonction des deux points X et Y donnés.

14° Soient donc un plan U, de coordonnées

$$U_j = u_j - i u'_j,$$

donné et un point variable X, de coordonnées $X_j = x_j + i x'_j$. Il faut exprimer que X est sur U, autrement dit que $\sum UX = 0$. Il vient

$$\sum UX = \sum (u - i u')(x - i x') = \sum ux - \sum u'x' + i \left\{ \sum u'x + \sum ux' \right\}$$

et

$$(1) \quad \sum ux = \sum u'x', \quad \sum u'x = \sum ux' = 0.$$

Il s'agit d'interpréter géométriquement ces relations.

15° Nommons Δ la droite réelle de l'espace R intersection des deux plans réels donnés u et u' . Le plan mobile $u + \mu u'$, de coordonnées $u_j + \mu u'_j$, tournant, pour μ variable, autour de Δ , découpe sur le support D de X une suite projective de points $x + \lambda x'$, de coordonnées $x_j + \lambda x'_j$.

On aura $\mu = \varrho(\lambda) = \frac{a\lambda + b}{c\lambda + d}$; les coefficients a, b, c, d sont faciles à obtenir. Il vient

$$0 = \sum (x - \lambda x')(u - \mu u') = \sum ux + \lambda \sum ux' - \mu \sum u'x - \lambda \mu \sum u'x';$$

d'où

$$\mu = \frac{-\lambda \sum ux' - \sum ux}{\lambda \sum u'x' - \sum u'x}.$$

et

$$a = -\sum u x, \quad b = -\sum u x', \quad c = \sum u x', \quad d = \sum u' x.$$

Le déterminant $ad - bc$ de la substitution linéaire fractionnaire $\mathcal{Q}$ est

$$\sum u x \sum u' x' - \sum u x' \sum u' x = \sum (x x')_{jk} u u'_{jk}, \\ (x x')_{jk} = x_j x'_k - x_k x'_j, \dots, \quad j, k = 1, 2, 3, 4, \quad j \neq k.$$

$ad - bc$ est le moment mutuel des deux droites D et Δ . Nous admettrons que ce moment est $\neq 0$.

16° Les relations (1) du 14° s'écrivent

$$(2) \quad b = c = a = d = 0$$

et expriment que $i = \mathcal{Q}(i)$, -- $i = \mathcal{Q}(-i)$.

L'équation fondamentale quadratique relative à la substitution $\mathcal{Q}$ a pour racines i et $-i$. Cela est conforme au 13°, puisque le plan U, c'est-à-dire $u + iu'$, découpe sur le support D précisément le point X, ou $x + ix'$.

Il viendra, sous le bénéfice des (2),

$$\mu = \mathcal{Q}(\lambda) = \frac{\lambda \dots b}{-\frac{b}{a} \lambda + 1}.$$

Posons

$$\frac{b}{a} = \tan \theta, \quad \lambda = \tan \Lambda, \quad \mu = \tan M.$$

On a

$$\tan M = \frac{\tan \Lambda + \tan \theta}{1 - \tan \Lambda \tan \theta} = \tan(\Lambda + \theta), \\ M - \Lambda = \theta.$$

La *fig. 1*, où l'on a supposé la droite Δ perpendiculaire au plan du papier et les plans, passant par Δ , vus par la tranche, donne la disposition des divers plans $u + \mu u'$ et points $x + \lambda x'$ remarquables.

Cette figure résout les problèmes relatifs à la construction d'un couple Ξ , situé sur la multiplicité M_4 , qui représente le plan complexe U.

17^e Construire Ξ connaissant x' . — x' est sur le plan

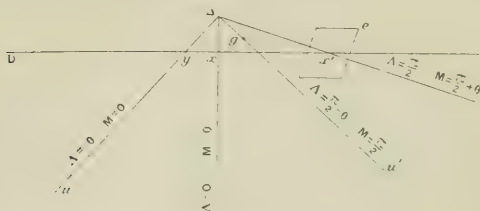
$$u + u' \tan \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right)$$

et

$$\sum x' \left[u + u' \tan \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) \right] = 0, \quad \tan \theta = \frac{\sum u' x'}{\sum u x'}.$$

L'angle θ est connu dès qu'on possède, non pas même les coor-

Fig. 1.



données absolues de x' , mais la position de x' sur le plan e de l'infini. Connaissant θ , on aura le plan $u + u' \tan \theta$ et x sera quelconque dans ce plan. Les ∞^2 points x' de e , combinés aux ∞^2 points du plan $u + u' \tan \theta$, fournissent les ∞^4 couples Ξ de M_4 .

Construire Ξ connaissant x . — On obtient immédiatement, combinant x avec Δ , le plan $u + u' \tan \theta$ et l'angle θ , ainsi que le plan $u + u' \tan \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right)$. Ce dernier plan coupe e suivant une droite $\overline{x'}$ sur laquelle x' est quelconque. Les ∞^3 points x de l'espace R et les ∞ points x' de la droite $\overline{x'}$ fournissent les ∞^4 couples Ξ . x' une fois choisi sur $\overline{x'}$, on déterminera les valeurs absolues des x'_j par la relation $y_j = x_j + \lambda x'_j = x_j - x'_j \tan \theta$, qui exprime que le point y est sur le plan u . D'ailleurs y est donné par l'intersection de u avec le support.

Construire Ξ connaissant le support D . — D perce le plan e de

l'infini en x' . On obtiendra $\mathfrak{h}$, x comme au premier problème sans avoir besoin de connaître les valeurs absolues des x'_j . Ces dernières s'obtiendront, grâce au point y , comme au second problème. Les ∞^1 droites de l'espace R sont les supports des ∞^1 couples Ξ de M_1 .

18° On construira par des procédés analogues (dualité) les ∞^1 couples H qui représentent les ∞^2 plans complexes U qui passent par un point X donné.

19° Passons maintenant à la multiplicité M_2 de R , lieu des ∞^2 couples Ξ , qui représentent les ∞ points X de la droite intersection des deux plans U , ou $u + iu'$, et V , ou $v + iv'$.

Nommons Δ_1 et Δ_2 les deux droites intersections de u avec u' ou de v avec v' ; on pose $u(t) = \sum u_j t_j$, etc.,

t_j = coordonnée courante.

Les points $x + \lambda x'$ du support D déterminent, avec Δ_1 et Δ_2 respectivement, les faisceaux projectifs des plans mobiles $u + \mu u'$ et $v + \nu v'$. Si l'on pose

$$\lambda = \tan \Lambda, \quad \mu = \tan M, \quad \nu = \tan N,$$

on aura (16°)

$$M - \Lambda = \theta, \quad N - \Lambda = \varphi, \quad M - N = \theta - \varphi,$$

où les angles θ et φ ne dépendent plus de Λ . Or on a

$$\tan M = \mu = \frac{u(t)}{u'(t)}, \quad \tan N = \nu = \frac{v(t)}{v'(t)},$$

t étant le point courant sur le support. Ensuite

$$\begin{aligned} K = \tan(\theta - \varphi) &= \tan(M - N) = \frac{\tan M - \tan N}{1 + \tan M \tan N} = \frac{P(t)}{Q(t)} \\ &= \frac{\frac{u(t)}{u'(t)} - \frac{v(t)}{v'(t)}}{1 + \frac{u(t)}{u'(t)} \cdot \frac{v(t)}{v'(t)}} = \frac{v(t)u'(t) - u(t)v'(t)}{u(t)v'(t) + u'(t)v(t)}. \end{aligned}$$

Un point quelconque t du support D est sur la quadrique s ,

$P(t) - KQ(t) = 0$, mobile avec K du faisceau S . D est une génératrice de s .

20° s passe par quatre droites fixes : Δ_1, Δ_2 , et, *algébriquement parlant*,

$$u' - iu = v' - iv = 0, \quad u' + iu = v' + iv = 0.$$

Cette condition détermine le faisceau S , car elle définit une quadrique s , précisément au paramètre $K = \tan(\theta - \varphi)$ près. Les ∞ génératrices de chacune des ∞ quadriques s constituent une congruence $\mathfrak{C}$. En vertu de ce qui précède : *sont situés sur la congruence $\mathfrak{C}$, les ∞^2 supports D des couples Ξ de la multiplicité M_2 .*

21° Nommons sur s :

premier système de génératrices, celui auquel appartiennent Δ_1 et Δ_2 ;

second système, celui des génératrices qui rencontrent Δ_1 et Δ_2 .

Les supports D appartiendront au premier système.

Cela permet de construire les supports D : prenons un point quelconque z de R ; par z passe une quadrique s_z de S , qui se trouve ainsi connue; D est la génératrice du premier système, issue de z sur s_z .

22° Les considérations précédentes permettent de construire les ∞^2 couples Ξ de M_2 .

Les supports s'obtiennent comme il vient d'être expliqué.

Un support D , pris comme il convient, sur la congruence $\mathfrak{C}$, perce le plan e de l'infini en un point x' , dont se trouve connue la position sur e , mais non les coordonnées absolues.

La construction de x s'achèvera, au moyen de la droite Δ_1 ou Δ_2 , comme au premier problème du 17°. D perce le plan u par exemple en un point z , qui se trouve ainsi connu. En égard à z , on déterminera comme au deuxième problème du 17° les valeurs absolues des x'_j . Ξ sera ainsi complètement construit.

23° Exprimons, comme au 14°, que le point X , ou $x + ix'$, est situé sur chacun des deux plans U , ou $u + iu'$, et V , ou $v + iv'$.

On aura

$$0 = \sum u x - \sum u' x = \sum u x - \sum u x',$$

$$0 = \sum v x - \sum v' x' = \sum v' x - \sum v x'.$$

Éliminons les x'_j entre ces quatre relations et une cinquième

$$\sum e x' = 0,$$

qui exprime que x' est sur le plan de l'infini.

On aura

$$\begin{vmatrix} u'_1 & u'_2 & u'_3 & u'_4 & -\sum u x \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & \sum u' x \\ v'_1 & v'_2 & v'_3 & v'_4 & -\sum v x \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & \sum v' x \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Quand x' parcourt e , x est situé sur un plan P dont l'équation vient d'être écrite.

P ne dépend que des cinq plans u, u', v, v', e .

CHAPITRE III.

MODULAIRE ET ARGUMENTS.

24° Sur le support D , lieu des points $x = \lambda x'$, pour λ variable, l'équation obtenue en annulant un polynôme $f(\lambda)$, de degré q , fournit q points réels ou imaginaires. Si, pour $q = 2$, on prend $f(\lambda) = \lambda^2 + 1$, on a les deux points $x + ix'$ et $x - ix'$, c'est-à-dire X et son conjugué $X^{(i)}$. Si, dans l'équation $\mathfrak{A}$,

$$A_1 \lambda^2 + 2A_2 \lambda + A_3 = 0,$$

on a $A_1 + A_3 = 0$, c'est que (en vertu de théories classiques sur les formes quadratiques binaires) les deux points fournis par $\mathfrak{A}$ sont harmoniquement placés par rapport à X et $X^{(i)}$.

Je dirai, pour abrégér, que les deux points fournis par $\mathcal{A}$ sont *symétriques* et qu'une quadrique qui passe par ces deux points coupe *symétriquement* le support D.

25^e Considérons le système $\mathcal{M}$ des ∞^3 quadriques M

$$0 = \sum \mu t^2; \quad \mu_j = \text{paramètre}; \quad t_j = \text{coordonnée courante.}$$

$\mathcal{M}$ sera, par rapport au tétraèdre de référence $\bar{\epsilon}$, *autopolaire*; autrement dit, chaque quadrique M aura pour pôle et plan polaire correspondants un sommet et la face opposée de $\bar{\epsilon}$. Cette propriété suffit pour définir le système $\mathcal{M}$.

Je désignerai par M_a une quadrique M qui passe par le point a de l'espace. Il y aura ∞^2 quadriques M_a , et ∞ quadriques M_{ab} qui passent aussi par le point b .

Les ∞ quadriques M_{ab} passent par une même biquadratique gauche G_{ab} , dont les équations seront

$$0 = \sum \mu t^2 = \sum \mu' t^2 = \sum \mu a^2 = \sum \mu b^2 = \sum \mu' a^2 = \sum \mu' b^2.$$

ou, plus simplement,

$$t_j^2 = a_j^2 + \varphi b_j^2, \quad \varphi = \text{paramètre variable.}$$

Enfin, il y aura une seule quadrique M_{abc} , sauf situation particulière des trois points a , b et c .

Il y aura ∞^1 (autant que de droites dans l'espace) biquadratiques G , puisque, pour $t_j^2 = \gamma_j^2$, chacune des quadriques M, dont il y a ∞^3 en tout, devient un plan.

Enfin, une quadrique M sera complètement déterminée par la condition d'admettre pour génératrice une droite donnée ω de l'espace.

Si ω est la droite des deux points p et q , l'équation en σ

$$\sum \mu (p - \sigma q)^2 = 0$$

doit être une identité et les μ sont déterminés par les relations

$$\sum \mu p^2 = \sum \mu q^2 = \sum \mu p q = 0.$$

26° Soit maintenant une droite D, support d'un couple Ξ et lieu, pour λ variable, du point $x + \lambda x'$. Une quadrique M coupe D en deux points donnés par l'équation A.

$$0 = \sum \mu (x + \lambda x')^2 = \sum \mu x^2 + 2\lambda \sum \mu x x' + \lambda^2 \sum \mu x'^2.$$

Pour que M coupe D *symétriquement* au sens du 24°, il faut et il suffit que

$$0 = \sum \mu x^2 + \sum \mu x'^2 = \sum \mu (x^2 + x'^2).$$

Si l'on désigne par z_j la racine carrée positive de $x_j^2 + x'_j{}^2$, on voit que :

Toutes les quadriques M, qui coupent D symétriquement, passent par un point ζ , dont les coordonnées ζ_j sont proportionnelles aux z_j .

Les z_j seront les *modules* du couple Ξ et ζ en sera le (point) *modulaire*.

Les modules et le modulaire qui viennent d'être introduits sont relatifs au tétraèdre de référence. Mais les définitions sont purement géométriques et l'on peut parler des *modules* et du *modulaire* d'un couple Ξ , par rapport à un tétraèdre quelconque.

27° Parmi les diverses quadriques M qui coupent symétriquement le support D du couple Ξ , figure celle pour laquelle D est génératrice. Pour celle-là, l'équation A, du 26° est une identité : on a

$$0 = \sum \mu x^2 = \sum \mu x'^2 = \sum \mu x x'$$

et la condition de symétrie

$$\sum \mu (x^2 + \dots + x'^2) = 0$$

est satisfaite.

Ainsi, la quadrique M, dont D est génératrice, passe par le modulaire ζ .

Supposons, au contraire, le modulaire ζ donné. D sera une génératrice d'une certaine quadrique M_ζ (25°). Il y a ∞^2 qua-

driques M_ζ et, sur chacune, ∞ génératrices. Ces ∞^3 génératrices formeront un complexe $\mathfrak{G}$, qui sera connu dès que ζ le sera.

Il importe d'étudier ce complexe $\mathfrak{G}$ d'un peu plus près.

28° Reprenons les biquadratiques G_{ab} , dont il y a ∞^4 , du 25°. Il y aura ∞^2 biquadratiques G_ζ passant par ζ et chacune comportera ∞^2 cordes. Je dis que *ces diverses cordes sont précisément les droites du complexe $\mathfrak{G}$* .

Prenons sur $\mathfrak{G}$ une droite D, génératrice d'une certaine quadrique M_p , laquelle passe par ζ . Une autre quadrique M_ζ est percée par D en deux points a et b , qui sont sur la courbe $G_{\zeta ab}$, intersection de M_p avec M_ζ . D est donc une corde d'une certaine courbe G_ζ , au moins.

Réciproquement, considérons une courbe $G_{\zeta ab}$ et une corde D' ou ab de ladite biquadratique. Le système $\mathfrak{M}$ des quadriques M contient un faisceau de ∞ quadriques, toutes passant par $G_{\zeta ab}$. Soit M la quadrique mobile du faisceau. Achévon de fixer M en la faisant passer par un troisième point c de D'. M, qui passe déjà par ζ , passera par a , b et c , c'est-à-dire admettra D' pour génératrice. La corde D' est sur le complexe $\mathfrak{G}$.

Prenons un point quelconque γ de l'espace. Les deux points γ et ζ définissent une courbe G. Un plan quelconque Υ passant par γ coupe G en quatre points $\gamma, \gamma', \gamma'', \gamma'''$; il y a dans le plan sécant trois cordes

$$\gamma\gamma', \gamma\gamma'', \gamma\gamma'''$$

issues de γ . Ainsi, *les cordes de G issues de γ sont les arêtes d'un cône du troisième degré*. Donc, *le complexe $\mathfrak{G}$ est du degré trois au moins*. On construira plus loin (30°) l'équation de $\mathfrak{G}$ et l'on verra que le complexe est effectivement du degré trois.

29° Sur le support D, lieu des points $x + \lambda x'$, cherchons le point qui est sur la face $t_j = 0$ du tétraèdre $\bar{e}$ de référence. On aura

$$0 = x_j + \lambda x'_j, \quad \lambda = -\cot \alpha_j = -\frac{x_j}{x'_j},$$

ce qui donne l'angle α_j ; il vient

$$\frac{x'_j}{\sin \alpha_j} = \frac{x_j}{\cos \alpha_j};$$

mais $z_j^2 = x_j^2 + x_j'^2$ (26^o), donc

$$x_j = z_j \cos \alpha_j, \quad x_j' = z_j \sin \alpha_j.$$

Les angles α sont, bien entendu, tels que

$$1 = \sum e x = \sum e z \cos \alpha, \quad 0 = \sum e x' = \sum e z \sin \alpha.$$

La coordonnée-points homogène

$$(jk) = \begin{vmatrix} x_j & x_k \\ x_j' & x_k' \end{vmatrix} \quad (j, k = 1, 2, 3, 4, j \neq k)$$

du support $\overline{xx'}$ ou D, est ainsi

$$(jk) = z_j z_k \begin{vmatrix} \cos \alpha_j & \cos \alpha_k \\ \sin \alpha_j & \sin \alpha_k \end{vmatrix} = z_j z_k \sin(\alpha_k - \alpha_j).$$

On peut aussi dire que les (jk) sont proportionnelles aux $\xi_j \xi_k \sin(\alpha_k - \alpha_j)$, les ξ_j étant les coordonnées du modulaire ξ (26^o).

Les six différences $\alpha_k - \alpha_j$ sont exprimables au moyen de trois angles seulement ω, ψ et φ , qui seront les trois arguments du couple Ξ . Les angles α_j ne figurent que par leurs différences et ne sont déterminés, pour D donnée, qu'à une constante additive commune près.

Les trois arguments ω, φ et ψ peuvent être choisis de diverses façons. J'écrirai

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \alpha_4 - \alpha_3 = 2\omega,$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \alpha_1 - \alpha_2 = 2\varphi, & \alpha_3 - \alpha_4 = 2\psi, \\ \text{d'où} & \\ \alpha_2 - \alpha_3 = \omega - \varphi - \psi, & \alpha_1 - \alpha_4 = \omega + \varphi + \psi, \\ \alpha_3 - \alpha_1 = \omega - \varphi + \psi, & \alpha_2 - \alpha_4 = \omega + \varphi - \psi. \end{array} \right.$$

30^o On est maintenant à même d'obtenir l'équation du complexe $\mathfrak{G}$ en coordonnées courantes (jk) .

Cherchons les coefficients μ_j de la quadrique M qui passe par le modulaire ξ et admet $\overline{xx'}$ ou D pour génératrice. On a, pour M, en coordonnées courantes t_j , $\sum \mu t^2 = 0$, et l'équation en λ

$$0 = \sum \mu (x'x - \lambda x'^2) = \sum \mu x x^2 + \lambda \sum \mu x x' - \lambda^2 \sum \mu x'^2$$

est une identité; d'où, sous le bénéfice de $x_j = z_j \cos \alpha_j$,
 $x'_j = z_j \sin \alpha_j$,

$$0 = \sum \mu z^2 \cos^2 \alpha = \sum \mu z^2 \cos \alpha \sin \alpha = \sum \mu z^2 \sin^2 \alpha.$$

Les μ_j sont proportionnels aux déterminants de la matrice

$$\begin{vmatrix} z_1^2 \cos^2 \alpha_1 & z_2^2 \cos^2 \alpha_2 & \dots \\ z_1^2 \cos \alpha_1 \sin \alpha_1 & z_2^2 \cos \alpha_2 \sin \alpha_2 & \dots \\ z_1^2 \sin^2 \alpha_1 & z_2^2 \sin^2 \alpha_2 & \dots \end{vmatrix},$$

ou, ce qui revient au même, proportionnels aux quatre déterminants de la matrice

$$\begin{vmatrix} z_1^2 & z_2^2 & \dots \\ z_1^2 \cos 2\alpha_1 & z_2^2 \cos 2\alpha_2 & \dots \\ z_1^2 \sin 2\alpha_1 & z_2^2 \sin 2\alpha_2 & \dots \end{vmatrix}.$$

Si ρ est un facteur de proportionnalité, on a, par un calcul facile,

$$\begin{aligned} \rho \mu_1 z_1^2 &= \sin 2(\alpha_2 - \alpha_3) + \sin 2(\alpha_3 - \alpha_4) + \sin 2(\alpha_4 - \alpha_2), \\ -\rho \mu_2 z_2^2 &= \sin 2(\alpha_3 - \alpha_4) + \sin 2(\alpha_4 - \alpha_1) + \sin 2(\alpha_1 - \alpha_3), \\ \rho \mu_3 z_3^2 &= \sin 2(\alpha_4 - \alpha_1) + \sin 2(\alpha_1 - \alpha_2) + \sin 2(\alpha_2 - \alpha_4), \\ -\rho \mu_4 z_4^2 &= \sin 2(\alpha_1 - \alpha_2) + \sin 2(\alpha_2 - \alpha_3) + \sin 2(\alpha_3 - \alpha_1). \end{aligned}$$

Une formule bien connue de Trigonométrie élémentaire permet de transformer les seconds membres. Modifiant ρ , on aura

$$\begin{cases} \rho \mu_1 z_1^2 = [23][34][12] \\ \rho \mu_2 z_2^2 = -[34][41][13] \\ \rho \mu_3 z_3^2 = [41][12][24] \\ \rho \mu_4 z_4^2 = -[12][23][31] \end{cases} \quad [jk] = \sin(\alpha_j - \alpha_k).$$

Mais on a vu (29^o) que les coordonnées (jk) de droites sont proportionnelles à $z_j z_k \sin(\alpha_k - \alpha_j)$, c'est-à-dire à $z_j z_k [jk]$. Il viendra finalement, modifiant encore ρ ,

$$\begin{aligned} \rho \mu_1 &= (23)(34)(42), \\ \rho \mu_2 &= -(34)(41)(13), \\ \rho \mu_3 &= (41)(12)(24), \\ \rho \mu_4 &= -(12)(23)(31). \end{aligned}$$

Tels sont les coefficients μ de la quadrique M qui admet pour génératrice la droite D , qui a les (jk) pour coordonnées-points. Exprimons que M passe par le modulaire ζ , il viendra finalement l'équation du complexe $\mathfrak{G}$ afférent à ζ , savoir

$$\Phi = \zeta_1^2(23)(34)(42) - \zeta_2^2(34)(1111) - \dots = 0.$$

31° Φ est, par rapport aux coordonnées-points courantes (jk) , un polynôme *cubique*. Soient y un point quelconque de l'espace, Y un plan quelconque passant par y . Il y aura trois droites du complexe $\mathfrak{G}$, issues de y , dans Y . Rapprochant ce résultat du 28°, *in fine*, on a la proposition suivante : *Les droites du complexe $\mathfrak{G}$, issues de y , sont les cordes menées de y aux différents points de la biquadratique gauche $G_{\zeta y}$.*

32° Les explications précédentes permettent de construire immédiatement les modules z_j et le modulaire ζ d'un couple Ξ donné.

Passons aux problèmes inverses, relatifs à la construction des couples Ξ_ζ de modulaire ζ donné. Il y a ∞^3 couples Ξ_ζ .

PROBLÈME I. — *Construire Ξ_ζ connaissant x .*

Le plan e de l'infini coupe la biquadratique $G_{\zeta x}$ en quatre points dont chacun peut servir de x' . La valeur absolue des x'_j résulte des relations $x_j^2 + x_j'^2 = z_j^2 - \tau^2 \zeta_j^2$ d'où l'on tire le facteur inconnu de proportionnalité τ et les x'_j .

PROBLÈME II. — *Construire Ξ_ζ connaissant la position du point x' dans le plan de l'infini.*

Tous les ∞ points de la biquadratique $G_{\zeta x'}$ peuvent servir de x . Une fois x choisi, les valeurs absolues de x'_j se déterminent comme plus haut.

PROBLÈME III. — *Construire Ξ_ζ connaissant le support D , choisi évidemment sur le complexe $\mathfrak{G}$.*

D perce le plan de l'infini en x' ; D est une corde de $G_{\zeta x'}$, et rencontre encore la courbe en x . Les x'_j se déterminent en valeur absolue comme au problème I.

CHAPITRE IV.

CONSTRUCTION D'UN POINT IMAGINAIRE A ARGUMENTS ET MODULAIRE DONNÉS.

33° Considérons un couple Ξ , de modulaire ζ et d'arguments ω , φ et ψ , ces trois angles étant définis comme au 29°. Chacune des trois conditions $\omega = \text{const.}$, $\varphi = \text{const.}$, $\psi = \text{const.}$ détermine sur le complexe $\mathfrak{G}$ une congruence Ω , Φ ou Ψ . Le support D du couple est à l'intersection des congruences. Une fois D connu, la construction de Ξ s'achèvera comme au 32°.

La connaissance des congruences Ω , Φ , Ψ résout le problème relatif à la recherche des couples Ξ admettant un modulaire et des arguments donnés.

Je vais déterminer les congruences et leurs intersections deux à deux.

Congruence Ω .

34° Posons, comme on l'a déjà fait,

$$j \neq k, \quad [jk] = \sin(\alpha_j - \alpha_k) \quad (j, k = 1, 2, 3, 4);$$

on vérifiera aisément l'identité

$$(a) \quad [12][34] + [23][14] + [31][24] = 0.$$

Si je parviens à former une équation, homogène par rapport aux $[jk]$ et conséquence de la relation

$$\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4 = 2\omega = \text{const.},$$

il suffira d'y remplacer $[jk]$ par $(z_j z_k)^{-1} (jk)$ (29°), pour avoir l'équation de la congruence Ω , cette dernière étant déjà située sur le complexe $\mathfrak{G}$.

35° On a

$$\begin{aligned} [14] &= \sin(\alpha_1 - \alpha_4), & [23] &= \sin(\alpha_2 - \alpha_3), \\ [14] - [23] &= 2 \sin \frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_4 - \alpha_2 + \alpha_3) \cos \frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_4 + \alpha_2 - \alpha_3) \\ &= 2 \sin \lambda \cos \omega \\ 2[14][23] &= \cos(\alpha_1 - \alpha_4 - \alpha_2 + \alpha_3) - \cos(\alpha_1 - \alpha_4 - \alpha_2 - \alpha_3) \\ &= \cos 2\lambda - \cos 2\omega, \\ 2\lambda &= \alpha_1 - \alpha_4 + \alpha_2 - \alpha_3. \end{aligned}$$

Éliminons l'angle auxiliaire λ .

$$\cos 2\lambda = \cos 2\omega - 2[14][23] = 1 - 2\sin^2\lambda = 1 - 2 \frac{[14] - [23]}{4 \cos^2\omega} =$$

et enfin

$$(1) \quad \sin^2\omega = [14][23] = \frac{[14] - [23]}{4 \cos^2\omega},$$

puis, par un calcul analogue,

$$(2) \quad \cos^2\omega = [24][31] = \frac{[24] + [31]}{4 \sin^2\omega}.$$

Multiplions (1) par $4 \cos^2\omega$, (2) par $-4 \sin^2\omega$, ajoutons et, tenant compte de l'identité (a) du 34^e, nous obtiendrons

$$0 = [14]^2 + [23]^2 - [24]^2 - [31]^2 = 2[12][34] \cos 2\omega.$$

Remplaçons $[jk]$ par

$$\frac{(jk)}{z_j z_k} \quad \text{ou} \quad \frac{(jk)}{z_j z_k}$$

et chassons les dénominateurs. L'équation de la congruence Ω sera

$$(0) = z_2^2 z_3^2 (14)^2 + z_1^2 z_4^2 (23)^2 - z_1^2 z_3^2 (24)^2 - z_2^2 z_4^2 (31)^2 \\ = 2 \cos 2\omega (12) (34) z_1^2 z_2^2 z_3^2 z_4^2.$$

Congruences Φ et Ψ .

36° Le calcul est analogue au précédent

$$\begin{aligned} [23] &= \sin(x_2 - x_3), \quad [31] = \sin(x_3 - x_1), \\ [23] - [31] &= 2 \sin \frac{1}{2}(x_2 - x_3 - x_3 + x_1) \cos \frac{1}{2}(x_2 - x_3 + x_3 + x_1) \\ &= -2 \sin \varphi \cos \lambda, \\ 2[23][31] &= \cos(x_2 - x_3 - x_3 + x_1) - \cos(x_2 - x_3 + x_3 - x_1) \\ &= \cos 2\lambda - \cos 2\varphi, \end{aligned}$$

puisque $x_1 - x_2 = 2\varphi$, et posant $2\lambda = x_1 + x_2 = 2\varphi$.

Ensuite, pour éliminer λ ,

$$\begin{aligned} \cos 2\lambda &= \cos 2\varphi = 2[23][31] - 4 = 4 - 2 \cos^2\lambda \\ &= 4 - 2 \frac{[23] + [31]}{4 \sin^2\varphi} = \end{aligned}$$

un calcul facile donne

$$[23]^2 + [31]^2 + 2[23][31] \cos 2\varphi = \sin^2 2\varphi = \sin^2(\alpha_1 - \alpha_2) = [12]^2.$$

L'équation de la congruence Φ est donc

$$\zeta_1^2 \zeta_3^2 (23)^2 + \zeta_2^2 \zeta_4^2 (31)^2 + 2 \cos 2\varphi \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3^2 (23)(31) - \zeta_3^2 \zeta_4^2 (12)^2 = 0.$$

La congruence Ψ s'obtiendra par un procédé tout pareil.

Surface réglée, intersection des congruences Ω et Φ .

37° Des relations $\rho(jk) = \zeta_j \zeta_k \sin(\alpha_j - \alpha_k)$ et (29°)

$$\left\{ \begin{array}{ll} \alpha_1 - \alpha_2 = 2\varphi, & \alpha_3 - \alpha_4 = 2\psi \\ \alpha_2 - \alpha_3 = \omega - \varphi - \psi, & \alpha_1 - \alpha_4 = \omega + \varphi + \psi \\ \alpha_3 - \alpha_1 = -\omega - \varphi + \psi, & \alpha_2 - \alpha_4 = \omega - \varphi + \psi \end{array} \right\}$$

on tire

$$\begin{aligned} \rho(12) &= \zeta_1 \zeta_2 \sin 2\varphi, \\ \rho(34) &= \zeta_3 \zeta_4 \sin 2\psi, \\ \rho(23) &= \zeta_2 \zeta_3 \left\{ \begin{array}{l} \sin(\omega - \varphi) \cos \psi - \cos(\omega - \varphi) \sin \psi \end{array} \right\}, \\ \rho(14) &= \zeta_1 \zeta_4 \left\{ \begin{array}{l} \sin(\omega + \varphi) \cos \psi + \cos(\omega + \varphi) \sin \psi \end{array} \right\}, \\ \rho(31) &= \zeta_1 \zeta_3 \left\{ \begin{array}{l} -\sin(\omega + \varphi) \cos \psi + \cos(\omega + \varphi) \sin \psi \end{array} \right\}, \\ \rho(24) &= \zeta_2 \zeta_4 \left\{ \begin{array}{l} \sin(\omega - \varphi) \cos \psi + \cos(\omega - \varphi) \sin \psi \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Soit t , de coordonnées t_j , un point quelconque sur la droite D, de coordonnées (jk) , On aura d'abord

$$-t_3(12) = t_1(23) + t_2(31); \quad -t_4(12) = t_1(24) - t_2(14).$$

Puis, par un calcul facile,

$$\begin{aligned} \frac{\zeta_3 \zeta_4}{\zeta_1 \zeta_2 \sin 2\varphi} \cos \psi &= -\frac{t_3 \zeta_4 + t_4 \zeta_3}{P} = \frac{P'}{P}, \\ \frac{\zeta_3 \zeta_4}{\zeta_1 \zeta_2 \sin 2\varphi} \sin \psi &= \frac{t_3 \zeta_4 - t_4 \zeta_3}{Q} = \frac{Q'}{Q}, \\ P &= t_1 \zeta_2 \sin(\omega - \varphi) - t_2 \zeta_1 \sin(\omega + \varphi), \\ Q &= t_1 \zeta_2 \cos(\omega - \varphi) - t_2 \zeta_1 \cos(\omega + \varphi). \end{aligned}$$

Éliminant ψ , on a l'équation de la surface réglée W, intersection, sur le complexe $\mathfrak{C}$, des deux congruences Ω et Φ . Cette

équation est

$$\frac{P'^2}{P^2} + \frac{Q'^2}{Q^2} = \frac{\zeta_1^2 \zeta_2^2}{\zeta_1^2 \zeta_2^2 \sin^2 2\varphi} = K^2,$$

$$P'^2 Q^2 + Q'^2 P^2 - K^2 P^2 Q^2 = 0.$$

38° Nommons g_{jk} l'arête $o = t_j = t_k$ du tétraèdre de référence,

$$\left. \begin{array}{l} a \text{ la droite } P = P' = 0 \\ b \text{ la droite } Q = Q' = 0 \end{array} \right\} \text{ qui rencontrent toutes deux } g_{12} \text{ et } g_{34}.$$

W est une surface du quatrième degré qui admet pour droites doubles a, b et g_{12} (ou $P = Q = 0$). Chaque génératrice D rencontre a et b . En vertu de la relation

$$\frac{\sin 2\psi}{\sin 2\varphi} = \frac{\zeta_1 \zeta_2}{\zeta_3 \zeta_4} \cdot \frac{(34)}{(12)} \quad (37^o)$$

$\sin 2\psi$ est proportionnel au quotient des moments de la génératrice D par rapport aux arêtes g_{12} et g_{34} du tétraèdre de référence. Cela donne la signification géométrique du paramètre ψ sur W.

39° On a donc résolu le problème relatif à la construction d'un couple Ξ , ou d'un point X, qui admet un modulaire et des arguments donnés.

Connaissant le modulaire ζ et les arguments ω et φ , on construira la surface W, puis, à l'aide de l'argument ψ , la génératrice D de W. Le support D de Ξ étant obtenu, on est ramené à un problème traité déjà (problème III du 32°).

40° Comme application, je vais représenter géométriquement la substitution linéaire canonique

$$S = [X_j \quad X_j e^{i\theta_j}],$$

Nommons X' le point transformé de X par S. Si $X_j = z_j e^{i\alpha_j}$ et

$$\sum_j e_j z_j e^{i\alpha_j} = Z e^{i\theta},$$

on a

$$X'_j = z_j Z^{-1} e^{i\alpha_j - \theta}.$$

X' a pour modulaire le même point ζ que X et pour arguments

$$\begin{aligned}\omega' &= \omega + \theta_1 + \theta_2 - \theta_3 - \theta_4, \\ 2\varphi' &= 2\varphi + \theta_1 - \theta_2, \\ 2\psi' &= 2\psi + \theta_3 - \theta_4.\end{aligned}$$

On est ramené au problème qui vient d'être résolu.

J'espère, dans un Travail ultérieur, interpréter géométriquement, dans le sens qui vient d'être indiqué, la substitution linéaire quaternaire complexe générale

$$\left| X_j - \sum_k X_k (a_{jk} + ib_{jk}) \right|$$

$a_{jk}, b_{jk} = \text{réels}; \quad j, k = 1, 2, 3, 4.$

SUR QUELQUES QUADRATURES DONT L'ÉLÉMENT DIFFÉRENTIEL CONTIENT DES FONCTIONS ARBITRAIRES:

Par M. E. CARTAN.

Dans une Note récente, M. Beudon ⁽¹⁾ a étudié certaines quadratures dont l'élément différentiel contient des fonctions arbitraires d'un argument. Il s'est occupé notamment de la quadrature

$$(1) \quad J = \int \{ M(x, y, y') y'' - N(x, y, y') \} dx,$$

où γ désigne une fonction arbitraire de x ; le problème dont il s'agit est, en somme, d'exprimer, *sans aucun signe de quadrature*, x , y et J en fonction d'un argument, ces expressions dépendant naturellement d'une fonction arbitraire et de ses dérivées. Ce problème rentre dans le suivant :

⁽¹⁾ Sur les changements de variables (*Bulletin de la Société mathématique*, t. XXVIII, p. 107-116).

Cette Note était rédigée avant la mort si douloureuse et si imprévue de ce jeune mathématicien, dont les lecteurs de ce *Bulletin* connaissent les si intéressants travaux sur les équations aux dérivées partielles, les caractéristiques, etc.

Résoudre, de la manière la plus générale, l'équation

$$(2) \quad \frac{dz}{dx} = A\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}\right) \frac{d^2y}{dx^2} + B\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}\right),$$

où y et z sont des fonctions de x .

Dans le cas particulier où la fonction A est nulle, on a l'équation de Monge.

Ce problème est équivalent au suivant :

Intégrer le système d'équations de Pfaff

$$(3) \quad \begin{cases} dy - y' dx = 0, \\ dz - A dy' - B dx = 0, \end{cases}$$

c'est-à-dire exprimer de la manière la plus générale x, y, y', z en fonction d'un argument, ces fonctions satisfaisant identiquement aux équations (3).

Enfin, ce dernier problème est un cas particulier de l'intégration d'un système quelconque de deux équations de Pfaff à quatre variables x_1, x_2, x_3, x_4 ,

$$(4) \quad \begin{cases} \omega = a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + a_3 dx_3 + a_4 dx_4 = 0, \\ \omega = b_1 dx_1 + b_2 dx_2 + b_3 dx_3 + b_4 dx_4 = 0. \end{cases}$$

C'est aussi à ce problème général que se ramène l'exemple traité par M. Boudon et qui est, en somme, l'intégration du système

$$(5) \quad \begin{cases} dX = \frac{du}{1 + uu_1}, \\ dY = \frac{du_1}{1 + uu_1}. \end{cases}$$

Le problème général de l'intégration du système (4) a été résolu pour la première fois par M. Engel ⁽¹⁾ qui, par des calculs un peu compliqués, a montré qu'en général on pouvait, par un changement de variables, ramener le système (4) à la forme

$$(6) \quad \begin{cases} dy_2 - y_1 dy_1 = 0, \\ dy_3 - y_2 dy_1 = 0; \end{cases}$$

(1) ENGEL, *Zur Invariantentheorie der Systeme Pfaff'scher Gleichungen* (Leips. Ber., t. XLI, p. 157-176).

et, sous cette forme, la solution générale est évidente. Elle est fournie par les formules

$$(7) \quad \begin{cases} y_2 = f(y_1), \\ y_3 = f'(y_1), \\ y_4 = f''(y_1), \end{cases}$$

exception faite pour la solution suivante, dépendant de trois paramètres arbitraires,

$$(8) \quad y_1 = C_1, \quad y_2 = C_2, \quad y_3 = C_3.$$

Ces résultats ont été démontrés depuis au moyen de considérations géométriques par S. Lie ⁽¹⁾, et M. von Weber ⁽²⁾ les a déduits de résultats plus généraux dont le point de départ se trouve d'ailleurs dans le Mémoire de M. Engel.

Je me propose, dans cette Note, d'indiquer rapidement et sans faire appel à des considérations étrangères au sujet, une méthode qui permette de réduire le système (4) à sa forme canonique (6), sans préjudice des cas singuliers qui peuvent se présenter. Je montrerai ensuite comment cette méthode s'applique à l'équation de Monge et aux autres exemples traités par M. Beudon.

I.

Je prendrai pour point de départ la considération des covariants bilinéaires des deux expressions de Pfaff ω et π ; je les désignerai par ω' et π' :

$$(9) \quad \begin{cases} \omega' = \sum a_{ik}(dx_i \delta x_k - dx_k \delta x_i) \\ \pi' = \sum b_{ik}(dx_i \delta x_k - dx_k \delta x_i) \end{cases} \quad (i, k = 1, 2, 3, 4),$$

en posant

$$(10) \quad \begin{cases} a_{ik} = -a_{ki} = \frac{\partial a_i}{\partial x_k} - \frac{\partial a_k}{\partial x_i}, \\ b_{ik} = -b_{ki} = \frac{\partial b_i}{\partial x_k} - \frac{\partial b_k}{\partial x_i}. \end{cases}$$

⁽¹⁾ S. LIE, *Ueber Berührungstransformationen und Differentialgleichungen* (Leipz. Ber., p. 113-180; 1898).

⁽²⁾ E. VON WEBER, *Zur Invariantentheorie der Systeme Pfaff'scher Gleichungen* (Leipz. Ber., p. 207-229; 1898).

Les propriétés d'invariance de ces covariants étant bien connues, je ne m'arrêterai pas à les démontrer. Un calcul facile montre, de plus, qu'en désignant par u et v deux fonctions arbitraires des x , et en tenant compte des équations (4) et des équations (4') qui s'en déduisent par le changement du symbole d dans le symbole ∂ et qu'il est inutile d'écrire, le covariant bilinéaire de $u\omega + v\varpi$ n'est autre que $u\omega' + v\varpi'$.

D'après cela, il est toujours possible de déterminer le rapport $\frac{v}{u}$ par la condition que $u\omega' + v\varpi'$ soit identiquement nul en tenant compte de (4) et (4'); car, si l'on imagine par exemple les équations (4) résolues par rapport à dx_3 et dx_4 , les équations (4') par rapport à ∂x_3 et ∂x_4 , ω' se réduit, en remplaçant dx_3 , dx_4 , ∂x_3 , ∂x_4 par leurs valeurs, à une expression de la forme

$$A(dx_1 \partial x_2 - dx_2 \partial x_1)$$

et ϖ' à une expression de la forme

$$B(dx_1 \partial x_2 - dx_2 \partial x_1) \quad ,$$

et il suffit alors de choisir u et v d'après la relation

$$(11) \quad uA + vB = 0,$$

pour que le covariant bilinéaire de $u\omega + v\varpi$ soit nul en tenant compte des équations (4) et (4').

Si nous désignons alors par Ω l'expression de Pfaff ainsi déterminée, on peut remplacer le système (4) par un système équivalent dont l'une des équations aura précisément Ω pour premier membre, soit

$$(12) \quad \begin{cases} \Omega = A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + A_3 dx_3 + A_4 dx_4 = 0, \\ \Pi = B_1 dx_1 + B_2 dx_2 + B_3 dx_3 + B_4 dx_4 = 0, \end{cases}$$

et maintenant Ω' est nul, en tenant compte de (12) et de (12') [équations déduites de (12) par le changement de d en ∂].

Cette équation $\Omega = 0$ jouit évidemment d'une propriété invariante par rapport à tout changement de variables; nous l'appellerons l'équation dérivée du système donné. On voit que cette équation dérivée s'obtient sans intégration, par de simples différentiations et la résolution d'une équation du premier degré.

Or, on sait qu'une équation de Pfaff à quatre variables peut toujours, par l'intégration d'équations différentielles ordinaires, se ramener à l'une des deux formes suivantes :

$$(13) \quad dy_2 - y_3 dy_1 = 0;$$

$$(14) \quad dy_1 = 0.$$

Je me contenterai d'indiquer une des méthodes qui permettent de faire la réduction. On considère les équations différentielles

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{A_{12} dx_2 + A_{13} dx_3 + A_{14} dx_4}{A_1} = \frac{A_{21} dx_1 + A_{24} dx_3 + A_{25} dx_5}{A_2} \\ & = \frac{A_{31} dx_1 + A_{32} dx_2 + A_{34} dx_4}{A_3} = \frac{A_{41} dx_1 + A_{42} dx_2 + A_{43} dx_3}{A_4} \\ & = \frac{A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + \dots}{0} \end{aligned} \right.$$

où les A_{ik} désignent les coefficients du covariant bilinéaire Ω' . Si ces équations se réduisent à la seule équation $\Omega = 0$, cette équation est complètement intégrable et, par suite, réductible à la forme (14). Dans le cas contraire, on déterminera une intégrale première y_1 du système (15); en faisant $y_1 = \text{const.} = C$, l'équation $\Omega = 0$ devient alors complètement intégrable, par suite réductible à la forme $dy_2 = 0$, d'où, en ne faisant plus y_1 constant, on a la forme (13).

Dans le premier cas, la réduction s'opère par une opération d'ordre 1; dans le second cas, par deux opérations successives d'ordres 3 et 1.

Prenons d'abord le cas de la forme réduite (13). On peut, en somme, supposer

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} \Omega &= dy_2 - y_3 dy_1, \\ \Pi &= \overline{B}_1 dy_1 + B_2 dy_2 + \overline{B}_3 dy_3 + \overline{B}_4 dy_4, \end{aligned} \right.$$

et, d'après ce que nous avons vu plus haut, Ω' est nul en tenant compte de (16) et (16'). Or, on a

$$\Omega' = dy_1 \partial y_3 - dy_3 \partial y_1,$$

et cette expression ne peut évidemment s'annuler au moyen de (16) et (16') que si le coefficient B_4 est identiquement nul. On peut toujours, de plus, supposer qu'il en est de même de $\overline{B}_2$ en rem-

plaçant dans l'équation $\Pi = 0$ la différentielle dy_2 par sa valeur $y_3 dy_1$. Finalement, on voit que Π ne contient que des termes en dy_1 et dy_3 . Les coefficients sont d'ailleurs tous les deux différents de zéro, sinon Π' serait nul, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc, enfin, le système peut se mettre sous la forme

$$(6) \quad \begin{cases} dy_2 - y_3 dy_1 = 0, \\ dy_3 - y_4 dy_1 = 0, \end{cases}$$

et d'ailleurs y_1, y_2, y_3, y_4 sont quatre fonctions indépendantes de x_1, x_2, x_3, x_4 , sinon le système serait complètement intégrable.

En définitive, la réduction du système (4) à la forme (6) dépend uniquement de la réduction de l'équation dérivée à sa forme canonique (13).

Si l'équation dérivée est complètement intégrable, on voit immédiatement que le système donné est réductible à la forme

$$(17) \quad \begin{cases} dy_1 = 0, \\ dy_3 - y_4 dy_2 = 0, \end{cases}$$

et cela par trois opérations successives d'ordres 1, 3, 1.

Enfin, il y a un cas que nous avons implicitement laissé de côté, c'est celui où l'équation

$$(11) \quad uA + vB = 0$$

est une identité, c'est-à-dire où ω' et π' sont nuls tous les deux en tenant compte de (4) et (4'). On vérifiera facilement que dans ce cas le système (4) est complètement intégrable et, par suite, réductible à la forme

$$(18) \quad \begin{cases} dy_1 = 0, \\ dy_2 = 0, \end{cases}$$

par deux opérations d'ordres 2 et 1.

II.

Appliquons la méthode précédente à l'équation de Monge

$$(19) \quad F(x, y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}) = 0.$$

Le problème est, en somme, la résolution du système

$$(20) \quad \begin{cases} \omega \equiv dy - y' dx = 0, \\ \varpi \equiv dz - z' dz = 0, \end{cases}$$

les cinq variables x, y, z, y', z' étant liées par la relation

$$(19') \quad F(x, y, z, y', z') = 0.$$

Cherchons l'équation dérivée. On a

$$\begin{aligned} \omega' &= dx \partial y' - dy' \partial x, \\ \varpi' &= dx \partial z' - dz' \partial x. \end{aligned}$$

Or, les différentielles sont liées par

$$(21) \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial F}{\partial x} + y' \frac{\partial F}{\partial y} + z' \frac{\partial F}{\partial z} \right) dx + \frac{\partial F}{\partial y'} dy' + \frac{\partial F}{\partial z'} dz' = 0, \\ \left(\frac{\partial F}{\partial x} + y' \frac{\partial F}{\partial y} + z' \frac{\partial F}{\partial z} \right) \partial z + \frac{\partial F}{\partial y'} \partial y' + \frac{\partial F}{\partial z'} \partial z' = 0. \end{cases}$$

Il en résulte immédiatement que l'équation dérivée n'est autre que

$$(22) \quad \frac{\partial F}{\partial y'} \omega + \frac{\partial F}{\partial z'} \varpi + \frac{\partial F}{\partial y'} dy - \frac{\partial F}{\partial z'} dz - \left(y' \frac{\partial F}{\partial y'} + z' \frac{\partial F}{\partial z'} \right) dx = 0.$$

Tout revient alors à ramener cette équation (22) à sa forme canonique. Si nous posons

$$(23) \quad \begin{cases} p = \frac{y' \frac{\partial F}{\partial y'} + z' \frac{\partial F}{\partial z'}}{\frac{\partial F}{\partial z'}}, \\ q = - \frac{\frac{\partial F}{\partial y'}}{\frac{\partial F}{\partial z'}}, \end{cases}$$

et que nous éliminions y' et z' entre les équations (19'), (23), nous serons ramenés à résoudre l'équation

$$dz - p dx - q dy = 0,$$

x, y, z, p, q étant liés par une certaine relation

$$(24) \quad \Phi(x, y, z, p, q) = 0,$$

qui est précisément le résultat de l'élimination. On retombe, comme il est aisé de s'en convaincre, sur la méthode classique de M. Darboux. Mais, pratiquement, ce changement de variables (x, y, z, y', z') en (x, y, z, p, q) est inutile et il suffit d'appliquer la méthode générale. D'après la théorie générale, les solutions de l'équation de Monge dépendront d'une fonction arbitraire d'un argument, ce sont les courbes intégrales de l'équation (24); il y a exception pour une solution dépendant de trois constantes arbitraires, ce sont les courbes caractéristiques de (24).

Cherchons maintenant à résoudre l'équation

$$(2) \quad \frac{dz}{dx} = A\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}\right) + B\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}\right);$$

cette équation, comme nous l'avons déjà indiqué, se ramène au système

$$(3) \quad \begin{cases} \omega = dy - y' dx = 0, \\ \pi = dz - A dy' - B dx = 0. \end{cases}$$

Cherchons l'équation dérivée du système. On a, en tenant compte de (3) et (3'),

$$(25) \quad \begin{cases} \omega' = dx \frac{\partial y'}{\partial x} - dy' \frac{\partial x}{\partial y}, \\ \pi' = \left(-\frac{dA}{dx} - \frac{dB}{dy} \right) \cdot dx \frac{\partial y'}{\partial x} - dy' \frac{\partial x}{\partial y}; \end{cases}$$

en posant

$$(26) \quad \begin{cases} \frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + y' \frac{\partial f}{\partial y'} + B \frac{\partial f}{\partial z}, \\ \frac{df}{dy'} = \frac{\partial f}{\partial y'} + A \frac{\partial f}{\partial z}. \end{cases}$$

Il en résulte que l'équation dérivée est

$$(27) \quad \begin{cases} \Omega = \pi = \left(\frac{dA}{dx} - \frac{dB}{dy'} \right) \omega \\ dz + \left(\frac{dA}{dx} - \frac{dB}{dy'} \right) dy' - A dy' - \left(B + y' \frac{dA}{dx} - y' \frac{dB}{dy'} \right) dx = 0. \end{cases}$$

Telle est l'équation dont l'intégration résout le problème.

III.

Appliquons ce qui précède au calcul de l'intégrale

$$(28) \quad z = \int y^m \frac{d^2 y}{dx^2} dx,$$

où y désigne une fonction arbitraire de x . Ici, on a

$$A = y^m, \quad B = 0,$$

et l'on est ramené à l'intégration du système

$$(29) \quad \begin{cases} dy - y' dx = 0, \\ dz - y^m dy' = 0. \end{cases}$$

En appliquant les formules de la fin du paragraphe précédent, l'équation dérivée est

$$(30) \quad \Omega \equiv dz - y^m dy' + my^{m-1}y' dy - my^{m-1}y'^2 dx = 0,$$

et tout revient à réduire cette équation à sa forme canonique. Le covariant bilinéaire de Ω est ici

$$\begin{aligned} \Omega' = & -2my^{m-1}(dy \partial y' - dy' \partial y) - 2my^{m-1}y'(dy' \partial x - dx \partial y') \\ & + m(m-1)y^{m-2}y'^2(dx \partial y - dy \partial x). \end{aligned}$$

Par suite, le système auxiliaire (15) s'écrit

$$(31) \quad \frac{dx}{2y'} = \frac{dy}{2y'y'} = \frac{dy'}{-(m-1)y'^2} = \frac{dz}{-(m-1)y^m y'^2}.$$

On a immédiatement une intégrale première

$$(32) \quad y^{m-1}y'^2 = X;$$

si alors on regarde dans (30) y et y' comme liées par la relation (32) où X est une constante, l'équation (30) doit être complètement intégrable. On trouve, en effet, par un calcul facile, son intégrale générale qui est

$$(33) \quad z = mx^{m-1}y'^2 + \frac{3m-1}{m-1}y^m y' = Y.$$

Finalement, l'équation (30) peut se mettre sous la forme

$$dY - Y dX = 0,$$

et l'on trouve, par des différentiations,

$$(34) \quad \frac{2m}{m+1} \frac{Y'}{Y^2} - mX = Y'.$$

Cela étant, le système (29) peut se mettre sous la forme

$$(35) \quad \begin{cases} dY - Y' dX = 0, \\ dY' - Y' dX = 0, \end{cases}$$

et de nouvelles différentiations donnent

$$(36) \quad - \frac{m}{m+1} \frac{m}{Y^{m-2} Y'^3} = Y''.$$

L'intégrale générale du système (29) est alors

$$(37) \quad \begin{cases} X = Y^{m-1} Y'^2 = z, \\ Y = z - mX Y^{m-1} Y'^2 + \frac{2m}{m+1} Y^m Y' = mf(z), \\ Y' = \frac{2m}{m+1} \frac{1}{Y^2} - mX = mf'(z), \\ Y'' = - \frac{m}{(m+1) Y^{m-2} Y'^3} = mf''(z), \end{cases}$$

où z désigne un paramètre variable et $f(z)$ une fonction arbitraire de ce paramètre. Ces équations résolues donnent pour x , y et z les expressions suivantes :

$$(38) \quad \begin{cases} x = -2z f''(z) - f'(z), \\ y^{m+1} = (m+1)^2 z^3 f''(z), \\ z = (m+1) z^2 f''(z) - m z f'(z) - mf(z). \end{cases}$$

Si dans ces formules on remplace z , $f(z)$, $f'(z)$ par trois constantes arbitraires a , b , c et $f''(z)$ par un paramètre variable u , on obtient une solution ne rentrant pas dans les formules générales (38). Cette solution peut encore être définie par les équations

$$(39) \quad \begin{cases} y^{m+1} = (m+1)^2 a(x - x_0)^2, \\ z - z_0 = - (m+1) a(x - x_0)^2, \end{cases}$$

qui dépendent des trois constantes arbitraires a , x_0 , z_0 .

IV.

Pour terminer, calculons les quadratures

$$(40) \quad u = \int \frac{dx}{1+xy}, \quad v = \int \frac{dy}{1+xy},$$

dont s'occupe M. Beudon avec d'autres notations, et où x et y sont liées par une relation *arbitraire*. Il s'agit, en somme, de résoudre le système

$$(41) \quad \begin{cases} \omega = du - \frac{dx}{1+xy} = 0, \\ \varpi = dv - \frac{dy}{1+xy} = 0. \end{cases}$$

Cherchons l'équation dérivée. On a

$$\begin{aligned} \omega' &= -\frac{x}{(1+xy)^2} (dx \partial_y - dy \partial_x), \\ \varpi' &= -\frac{y}{(1+xy)^2} (dx \partial_x - dy \partial_y), \end{aligned}$$

et, par suite, l'équation dérivée est

$$(42) \quad \Omega \equiv y\omega + x\varpi = y du + x dv - \frac{x dy + y dx}{1+xy} = 0.$$

Cette équation peut s'écrire

$$dv + \frac{y}{x} du - \frac{x dy + y dx}{x(1+xy)} = 0,$$

et l'on voit qu'en posant

$$\frac{y}{x} = \text{const.} = X$$

elle est complètement intégrable; son intégrale générale se calcule immédiatement et est

$$v + Xu - 2\sqrt{X} \arctan(x\sqrt{X}) = v + \frac{y}{x} u - 2\sqrt{\frac{y}{x}} \arctan(\sqrt{xy}) = Y.$$

Par suite, l'équation (42) peut se mettre sous la forme

$$dY - Y' dX = 0,$$

en posant

$$Y' = u - \sqrt{\frac{x}{y}} \arctan \sqrt{xy}.$$

Finalement, le système (41) se met sous la forme

$$(43) \quad \begin{cases} dY - Y' dX = 0, \\ dY' - Y'' dX = 0, \end{cases}$$

et l'on trouve, par différentiations,

$$Y'' = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{y} \right)^3 \arctan \sqrt{xy} - \frac{1}{2} \frac{x^2}{y} \frac{1}{1+xy}.$$

L'intégrale générale du système (41) est alors donnée par les formules

$$(44) \quad \begin{cases} X = \frac{y}{x} = z, \\ Y = c + \frac{y}{x} u - 2 \sqrt{\frac{y}{x}} \arctan \sqrt{xy} = f(z), \\ Y' = u - \sqrt{\frac{x}{y}} \arctan \sqrt{xy} = f'(z), \\ Y = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{y} \right)^3 \arctan \sqrt{xy} - \frac{1}{2} \frac{x^2}{y} \frac{1}{1+xy} = f''(z). \end{cases}$$

En posant

$$\sqrt{xy} = \tan \frac{\beta}{2},$$

on obtient

$$(45) \quad \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{z}} \tan \frac{\beta}{2}, \\ y = \sqrt{z} \tan \frac{\beta}{2}, \\ u = \frac{\beta}{2\sqrt{z}} - f'(z), \\ c = \frac{\beta\sqrt{z}}{2} + f(z) - zf'(z), \end{cases}$$

où z et β sont deux paramètres variables liés par la relation

$$(46) \quad \beta - \sin \beta = \frac{3}{4} z^2 f''(z).$$

Ce sont, sous une forme peut-être plus symétrique, les résultats obtenus par M. Beudon.

En regardant maintenant, dans les formules (45), $z, f'(z)$

et $f'(z)$ comme trois constantes arbitraires, β comme un paramètre variable, on obtient une solution ne rentrant pas dans le cas général et qui correspond au cas où y est proportionnel à x .

SUR LES SYSTÈMES RÉCIPROQUES DE POINTS:

Par M. R. BRICARD.

1. Je considère dans ce qui suit des systèmes constitués par n points du plan ou de l'espace, qui seront toujours désignés par une lettre quelconque affectée des indices 1, 2, ..., n .

Deux systèmes de n points $S=(a_1, a_2, \dots, a_n)$ et $S'=(b_1, b_2, \dots, b_n)$ seront regardés comme *identiques* s'ils forment deux figures directement ou inversement semblables, deux points homologues dans ces figures étant désignés par des lettres affectées d'un même indice. On écrira alors

$$S' = S.$$

Si les deux systèmes S et S' forment des figures semblables, les points homologues ne portant pas les mêmes indices, appelons T la substitution qui fait passer de la permutation 1, 2, ..., n à la permutation formée par les indices des points b qui sont respectivement homologues des points $a_1, \dots, a_n$; on écrira

$$S' = ST.$$

2. Je vais maintenant définir ce que j'entends par *systèmes réciproques de points*.

Considérons le système $S=(a_1, \dots, a_n)$ et, prenant le point a_1 pour pôle, soumettons à une inversion de puissance arbitraire le système des points $a_2, \dots, a_n$. Ces points sont ainsi remplacés par de nouveaux points $a'_2, \dots, a'_n$. Le système $(a_1, a'_2, \dots, a'_n)$ sera dit *réciproque* du système S par rapport au point a_1 . Plus généralement, si le système $S'=(b_1, \dots, b_n)$ est identique au système $(a_1, a'_2, \dots, a'_n)$ (en donnant au mot *identique* le sens qui a été fixé plus haut), on dira que les systèmes S et S' sont *réciproques par rapport au couple de points* (a_1, b_1) . Il est bien évident que S se déduit de S' comme S' a été déduit de S .

J'appellerai R_1 l'opération qui fait passer du système S à S' , et j'écrirai

$$S' = SR_1.$$

On définira de même les opérations $R_2, \dots, R_n$, appliquées à un système de n points.

On voit que les opérations $R_1, \dots, R_n$ ne sont définies *que si on les applique à un système donné*. Un exemple précisera le sens de cette remarque. Effectuons d'abord sur le système S la transposition des indices 1 et 2 et, au nouveau système, appliquons l'opération R_1 . L'opération définitive appliquée au système S sera désignée par

$$(12)R_1$$

et le système obtenu sera désigné par

$$S(12)R_1.$$

Dans cette dernière expression, le symbole R_1 n'a pas le même sens que dans l'expression SR_1 . Il est clair en effet que, géométriquement, le système $S(12)R_1$ est identique au système SR_2 et n'en diffère que par la transposition des indices 1 et 2.

Si au système S on applique l'opération R_i , au système obtenu l'opération R_j , au nouveau système l'opération R_k , et ainsi de suite, l'opération définitive appliquée au système S sera désignée par $R_i R_j R_k \dots$, mais on ne doit pas perdre de vue que, dans cette notation, le sens d'un symbole tel que R_k dépend des opérations précédentes.

On a évidemment

$$R_1^2 = R_2^2 \dots = R_n^2 = 1.$$

3. Voici la propriété fondamentale des systèmes réciproques :

Si deux systèmes de points $S = (a_1, \dots, a_n)$ et $S' = (b_1, \dots, b_n)$ sont réciproques par rapport à un couple de points (a_1, b_1) , les systèmes dérivés de S , par l'application des diverses opérations $R_2, \dots, R_n$, et les systèmes dérivés de S' , par l'application des mêmes opérations, sont géométriquement identiques (c'est-à-dire à l'ordre près des indices).

Examinons, en effet, le résultat de l'opération $R_1 R_2 R_1$ appliquée au système S .

La puissance d'inversion qui figure dans la première opération R_1 peut être prise égale au carré de la longueur du segment $a_1 a_2$; l'opération R_1 ainsi particularisée ne change donc ni le point a_1 ni le point a_2 .

Nous conserverons la même puissance d'inversion pour chacune des deux autres opérations qui doivent être successivement appliquées au système; de la sorte, l'opération $R_1 R_2 R_1$, appliquée au système S , laisse à leurs positions initiales le point a_1 et le point a_2 .

Soit a_i (fig. 1) un autre point du système S ; l'opération R_1



lui substitue le point a'_i , l'opération $R_1 R_2$ le point a''_i , et l'opération $R_1 R_2 R_1$ le point a'''_i .

Il résulte d'une propriété bien connue de l'inversion que *les points a_i et a'''_i sont symétriques par rapport au plan mené perpendiculairement au segment $a_1 a_2$, en son milieu*. Voici d'ailleurs la démonstration bien simple de cette proposition :

Il est d'abord évident que les points $a_1, a_2, a_i, a'_i, a''_i, a'''_i$ sont tous dans un même plan. En outre, des couples de triangles semblables, que l'on aperçoit immédiatement, donnent lieu aux égalités d'angles

$$a_1 a_2 a_i = a_1 a'_i a_2 = a_2 a_1 a'''_i,$$

$$a_2 a_1 a_i = a_2 a'_i a_1 = a_1 a_2 a'''_i,$$

qui suffisent évidemment à établir la propriété dont il s'agit.

D'après cela, le système formé par les points $\alpha_1, \alpha_2, \alpha'_3, \dots, \alpha'_n$, c'est-à-dire le système $SR_1R_2R_1$ est symétrique, par rapport à un plan, du système formé par les points $\alpha_2, \alpha_1, \alpha_3, \dots, \alpha_n$, c'est-à-dire du système $S(12)$; on peut donc dire, en vertu de la convention faite au début, que les systèmes $SR_1R_2R_1$ et $S(12)$ sont *identiques*, et écrire

$$R_1R_2R_1 = (12)$$

ou

$$R_1R_2 = (12)R_1$$

On a, en général,

$$(1) \quad R_iR_j = (ij)R_i,$$

ce qui démontre bien la proposition énoncée au commencement de ce paragraphe.

4. La propriété exprimée par la relation (1) se généralise aisément de la manière suivante : Soient $T_0 = 1, T_1, \dots, T_{n-1}$, les $n!$ substitutions du groupe symétrique de n éléments. Nous considérerons les opérations en nombre $(n-1)!$

$$U_k = T_hR_i \quad (h = 0, 1, \dots, n-1; i = 0, 1, \dots, n),$$

en posant

$$R_0 = 1.$$

Si l'on applique au système S l'opération U_k et au système obtenu l'opération $U_{k'}$, le système auquel on parvient finalement peut être dérivé du système S par l'application d'une seule opération $U_{k''}$ convenablement choisie. En d'autres termes, on peut écrire

$$U_kU_{k'} = U_{k''}$$

et dire que les opérations U constituent un groupe.

Remarquons une fois encore que ce groupe diffère de ceux que l'on considère d'habitude en ce qu'une opération U n'est définie que par la connaissance du système auquel elle s'applique.

Il faut montrer l'existence d'une égalité telle que

$$(1) \quad T_hR_iT_hR_i = T_hR_i.$$

On voit d'abord que l'égalité (1), après multiplication des deux

membres à droite et à gauche par R_i , donne

$$R_j R_i = R_i (ij);$$

de cette même égalité (1) on tire, par permutation des indices i et j ,

$$R_j R_i = (ij) R_j,$$

d'où, par comparaison,

$$(3) \quad R_i (ij) = (ij) R_j.$$

Montrons ensuite que, si les indices j et k sont différents de i , l'opération R_i est permutable à la transposition (jk) . On a, en effet, la relation

$$(jk) = (ij)(jk)(ki),$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned} R_i(jk) &= R_i(ij)(jk)(ki) = (ij) R_j(jk)(ki) \\ &= (ij)(jk) R_k(ki) = (ij)(jk)(ki) R_i, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$(4) \quad R_i(jk) = (jk) R_i.$$

Les égalités (2) et (3), qu'il est d'ailleurs bien facile d'établir directement, permettent d'écrire l'égalité plus générale

$$(5) \quad T_h R_i = R_j T_k,$$

en se donnant arbitrairement h et i dans le premier membre et en choisissant convenablement j et k dans le second. En effet T_h peut être décomposée en un produit de transpositions à la gauche desquelles on fera successivement passer l'opération R_i , en appliquant à chaque fois l'égalité (3) ou l'égalité (4), suivant le cas. On parviendra finalement à une égalité de la forme (5).

L'égalité (2) se démontre alors immédiatement. En effet, on peut écrire

$$T_h R_i T_h^{-1} R_i = T_h R_i R_j T_k^{-1} = T_h (ij) R_i T_k^{-1} = T_h (ij) T_k^{-1} R_i = T_h^{-1} R_i.$$

Montrons en terminant que le groupe des opérations U est isomorphe au groupe symétrique de $n + 1$ éléments.

En effet, toute substitution de ce dernier groupe peut se mettre, et cela d'une seule manière, sous la forme

$$T_h \tau_i \quad (h = 0, 1, \dots, n; i = 1, \dots, n),$$

en posant

$$\tau_0 = 1, \quad \tau_i = (i, n+1),$$

L'égalité

$$T_h R_i T_h R_i = T_h R_i$$

entraîne la suivante

$$T_h \tau_i T_h \tau_i = T_h \tau_i.$$

On le voit immédiatement, en remarquant que les égalités (3) et (4) restent vraies si l'on y remplace les symboles R_i par les symboles τ_i . Cette constatation suffit évidemment à entraîner l'isomorphisme dont il s'agit : en effet, l'égalité (2) a pu être écrite en utilisant seulement les égalités (3) et (4).

5. Quand les n points donnés appartiennent à un même plan, on peut considérablement généraliser les résultats qui précèdent en considérant les transformations quadratiques dont les triangles fondamentaux ont pour sommets trois points quelconques appartenant au système. C'est là un sujet d'étude sur lequel je me propose de revenir prochainement.

6. Les systèmes réciproques de points peuvent se présenter dans certaines questions géométriques. Je vais donner un exemple de ce fait, et il serait intéressant d'en trouver d'autres.

Nous aurons affaire, dans cette application, à des systèmes de quatre points. Je dirai, pour abrégér le langage, que *les deux tétraèdres $a_1 a_2 a_3 a_4$ et $b_1 b_2 b_3 b_4$ sont réciproques par rapport au couple de sommets (a_1, b_1)* , si les deux systèmes de points (a_1, a_2, a_3, a_4) , (b_1, b_2, b_3, b_4) sont réciproques par rapport au couple de points (a_1, b_1) .

Si les deux tétraèdres $a_1 a_2 a_3 a_4$ et $b_1 b_2 b_3 b_4$ sont réciproques par rapport au couple de sommets (a_1, b_1) , on a les égalités d'angles

$$a_2 a_1 a_4 = b_2 b_1 b_4, \quad a_3 a_1 a_4 = b_3 b_1 b_4, \quad a_2 a_1 a_3 = b_2 b_1 b_3,$$

De plus, les égalités

$$a_1 a_2 . b_1 b_2 = a_1 a_3 . b_1 b_3 = a_1 a_4 . b_1 b_4$$

peuvent s'écrire

$$\frac{a_1 a_2}{b_1 b_2} = \frac{b_1 b_3}{b_1 b_2}, \quad \frac{a_1 a_3}{b_1 b_3} = \frac{a_1 a_4}{b_1 b_3}, \quad \frac{a_1 a_4}{a_1 a_2} = \frac{b_1 b_3}{b_1 b_2},$$

d'où il résulte que les triangles $a_1 a_2 a_3$, $a_1 a_3 a_4$, $a_1 a_4 a_2$ sont respectivement semblables aux triangles $b_1 b_3 b_2$, $b_1 b_4 b_3$, $b_1 b_2 b_4$.

Réciproquement, si les deux tétraèdres $a_1 a_2 a_3 a_4$, $b_1 b_2 b_3 b_4$ présentent ces trois couples de faces semblables, ils sont réciproques par rapport au couple de sommets (a_1, b_1) .

Cela posé, on a le théorème suivant :

Soient a, b, c, d, e cinq points quelconques de l'espace. Les cinq tétraèdres, dont chacun a pour sommets les projections de l'un des points donnés sur les faces du tétraèdre ayant pour sommets les quatre autres, sont deux à deux réciproques par rapport à un couple de sommets convenablement choisi.

Soient, par exemple, e_a, e_b, e_c, e_d les projections du point e sur les faces du tétraèdre $abcd$ (e_a est sur la face bcd , etc.); soient de même a_e, a_b, a_c, a_d les projections du point a sur les faces du tétraèdre $ebcd$. Les deux tétraèdres $e_a e_b e_c e_d$, $a_e a_b a_c a_d$ sont réciproques par rapport au couple de sommets (e_a, a_e) .

Pour établir cette proposition, il suffit, d'après ce qui a été dit, de montrer que les triangles $e_a e_b e_c$, $e_a e_c e_d$, $e_a e_d e_b$ sont semblables, respectivement, aux triangles

$$a_e a_c a_b, \quad a_e a_d a_c, \quad a_e a_b a_d.$$

Dans ce but, je calculerai les longueurs des arêtes de chacun des tétraèdres. Il suffit, en fait, de calculer pour chaque tétraèdre des quantités auxquelles ses arêtes sont proportionnelles.

Par le point e , menons un plan perpendiculaire à la droite cd (fig. 2). Ce plan contient les points e_a, e_b et rencontre la droite cd en un point m ; le quadrilatère plan $ee_a me_b$ a deux angles droits, en e_a et e_b ; $e_a e_b$ est donc, dans un cercle de diamètre em , une corde sous-tendant un angle inscrit $e_a e e_b$ égal au dièdre

cd ou supplémentaire de ce dièdre. On a par suite l'égalité

$$e_a e_b = em \sin cd = ce \sin ecd \sin cd,$$

ce que l'on peut écrire

$$e_a e_b = (ce \cdot cd \sin ecd) \left(\frac{acd \cdot bcd}{cd} \cdot \sin cd \right) \frac{1}{acd \cdot bcd},$$

où acd , bcd désignent les aires des triangles acd , bcd . Or, dans

Fig. 2.



l'égalité précédente, le premier facteur entre parenthèses a pour valeur $2 ecd$.

Le second facteur, en vertu d'une formule connue, a pour valeur $\frac{3}{2} V$, V désignant le volume du tétraèdre $abcd$.

On peut donc écrire

$$e_a e_b = 3V \frac{ecd}{acd \cdot bcd} = \frac{3V}{acd \cdot bcd \cdot cab \cdot dab} ecd \cdot cab \cdot dab.$$

C'est la formule à laquelle je voulais parvenir.

On formera de même les expressions des diverses arêtes du tétraèdre $e_a e_b e_c e_d$. Toutes ces valeurs ont un facteur commun; en le supprimant, on obtient les relations

$$\begin{aligned} e_a e_b &: ecd \cdot cab \cdot dab \\ &= e_a e_c : edb \cdot dac \cdot bac \\ &= e_a e_d : ebc \cdot bad \cdot cad \\ &= e_c e_d : eab \cdot acd \cdot bcd \\ &= e_d e_b : eac \cdot adb \cdot cdb \\ &= e_b e_c : ead \cdot abc \cdot dbc. \end{aligned}$$

De même, le tétraèdre $a_e a_b a_c a_d$ donne lieu aux relations suivantes :

$$\begin{aligned} & a_e a_b : acd.ccb.dcb \\ & = a_e a_c : adb.dec.bcc \\ & = a_e a_d : abc.bed.ced \\ & = a_c a_d : aeb.ecd.bcd \\ & = a_d a_b : aec.edb.cdb \\ & = a_b a_c : aed.ebc.dbc. \end{aligned}$$

Au moyen de ces relations, on vérifiera aisément que les deux tétraèdres $e_a e_b e_c e_d$, $a_e a_b a_c a_d$ sont bien réciproques par rapport au couple de sommets $e_a a_e$. Montrons, par exemple, que les triangles $e_a e_b e_c$, $a_e a_c a_b$ sont semblables. On doit avoir

$$\frac{e_a e_b}{a_e a_c} = \frac{e_a e_c}{a_e a_b} = \frac{e_b e_c}{a_b a_c}$$

ou

$$\frac{ecd.cab.dab}{adb.dec.bec} = \frac{edb.dac.bac}{acd.ccb.deb} = \frac{ead.abv.dbc}{aed.ebc.dbc},$$

ce qui est exact.

Notre théorème est donc établi. Il renferme des cas particuliers intéressants.

Tout d'abord, si l'un des tétraèdres tels que $a_e a_b a_c a_d$ se réduit à un plan, il en est de même des cinq autres. On arrive ainsi à ce théorème, établi directement et d'une manière toute différente par M. Duporcq :

Si cinq points de l'espace sont tels qu'en projetant l'un d'eux sur les faces du tétraèdre ayant pour sommets les quatre autres, on obtient quatre points dans un même plan, il en est de même quand, dans cette construction, on permute d'une manière quelconque les rôles assignés aux cinq points⁽¹⁾.

On obtient une autre proposition particulière en supposant que

(¹) Voir le *Bulletin*, 1901, p. 29. C'est en généralisant le théorème de M. Duporcq que j'ai obtenu le théorème du § 4 du présent *Mémoire* et que j'ai été conduit, par une nouvelle extension, à la considération des systèmes réciproques de n points.

l'un des tétraèdres tels que $a_0 a_1 b_1 a_2 a_3$ est régulier. Il en est alors de même des quatre tétraèdres analogues.

La propriété obtenue s'énonce comme le théorème de M. Duporcq, en remplaçant les mots *quatre points dans un même plan* par ceux-ci : *sommets d'un tétraèdre régulier*.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES

SÉANCE DU 9 JANVIER 1901.

PRÉSIDENCE DE M. TOUCHE.

La Société, réunie en assemblée générale, procède au renouvellement de son Bureau et à l'élection de son Conseil.

Élections :

M. Davidoglou, présenté par MM. Borel et Laisant; M. van Emelen, présenté par MM. Blutel et Laisant; M. Stetson, présenté par MM. Picard et Perrott, sont élus, à l'unanimité, membres de la Société.

Communications :

M. Saltykow : *Sur l'existence des fonctions implicites.*

M. Hadamard présente quelques observations à ce sujet.

M. Kœnigs : *Sur la réalisation par des articulations de certaines transformations et sur le pantographe oblique de Sylvester, avec généralisation.*

M. PELLET adresse la Note suivante :

Sur la formule d'approximation de Newton.

1. Soit l'équation

$$(1) \quad x = a_0 + a_1 x^2 + a_2 x^3 + \dots + a_n x^n + \dots + a_0 f(x);$$

L'équation, qu'on peut appeler *majorante*,

$$(2) \quad x = x_0 + x_1 x^2 + \dots + x_n x^n + \dots + x_0 \frac{x}{r} x^n$$

où x_n est une quantité positive égale ou supérieure au module de a_n , a au plus deux racines positives, puisque, en ordonnant par rapport à x , elle offre deux variations de signe.

Supposons qu'elle ait une racine simple que nous désignerons par ξ ; si elle en a deux, ξ désignera la plus petite. Alors l'équation proposée (1) a une racine de module inférieur à ξ et une seule [voir mon Mémoire *Sur la théorie infinitésimale des équations* (*Bulletin*, 1895)]. Cette racine x_1 s'obtient rapidement par la méthode d'approximation de Newton et l'on peut donner de l'erreur commise après l'application répétée de cette méthode une limite bien plus avantageuse que celle admise ordinairement. Cette méthode consiste à prendre, pour première valeur approchée de x_1 , a_0 ; puis, posant $x = a_0 + y$, mettre l'équation en y sous la forme (1) et prendre pour valeur approchée de y le terme indépendant $\frac{f(a_0)}{1 - f'(a_0)}$, et ainsi de suite. Désignons par u_{n-1} la quantité qu'on obtient à la $n^{\text{ième}}$ opération et par s_{n-1} la somme

$$u_0 = u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} = s_{n-1};$$

il vient

$$u_0 = a_0, \quad u_1 = \frac{f(a_0)}{1 - f'(a_0)},$$

$$u_n = \frac{a_0 + f(s_{n-1}) - s_{n-1}}{1 - f'(s_{n-1})} = u_{n-1} \left[\frac{\frac{1}{2} f''(s_{n-2})}{1 - f'(s_{n-1})} + \frac{\frac{1}{6} f'''(s_{n-2}) u_{n-1} + \dots}{1 - f'(s_{n-1})} \right]$$

en remarquant que

$$a_0 + f(s_{n-2}) - s_{n-2} = u_{n-1} [1 - f'(s_{n-2})].$$

Les quantités $u_0, u_1, \dots, u_{n-1}, \dots$ ont des modules inférieurs ou au plus égaux à celles qu'on obtient en procédant sur l'équation majorante (2) comme on vient de procéder sur l'équation donnée (1). On en déduit

$$\left| \frac{\frac{1}{2} f''(s_{n-2})}{1 - f'(s_{n-1})} + \frac{\frac{1}{6} f'''(s_{n-2}) u_{n-1} + \dots}{1 - f'(s_{n-1})} \right| < \frac{\frac{1}{2} \varphi''(\xi)}{1 - \varphi'(\xi)} = M.$$

Ainsi, en prenant, pour valeur approchée de x_1 , s_{n-1} , on commet une erreur de module plus petit que

$$M \cdot u_{n-1}^2 + M^2 |u_{n-1}|^3 + M^3 |u_{n-1}|^4 + \dots < \frac{M \cdot u_{n-1}^2}{1 - M^2 |u_{n-1}|^2}.$$

2. Comme exemple, considérons l'équation $x^3 - 2x - 5 = 0$, traitée par Serret dans son *Algèbre supérieure*, ou, en remplaçant x par $2 + x$,

$$x^3 + 6x^2 + 10x + 1 = 0.$$

Elle peut s'écrire

$$x = 0,1 + 0,6x^2 + 0,1x^3.$$

La plus petite racine positive de l'équation majorante

$$x = 0,1 + 0,6x^2 + 0,1x^3$$

est inférieure à 0,2. Il en résulte

$$M < \frac{0,66}{1 - 0,232} < 1.$$

Ainsi, en prenant, pour valeur approchée de x ,

$$0,1 = \frac{0,061}{11,23},$$

l'erreur commise a un module plus petit que

$$\left(\frac{0,061}{11,23} \right)^2 = \frac{1}{30\,000}.$$

Serret donne pour limite supérieure 0,006, qui est 180 fois plus grande. On a de même

$$\frac{0,061^2}{11,23^2} < 0,00003.$$

Posons $y = -x^2$; il vient

$$y^3 + 16y^2 + 112y + 1 = 0.$$

La plus petite racine de l'équation majorante

$$y = \frac{1}{112} + \frac{16}{112}y^2 + \frac{1}{112}y^3$$

est plus petite que 0,01; il en résulte $M < 0,2$.

Ainsi, en prenant, pour valeur approchée de y ,

$$-\frac{1}{112} = -\frac{1}{112^{\frac{1}{2}}} + \frac{\frac{1}{7} - \frac{1}{112^{\frac{1}{2}}}}{1 - \frac{1}{7} - \frac{1}{112} + \frac{3}{112^{\frac{3}{2}}}},$$

l'erreur commise est inférieure en valeur absolue à

$$0,2 \frac{1}{112} + \frac{\frac{1}{7^2}}{\left(1 - \frac{1}{8,49}\right)^2} < \frac{1}{3 \cdot 10^{10}}.$$

On a

$$\frac{1}{112} = 0,008\,928\,571\,428\,57 \dots = \frac{0,0695}{7};$$

un calcul logarithmique donne pour la seconde partie

$$0,000\,011\,411\,0;$$

d'où, pour x^2 ,

$$x^2 = 0,008\,939\,982\,4$$

et, pour x ,

$$x = 0,094\,551\,48.$$

— — —

SÉANCE DU 23 JANVIER 1901.

PRÉSIDENCE DE M. D'OCAGNE.

Communications :

M. Bricard : *Sur les systèmes de points réciproques.*

M. SERVANT fait la Communication suivante :

Sur les formules de Gauss.

Les formules fondamentales de Gauss sont, dans certains cas, plus simples que les formules de Codazzi; nous allons en donner quelques exemples.

Si l'on suppose la surface rapportée à ses lignes de longueur nulle

$$ds^2 = 2\lambda\,du\,dv,$$

les formules de Gauss deviennent

$$(1) \quad \lambda \frac{\partial \Delta'}{\partial u} = \frac{\partial \Delta}{\partial v}, \quad \lambda \frac{\partial \Delta'}{\partial v} = \frac{\partial \Delta''}{\partial u}, \quad \frac{\Delta \Delta''}{\lambda^2} - \Delta'^2 + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial u \partial v} = 0,$$

où l'on a posé

$$\Delta = \frac{D}{\lambda}, \quad \Delta'' = \frac{D''}{\lambda}, \quad \Delta' = \frac{D'}{\lambda^2};$$

D, D', D'' étant les déterminants bien connus, l'équation des lignes de courbure est

$$\Delta du^2 - \Delta' dv^2 = 0,$$

et les rayons de courbure sont donnés par les formules

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R'} = 2i\Delta', \quad \frac{\Delta\Delta''}{\lambda^2} = -\frac{1}{4} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'} \right)^2.$$

Ces relations très simples permettent de résoudre bien des problèmes presque sans calcul; nous signalerons, en particulier, les suivants: recherche des surfaces minima et des surfaces à courbure moyenne constante applicables sur les surfaces de révolution; les deux problèmes résolus par Ossian Bonnet; recherche des surfaces qui admettent une déformation conservant les lignes de courbure ou les rayons de courbure principaux. Nous allons, comme application, indiquer la solution de ce dernier problème.

Pour avoir une solution du problème, il faut que, λ et Δ' restant les mêmes, on ait pour Δ et Δ'' deux ou plusieurs systèmes de solutions satisfaisant aux équations (1). On voit de suite que si Δ_0 et Δ'_0 sont relatifs à la surface S , les éléments correspondants relatifs à la surface S' devront être de la forme

$$\Delta_1 = \Delta_0 + U, \quad \Delta'_1 = \Delta'_0 + V,$$

et l'on devra avoir

$$(\Delta_0 + U)(\Delta'_0 + V) = \Delta_0 \Delta'_0, \quad \frac{\Delta_0}{U} + \frac{\Delta'_0}{V} = 1 = 0,$$

S'il existe une seconde surface S'' répondant à la question, on aura de même

$$\frac{\Delta_1}{U_1} + \frac{\Delta'_0}{V_1} = 1 = 0,$$

d'où l'on déduit immédiatement que Δ_0 et Δ'_0 seront tels que l'on ait

$$\frac{\Delta_1}{\Delta'_0} = \frac{V - V_1}{U - U_1},$$

ce qui montre que les surfaces S, S', S'' sont isothermiques; on peut alors, en choisissant convenablement les variables u et v , poser

$$\Delta_0 = \Delta'_0 = \frac{1}{U^2 + V^2};$$

substituant dans les équations (1), il vient

$$\lambda \frac{\partial \Delta'}{\partial u} - \frac{V'}{(U+V)^2} = 0, \quad \lambda \frac{\partial \Delta'}{\partial v} - \frac{U'}{(U+V)^2},$$

d'où

$$\frac{1}{V'} \frac{\partial \Delta'}{\partial v} - \frac{1}{U'} \frac{\partial \Delta'}{\partial u} = 0;$$

si l'on pose

$$V'V_1 = U'U_1 = 1,$$

l'intégrale de cette équation est

$$\Delta' = f(U_1 + V_1);$$

on en déduit

$$\lambda = - \frac{U'V'}{(U+V)^2 f'(U_1 + V_1)}.$$

La dernière des équations (1) donne de suite la valeur de f et l'on trouve finalement

$$\Delta' = \frac{2}{U_1 + V_1}, \quad \lambda = - \frac{1}{2} \frac{(U_1 + V_1)^2}{(U + V)^2} U'V'.$$

La surface est alors complètement déterminée intrinsèquement.

Les formules de Gauss subsistent presque identiquement dans l'espace non euclidien; il suffit de remplacer la troisième des équations (1) par la suivante :

$$\frac{\Delta \Delta''}{\lambda^2} - \Delta'^2 + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial u \partial v} - 1 = 0.$$

Comme à toute surface isothermique de l'espace non euclidien correspond par projection stéréographique une surface isothermique de l'espace ordinaire, il y a quelque intérêt à résoudre, dans ce cas, le problème d'Ossian Bonnet. Le calcul est le même que précédemment et l'on trouve

$$\Delta = \frac{1}{U+V}, \quad \Delta' = f(U_1 + V_1), \quad \lambda = - \frac{U'V'}{(u+V)^2 f'(U_1 + V_1)},$$

$$f(U_1 + V_1) = \frac{e^{U_1 + V_1} - 1}{e^{U_1 + V_1} + 1},$$

où l'on a posé

$$U = U_1 = V = V_1 = 1,$$

formules qui déterminent intrinsèquement la surface dans l'espace

non euclidien. Pour avoir les coordonnées x_1, x_2, x_3, x_4 et, par suite, la surface de l'espace ordinaire correspondante, il faut encore intégrer un système complet d'équations aux dérivées partielles que l'on forme facilement, mais dont l'intégration ne semble pas très aisée. Nous avons négligé, dans le calcul des cas particuliers, celui des surfaces à courbure moyenne constante et une autre famille de surfaces dépendant d'un paramètre qui sont applicables sur des surfaces de révolution.

SEANCE DU 7 FÉVRIER 1901.

PRÉSIDENCE DE M. D'OCAGNE.

Communications :

M. d'Adhémar : *Sur certaines équations aux dérivées partielles.*

M. C.-A. LAISANT fait la Communication suivante :

Sur certaines suites récurrentes.

1. Dans un Mémoire sur les suites récurrentes (*Journal de l'École Polytechnique*, LXIV^e Cahier, p. 151; 1894), M. d'Ocagne a étudié les suites définies par la relation

$$u_k[f(u)] = F(k)$$

que nous écrivons immédiatement sous forme symbolique. $F(k)$ est un polynome de degré r .

Si, en particulier, $r = 0$, c'est-à-dire si le premier membre de la relation ci-dessus est une constante, la suite considérée est récurrente, et son échelle de récurrence

$$u_k[u - 1]f(u) = 0$$

est d'un degré plus élevé d'une unité que celui de $f(u)$. Comme cas très particulier, une progression par différence de raison h , définie par

$$u_k[u - 1] = h,$$

est récurrente du second ordre, et a pour échelle de récurrence

$$u_k[(u-1)^2] = 0.$$

Cette remarque a été faite par M. d'Ocagne, à côté d'autres résultats beaucoup plus généraux.

Dans cette Note, je me propose d'étudier spécialement les suites où $F(k) = h$, et de chercher à déterminer une loi de formation simple du terme général.

A cet effet, écrivons la relation de définition sous la forme

$$(1) \quad u_{n+k} - a_1 u_{n+k-1} - \dots - a_n u_n = h,$$

ou, symboliquement,

$$u_k[f(u)] = h.$$

Lorsque l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de racine égale à l'unité, il est possible d'exprimer d'une façon très simple les termes de la suite (u) . Posons, en effet, pour un indice quelconque,

$$u_p = v_p + \tau_1,$$

la suite (v) étant récurrente et ayant pour échelle $f(x) = 0$.

La relation (1) devient

$$v_{n+k} + \tau_1 - a_1(v_{n+k-1} + \tau_1) - \dots - a_n(v_n + \tau_1) = h = 0,$$

et, en écrivant

$$\tau_1 = \frac{h}{1 - a_1 - \dots - a_n} = \frac{h}{f(1)},$$

nous pouvons dire que *la suite (u) s'obtient en ajoutant une quantité constante à tous les termes d'une suite récurrente du même ordre et de même échelle.*

La suite (v) s'interpole par une fonction de la forme

$$v_z = A_1 z_1^z + \dots + A_n z_n^z,$$

pour une valeur quelconque de l'indice, $z_1, \dots, z_n$ étant les racines de l'équation $f(x) = 0$. Donc, la série (u) s'interpolera par la fonction

$$u_z = A_1 z_1^z + \dots + A_n z_n^z + \tau_1,$$

τ_1 ayant la valeur ci-dessus.

2. Si l'équation $f(x) = 0$ a, au contraire, des racines égales à l'unité, il est quand même possible d'exprimer chaque terme de la suite (u) au moyen de celui d'une suite récurrente (v) auquel on ajoute, non plus une constante, mais un polynôme en z .

Soit $f(x) = (x-1)^p \varphi(x)$, et appelons v_z le terme général d'une suite récurrente ayant pour échelle $\varphi(x) = 0$. Il s'ensuit qu'on a

$$v_z = \sum A_i x_i^z,$$

en appelant $x_1, x_2, \dots$ les racines de l'équation $\varphi(x) = 0$, dont, par hypothèse, aucune n'est égale à l'unité.

Posons

$$u_z = v_z + Q(z) = v_z + \omega_z,$$

$Q(z)$ représentant un polynôme en z , de degré p .

Lorsque nous voudrions former la fonction $f(u)$ ou $\varphi(u)(u-1)^p$, nous pourrions la décomposer en $f(v) + f(Q)$. Mais $f(v)$ sera nul, puisque la suite (v) a pour échelle de récurrence $\varphi(x) = 0$. La fonction $f(u)$ se réduit donc à $f[Q(z)]$. Si le polynôme $Q(z)$ est développé sous la forme

$$\beta_0 + \beta_1 z + \dots + \beta_p z^p,$$

on pourra encore écrire symboliquement

$$f(\beta_0) + f(\beta_1 z) + \dots + f(\beta_p z^p).$$

Dans chaque terme, le coefficient β_i entre en facteur; de plus, la fonction $f(x)$ étant $\varphi(x)(x-1)^p$, se traduit symboliquement par $\varphi(u)(u-1)^p$ ou $\varphi(u)\Delta^p u$. Or, les différences $p^{\text{ièmes}}$ des divers termes sont nulles, à l'exception de la dernière, qui est constante et égale à $p!$.

Soit maintenant $\varphi(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$

Nous devons former

$$(c_0 \omega_k + c_1 \omega_{k+1} + c_2 \omega_{k+2} + \dots) \beta_p p!;$$

et, dès l'instant où la différence $n^{\text{ième}}$, $\Delta^p = \beta_p p!$ est constante, l'expression symbolique $\omega_i \Delta^p$ ou $\Delta^p \omega_i$ est constante aussi, puisque l'indice est indifférent. Par suite, nous aurons

$$(c_0 + c_1 + c_2 + \dots) \beta_p p!$$

ou encore $\varphi(1) \beta_p p!$.

Il en résulte qu'on aura finalement

$$u_k[f(u)] = \varphi(1)\beta_p p! = h.$$

On remarquera la coïncidence que présente ce résultat avec celui du numéro précédent, lorsque $p = 0$, c'est-à-dire quand l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de racines égales à l'unité.

Lorsque, pour définir la suite (u) , on se sera donné les premiers termes $u_0, u_1, \dots, u_n$, ou, ce qui revient au même, n termes seulement et, en outre, la valeur de h , on écrira les $n + 1$ équations

$$u_z = A_1 \rho_1^z + A_2 \rho_2^z + \dots + A_m \rho_m^z + \beta_0 + \beta_1 z + \dots + \beta_p z^p,$$

pour les valeurs $0, 1, \dots, n$ de z . Dans ces équations, $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m$ sont les racines de $\varphi(x) = 0$, et l'on a $n = m + p$. Les n inconnues sont

$$A_1, A_2, \dots, A_m, \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p,$$

c'est-à-dire également au nombre $n + 1 = m + p + 1$.

Il est bon d'éclaircir ce qui précède par un exemple.

Prenons une suite pseudo-récurrente dont l'échelle soit $(u-1)^3(u-2) = h$, avec $h = -6$, et les quatre premiers termes étant $3, 3, 4, 13$; on en déduit immédiatement que le cinquième est 38 , en développant $f(u)$, ce qui donne

$$u_5 - 5u_3 + 9u_2 - 7u_1 + 2u_0 = -6.$$

Nous aurons, d'après ce qui précède, $\varphi(x) = x - 2$, $m = 1$, $p = 3$, et

$$\begin{aligned} 3 &= A_1 + \beta_0, \\ 3 &= 2A_1 + \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3, \\ 4 &= 4A_1 + \beta_0 + 2\beta_1 + 4\beta_2 + 8\beta_3, \\ 13 &= 8A_1 + \beta_0 + 3\beta_1 + 9\beta_2 + 27\beta_3, \\ 38 &= 16A_1 + \beta_0 + 4\beta_1 + 16\beta_2 + 64\beta_3. \end{aligned}$$

On tire de ces équations

$$A_1 = 1, \quad \beta_0 = 2, \quad \beta_1 = 1, \quad \beta_2 = -3, \quad \beta_3 = 1,$$

et l'expression générale du terme u_z est

$$u_z = 2^z + 2 + z - 3z^2 + z^3,$$

comme il est facile de le vérifier.

On peut se servir utilement, pour obtenir la suite (u) , du Tableau des différences. En effet, les différences $4^{\text{èmes}}$ [en général $(p+1)^{\text{èmes}}$] provenant du polynome en z seront nulles, et il ne restera plus que celles provenant des puissances de z (et, en général, des termes v), lesquelles forment elles-mêmes une suite récurrente de même échelle, c'est-à-dire ici une progression par quotient de raison 2. Nous donnons ci-dessous ce Tableau :

3	3	4	13	38	89	180	333	586 ...
0	1	9	25	51	91	153	253	
	1	8	16	26	40	62	100	
		7	8	10	14	22	38	
			1	2	4	8	16	

Vérifions enfin que $h = -6$, $\varphi(x) = x - 2$, $\varphi_3 = 1$, $3! = 6$, ce qui donne bien $h = \varphi(1)\varphi_p p!$, puisque $\varphi(1) = -1$.

3. La valeur $h = \varphi(1)\varphi_p p!$, que nous avons trouvée ci-dessus, peut s'exprimer encore d'une autre manière assez remarquable. On a, en effet,

$$f(x) = (x-1)^p \varphi(x),$$

et, en prenant successivement les dérivées jusqu'à la $p^{\text{ième}}$, puis faisant $x = 1$, on a

$$f^{(p)}(1) = p! \varphi(1).$$

On peut donc écrire

$$h = \varphi_p f^{(p)}(1)$$

et aussi

$$h = \frac{Q(z)f^{(p)}(1)}{p!} = \varphi(1)Q^{(p)}(z),$$

$Q^{(p)}(z)$ étant une constante, puisque Q est un polynome de degré p .

SÉANCE DU 21 FÉVRIER 1901.

PRÉSIDENCE DE M. D'OCAGNE.

Communications :

M. Estantave : *Sur le calcul de π .*

M. LECORNU fait la Communication suivante :

Sur la vis sans fin.

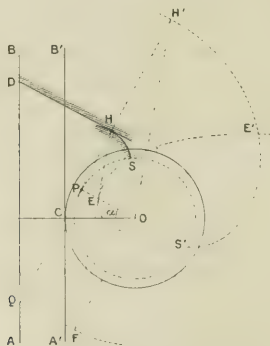
L'engrenage à vis sans fin, destiné à relier deux mouvements

de rotation effectués autour d'axes perpendiculaires non concourants, est généralement constitué par une vis à filet carré assujettie à demeurer en contact avec un hélicoïde développable. Le point de contact décrit sur la surface de vis une hélice déterminée, qui tend à devenir une ligne d'usure, sans que le reste de la surface soit utilisé pour le fonctionnement de l'appareil.

Si l'on pouvait faire en sorte que la trajectoire du point de contact n'eût pas tous ses points à la même distance de l'axe de la vis, on remédierait aisément à l'inconvénient de l'usure : car il suffirait de donner, de temps en temps, à la vis un léger déplacement dans le sens de son axe pour faire travailler, à tour de rôle, des parties différentes de la surface.

Le moyen le plus simple de parvenir à ce résultat consiste à remplacer la surface de vis à filet carré par une surface de vis à

Fig. 1.



filet triangulaire qu'on peut d'ailleurs prendre très peu différente de la première. Mais alors la surface conjuguée n'est plus un hélicoïde développable ; je me propose de déterminer ici sa nature.

Soit AB l'axe de la vis triangulaire et soit O la trace du second axe de rotation, perpendiculaire au plan de la figure, que nous supposons horizontal (*fig. 1*). A chaque instant, la surface de vis coupe le plan de la figure suivant une droite DH inclinée d'un angle constant $\frac{\pi}{2} - \alpha$ sur la droite AB. La vis tournant avec une

vitesse uniforme, la droite DH se meut avec une vitesse constante et se comporte ainsi comme une crémaillère à flanc oblique, propre à assurer le roulement relatif d'une droite A'B', parallèle à AB, située à la distance constante R' de AB et d'une circonférence de centre O et de rayon OC = R. Les longueurs R et R' sont arbitraires. Si nous abaissons la perpendiculaire CH sur DH, son pied H est le point de contact de DH avec le profil conjugué; et, comme CH est tangent à une circonférence de centre O et de rayon OP = R cos z, le profil est une développante HS de cette circonférence. La distance du point H à l'axe AB croît proportionnellement à l'angle de rotation; il en résulte que, perpendiculairement à cet axe, le lieu des points H considérés comme appartenant à la surface de la vis a pour projection une spirale d'Archimède. Ce lieu est d'ailleurs l'intersection de la vis avec le cône engendré par la rotation de CH autour de l'axe AB.

Il faut maintenant trouver la surface enveloppée par des plans tangents à la développante et tels que chacun d'eux vienne successivement en coïncidence avec un plan tangent à la vis. En appelant h le pas de la vis et ρ le rayon de courbure PH de la développante, on trouve aisément qu'au point H le plan tangent à la vis forme avec le plan de la figure un angle i donné par la formule

$$\operatorname{tang} i = \frac{\pi}{h} [R' + (R \sin z + \rho) \sin z] \cos z,$$

ce qu'on peut écrire

$$\operatorname{tang} i = \frac{\rho + b}{a}$$

en posant

$$a = \frac{h}{2\pi \sin z \cos z}, \quad b = \frac{R'}{\sin z} + R \sin z + PQ.$$

Nous avons donc à construire une surface développable Σ , contenant la développante, sachant que le plan tangent au point pour lequel la développante a un rayon de courbure ρ coupe le plan de cette courbe sous un angle i répondant à la formule qui précède.

A cet effet, considérons une développante H S' parallèle à la première, et située à la distance normale b de celle-ci. Menons par les tangentes à la courbe HS' des plans parallèles aux plans

tangents de la surface Σ . Le plan passant en H' est incliné de l'angle i sur le plan de la figure. Il coupe à la hauteur

$$(\rho + b) \cotang i,$$

c'est-à-dire a , le plan vertical passant par OP et, par conséquent, il rencontre en un point fixe l'ordonnée du point O . On voit ainsi que la nouvelle surface est un cône Σ' . Les sections horizontales de ce cône sont des développantes homothétiques à $H'S'$. Pour la section faite à la hauteur z , le rapport d'homothétie est $1 - \frac{z}{a}$ et, par suite, le rayon de la circonférence correspondante est

$$R \cos \alpha \left(1 - \frac{z}{a}\right).$$

Cela étant, on obtiendra la surface cherchée Σ en portant horizontalement à partir de chaque point du cône Σ' , dans la direction normale à la développante qui passe en ce point, la longueur constante b . Les sections horizontales de Σ sont des développantes égales à celles qui appartiennent au cône. Dans le plan horizontal ayant pour cote z , la rotation qui fait passer de la section du cône à celle de la surface Σ est $\frac{b}{R \cos \alpha \left(1 - \frac{z}{a}\right)}$. Cet

angle augmente indéfiniment à mesure qu'on se rapproche du sommet du cône. Dans le plan horizontal passant par le sommet, la rotation devient infinie : il est aisé de voir que la section de la surface est alors une circonférence de rayon b . Par conséquent, *la surface Σ peut être regardée comme l'enveloppe d'un plan qui s'appuie à la fois sur une circonférence et sur la développante d'une autre circonférence située dans un plan parallèle, les deux circonférences ayant leurs centres sur une même perpendiculaire à la direction de leurs plans.*

Voyons maintenant quelle est la nature de l'arête de rebroussement. Soit HF la projection de la génératrice passant en H . Nous savons que si F est le point situé dans le plan horizontal

mené par le sommet du cône, la droite OF est parallèle et égale à HH', dont la longueur est b . Pour une rotation $d\theta$ du rayon ρ , l'extrémité H se déplace le long de la développante d'une longueur $\rho d\theta$; l'extrémité F éprouve un déplacement parallèle, mais de sens contraire, et égal à $b d\theta$. Le point de contact E de HF avec son enveloppe partage donc HF dans le rapport $\frac{\rho}{b}$, c'est-à-dire que E se trouve sur le rayon OP. Par suite, $OE = OP \times \frac{b}{b + \rho}$ et, comme l'angle θ , mesuré à partir du rayon aboutissant au point de rebroussement S' de la courbe H'S', a pour valeur $\frac{b + \rho}{OP}$, on a la relation $OE \times \theta = b$. Donc :

L'arête de rebroussement de la développable Σ se projette horizontalement suivant une spirale hyperbolique.

Cette spirale, figurée en ESE', passe par le point de rebroussement S de la développable HS, car, en ce point, le rayon vecteur est égal à OP et l'angle polaire à $\frac{b}{OP}$. Dans l'espace, l'arête de rebroussement est le lieu des points de rebroussement des développantes formant les sections horizontales de Σ . Cette arête de rebroussement se trouve sur le cône droit dont la base est la circonférence PSS' et dont le sommet est à la hauteur a au-dessus de O en coïncidence avec le sommet du cône Σ' . Si l'on développe le cône droit sur un plan, l'arête de rebroussement se développe suivant une spirale hyperbolique égale à la première : on le reconnaît immédiatement en remarquant que les deux spirales ont la même sous-tangente polaire égale à b .

En résumé : *la surface conjuguée de la vis à filet triangulaire est la développable, lieu des tangentes à une spirale hyperbolique enroulée sur un cône de révolution dont le sommet est au pôle de la spirale ; les sections faites dans cette surface perpendiculairement à l'axe du cône sont des développantes des sections du cône ; la section dont le plan passe par le sommet du cône est circulaire.*

SÉANCE DU 7 MARS 1901.

PRÉSIDENCE DE M. D'OCAGNE.

Communications :

M. Estantave : *Sur le calcul de π .*

M. ÉMILE BOREL fait la Communication suivante :

Sur les ordres d'infinitude.

On sait quelle est l'importance de la théorie élémentaire des infiniment petits: *un infiniment petit principal x* ayant été choisi, les autres infiniment petits sont comparés aux puissances positives de l'infiniment petit principal; si l'infiniment petit y est tel que son rapport à x^a tende vers une limite finie lorsque x tend vers zéro, on dit que *l'ordre infinitésimal de y est déterminé*, et cet ordre est égal au nombre positif a .

La définition que nous venons de donner est celle qui est actuellement adoptée dans l'enseignement; Cauchy a indiqué une définition différente, souvent plus utile (1) : l'infiniment petit y est dit d'ordre a si, quelque petit que soit le nombre positif ε , le quotient

$$\frac{y}{x^{a+\varepsilon}}$$

tend vers zéro, tandis que le quotient

$$\frac{y}{x^{a-\varepsilon}}$$

augmente indéfiniment, lorsque x et y tendent simultanément vers zéro.

Pour éviter toute confusion, nous dirons que l'ordre infinitésimal de y est a lorsque les conditions de la définition usuelle sont vérifiées, et qu'il est (a) lorsque y vérifie seulement les conditions de Cauchy (2); l'ordre de la fonction $x^2 \log x$ est (2).

(1) Voir, par exemple, les *Préliminaires des Leçons sur le Calcul différentiel*. Paris, 1829. — *Œuvres de Cauchy*, Série II, t. IV, p. 281.

(2) La notation (a) peut s'énoncer brièvement : *a parenthèse*.

Il est clair que les définitions précédentes se transportent sans difficulté au cas où y et x sont supposés infiniment grands et positifs au lieu d'être supposés infiniment petits; nous ferons cette hypothèse, qui simplifiera les écritures ultérieures; ainsi nous désignons désormais par x une variable *positive* infiniment grande.

Notre but est d'étendre la théorie des ordres d'infinitude à des cas où la valeur que l'on serait conduit à leur attribuer serait zéro ou l'infini (*).

Dans ce but, nous conviendrons de dire que x étant l'infiniment petit principal, l'ordre d'infinitude de e^x est ω . Cette définition étant posée, nous conviendrons que, *si l'ordre de z considéré comme fonction de y est a , tandis que l'ordre de y considéré comme fonction de x est b , l'ordre de z considéré comme fonction de x sera désigné par ab* . De plus, si les ordres de y et de z sont respectivement a et b , l'ordre de yz sera dit égal à $a + b$.

Enfin, si l'ordre de y considéré comme fonction de x est a , l'ordre de x considéré comme fonction de y est $\frac{1}{a}$.

Ces définitions permettent d'écrire immédiatement les ordres des fonctions que l'on obtient en combinant les fonctions $e^x, x^m, \log x$; voici quelques exemples :

$$\begin{array}{ll} e^{x^2} x^3 \log x, & \omega 2 + 3 + \frac{1}{\omega}, \\ e^{mx} \log x^m, & m\omega + \frac{1}{\omega} m, \\ e^x e^{x^2}, & \omega [1 + \omega 2]. \end{array}$$

On remarquera que la multiplication n'est généralement pas commutative; l'on n'a pas $\omega 2 = 2\omega$. De plus, si l'on a toujours

$$[b + c]a = ba + ca,$$

l'on a *généralement*

$$a[b + c] = ab + ac.$$

(*) Cf. les travaux de du Bois-Reymond et de M. Pincherle sur les fonctions croissantes. Je ne puis donner ici une bibliographie complète.

Voir aussi mon *Mémoire sur les séries divergentes*, première Partie (Annales de l'École Normale, 1899).

Les définitions précédentes correspondent à la définition que nous avons rappelée au début de cette Communication ; il est souvent avantageux d'y substituer une définition plus large, analogue à la définition de Cauchy.

Considérons un polynome tel que le suivant :

$$i = ab + cde + fg,$$

les lettres $a, b, c, \dots, g$ désignant, soit des nombres positifs, soit l'un des symboles ω ou $\frac{1}{\omega}$. A ce polynome i on peut faire correspondre, d'après ce qui précède, une fonction croissante de x bien déterminée ayant pour ordre d'infinitude i . Nous la désignerons par $F(x, b)$, en mettant en évidence l'une des lettres b qui figurent dans l'expression de i ; nous supposons que la lettre ainsi mise en évidence désigne un nombre positif et non un symbole tel que ω .

Supposons qu'une fonction $\varphi(x)$ soit telle que l'on ait, quel que soit le nombre positif ε ,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi(x)}{F(x, b - \varepsilon)} = x, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi(x)}{F(x, b + \varepsilon)} = 0.$$

Nous conviendrons de dire que l'ordre d'infinitude j de $\varphi(x)$ est défini par la formule

$$j = a(b) + cde + fg.$$

Il arrivera d'ailleurs souvent que la présence du symbole (b) permet, sans changer la signification de j , d'en simplifier l'expression en supprimant certains termes; mais nous ne pouvons entrer dans ces détails.

Cette notation me paraît devoir être fort commode dans bien des recherches; j'en ai donné quelques applications dans le Cours que j'ai fait cet hiver au Collège de France ⁽¹⁾; pour le moment, je me contente de la signaler, afin que les mathématiciens à qui elle pourrait rendre des services l'éprouvent à l'usage ⁽²⁾.

(1) Ce Cours sera publié, sous le titre de *Leçons sur les séries à termes positifs*, par les soins de M. Robert d'Adhémar, qui travaille en ce moment à sa rédaction.

(2) Il est clair qu'il existe des fonctions $\varphi(x)$ dont l'ordre d'infinitude ne peut pas être exprimé par une telle notation, de même qu'il existe des infiniment petits dont l'ordre infinitésimal n'est pas déterminé; la théorie des ordres infinitésimaux est cependant fort utile.

SÉANCE DU 21 MARS 1901.

PRÉSIDENCE DE M. TOUCHE.

Communications :

M. ERNST LINDELÖF adresse la Note suivante :

Sur le prolongement analytique.

Dans le dernier Tome de ce Recueil, M. Borel a donné ⁽¹⁾ un exemple très simple d'une série de polynômes représentant une fonction analytique dans un domaine plus grand que le cercle de convergence de son développement de Taylor. J'ai été conduit à un exemple analogue, mais plus général, que M. Borel a bien voulu m'inviter à présenter ici.

Soit $f(x)$ une fonction analytique définie par son développement de Taylor

$$(1) \quad f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots,$$

dont nous supposons le rayon de convergence fini, et soit A l'étoile principale correspondante, suivant la terminologie de M. Mittag-Leffler. En menant par chaque sommet de A une droite perpendiculaire au rayon vecteur en ce point, nous formerons un polygone P limité par certaines de ces droites et comprenant tout entier le cercle de convergence du développement (1). C'est à ce polygone P que M. Borel a donné le nom de *polygone de sommabilité* ⁽²⁾.

Nous nous proposons de former une série de polynômes représentant la fonction $f(x)$ dans le polygone P.

Rappelons d'abord le théorème général qui ramène la question à la recherche d'un développement de la fonction $\frac{1}{1-x}$, théorème qui repose sur une des plus belles applications de l'intégrale de Cauchy ⁽³⁾.

Supposons qu'on ait obtenu, par un procédé quelconque, un

(1) *Bulletin de la Société mathématique*, p. 206; 1900. Voir aussi *Leçons sur les séries divergentes*, p. 170.

(2) Voir BOREL, *Leçons sur les séries divergentes*, p. 127.

(3) Cf. BOREL, *Mémoire sur les séries divergentes* *Annales de l'École Normale*, p. 63-65; 1899.

développement de $\frac{1}{1-x}$ en série de polynômes,

$$(2) \quad \frac{1}{1-x} = \sum_n (c_{n0} + c_{n1}x + c_{n2}x^2 + \dots + c_{ny_n}x^{y_n}),$$

qui converge uniformément dans toute aire comprise dans l'intérieur d'un certain domaine $\bar{X}$, renfermant l'origine et dont le contour n'est coupé en plus d'un point par aucun rayon vecteur issu de l'origine. Si l'on forme alors, à l'aide des coefficients du développement (1), la série

$$(3) \quad \sum_n (c_{n0}a_0 + c_{n1}a_1x + c_{n2}a_2x^2 + \dots + c_{ny_n}a_{y_n}x^{y_n}),$$

elle sera uniformément convergente et représentera la fonction $f(x)$ dans toute aire intérieure au domaine X , qu'on obtient par la construction géométrique suivante :

α désignant l'affixe d'un sommet quelconque de l'étoile A , appliquons au domaine $\bar{X}$ la transformation homothétique $x' = \alpha x$. En opérant ainsi pour chaque sommet de A , nous aurons un nombre, fini ou infini, de domaines homothétiques à $\bar{X}$; X sera la partie du plan commune à tous ces domaines.

Toutefois, X n'est pas nécessairement le vrai domaine de convergence de la série (3), qui pourrait, en effet, être convergente en des points extérieurs à X .

En vertu du théorème ci-dessus, la question que nous nous sommes proposée revient à celle-ci : *Trouver un développement de la fonction $\frac{1}{1-x}$ en série de polynômes qui converge dans le demi-plan $\bar{P}$, situé à gauche de la parallèle à l'axe imaginaire menée par le point $x = 1$.*

A cet effet, développons $\frac{1}{1-x}$ suivant les puissances de $x + n$, en désignant par n un entier positif; nous aurons

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1}{n+1} \left[1 + \frac{x+n}{n+1} + \left(\frac{x+n}{n+1} \right)^2 + \dots + \left(\frac{x+n}{n+1} \right)^{m-1} \right] + R_m,$$

le reste R_m ayant la valeur

$$R_m = \left(\frac{x+n}{n+1} \right)^m \frac{1}{1-x}.$$

Pour les valeurs x comprises dans le cercle $|x+n| \leq 1+n-\varepsilon$,

ε désignant un nombre positif fixe, la valeur absolue de R_m ne dépassera pas la limite

$$\frac{1}{\varepsilon} \left(1 - \frac{\varepsilon}{n+1}\right)^m,$$

valeur de R_m au point $x = 1 - \varepsilon$ et, lorsque ε tend vers zéro, cette limite tendra également vers zéro, si l'on fait en même temps croître m de telle manière que l'inégalité

$$m > \frac{n+1}{\varepsilon^{1-\rho}}$$

ait constamment lieu, ρ désignant un nombre positif quelconque. En effet, il s'ensuit

$$\frac{1}{\varepsilon} \left(1 - \frac{\varepsilon}{n+1}\right)^m < \frac{1}{\varepsilon} \left[\left(1 - \frac{\varepsilon}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{\varepsilon}} \right]^{\varepsilon^{\rho}} < \frac{1}{\varepsilon} e^{-\varepsilon^{\rho}},$$

et cette dernière expression tend évidemment vers zéro en même temps que ε .

Faisons, en particulier,

$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{n+1}}, \quad \rho = 1, \quad m = (n+1)^2 + 1,$$

ce qui est conforme aux hypothèses précédentes; nous pourrons énoncer les résultats suivants :

Le polynome

$$\overline{P}_n(x) = \frac{1}{n+1} \left[1 - \frac{x-n}{n+1} + \left(\frac{x-n}{n+1}\right)^2 - \dots + \left(\frac{x-n}{n+1}\right)^{n+1} \right]$$

représente la fonction $\frac{1}{1-x}$ dans le cercle

$$x - n \leq n+1 + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

avec une erreur inférieure à

$$\sqrt{n+1} e^{-\sqrt{n+1}}.$$

Lorsque n tend vers l'infini, le cercle tendra à embrasser tout le demi-plan $\overline{P}$ et l'erreur tendra vers zéro; par suite :

La série de polynomes

$$\dot{P}_1(x) = [\overline{P}_2(x) - \overline{P}_1(x)] + [\overline{P}_3(x) - \overline{P}_2(x)] + \dots$$

est uniformément convergente et représente la fonction $\frac{1}{1-x}$ dans toute aire comprise dans l'intérieur du demi-plan P .

D'après le théorème général énoncé au début, il ne nous reste plus qu'à développer les polynomes $\bar{P}$ suivant les puissances de x , puis remplacer x^i par $a_i x^i$. En désignant, comme d'habitude, par C_v^p le coefficient binomial

$$C_v^p = \frac{p(p-1)\dots(p-v+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot v},$$

nous arrivons ainsi au théorème suivant qui donne la solution du problème que nous nous étions proposé :

Étant donné un développement de Taylor quelconque (1) dont le rayon de convergence n'est ni nul ni infini; si l'on pose

$$P_n(x) = \sum_{v=0}^{n+1} \frac{1}{(n+1)^{v-1}} [a_v x^v - C_v^1 n a_{v-1} x^{v-1} + \dots + C_v^n n^v a_0],$$

la série de polynomes

$$P_1(x) + [P_2(x) - P_1(x)] + [P_3(x) - P_2(x)] + \dots$$

sera uniformément convergente et représentera la fonction $f(x)$, définie par le développement (1), dans toute aire qui est entièrement intérieure au polygone P.

La série précédente, d'après ce que nous avons déjà fait remarquer, pourrait être convergente en des points extérieurs au polygone P. Si l'on cherchait, pour la fonction $f(x)$, un mode de représentation dans P qui diverge sûrement en dehors de ce polygone, on serait amené, suivant M. Mittag-Leffler ⁽¹⁾, à former des *expressions limites doubles*. Or, on voit de suite que l'expression

$$\lim_{n=\infty} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^v} (a_v x^v - C_v^1 n a_{v-1} x^{v-1} + \dots + C_v^n n^v a_0)$$

répond à la condition requise. Mais ce mode de représentation ne nous fournit pas une *expression analytique* valable dans P, dans le sens propre de ce mot.

(1) Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène, seconde et troisième Notes (*Acta Mathematica*, t. XXIV).

MÉMOIRES.

SUR LES RAPPORTS ENTRE LE CALCUL MÉCANIQUE ET LE CALCUL GRAPHIQUE;

Par M. L. TORRIS.

Il s'agit ici, bien entendu, non des calculs numériques exécutés par des arithmomètres et autres appareils analogues, mais de la construction mécanique des formules qu'on veut calculer. La possibilité de cette construction a été établie par moi dans un mémoire intitulé *Machines à calculer*, que l'Académie des Sciences a ordonné d'insérer dans le *Recueil des Savants étrangers*, et dont les premiers mots, que je copie ici, ont pour but d'expliquer ce que veut dire la locution *construire une formule mécaniquement*:

« On exprime souvent en Mécanique les liaisons qui existent entre les différents points d'un système, en écrivant les équations de condition que ces liaisons établissent entre les valeurs simultanées des coordonnées de ces points. Les liaisons se trouvent ainsi parfaitement définies; elles permettent tout mouvement compatible avec les équations et empêchent tout mouvement qui soit incompatible avec celles-ci. Imaginons, pour fixer les idées, qu'on ait construit un système dans lequel le nombre de points liés soit n , et le nombre d'équations établies par les liaisons entre les valeurs simultanées de leurs $3n$ coordonnées soit k . Nous pourrions faire varier arbitrairement $3n - k$ de ces coordonnées, car, à chaque instant, aux $3n - k$ valeurs de ces variables, que nous avons prises comme indépendantes, correspondront, pour les k coordonnées restantes, k valeurs tirées des équations de condition, et précisément, le système doit, par définition, coordonner les mouvements de tous ses points de telle sorte que les équations soient constamment vérifiées.

» On pourra donc dire qu'en construisant un pareil système on construit les équations qui en définissent les liaisons, ... »

On peut se donner des équations de condition quelconques et

construire un système où elles soient réalisées. La construction du système est toujours possible en théorie ; cela est démontré dans mon Mémoire ; je ne puis pas répéter ici ma démonstration ; je me contenterai de renvoyer le lecteur, soit au Mémoire qui doit paraître bientôt, soit au Rapport de M. Appell, qui se résume en ces termes (1) :

« En résumé, M. Torrès a donné une solution théorique, générale et complète du problème de la construction des relations algébriques et transcendantes par des machines. »

Je voudrais faire voir dans cette Note l'étroite parenté théorique qui existe entre la méthode de calcul par le trait, devenue classique depuis longtemps, la méthode des abaqués, constituée tout récemment en corps de doctrine par M. d'Ocagne (2), et la méthode mécanique dont je viens de parler. On peut dire, en vérité, qu'elles conduisent toutes trois à la détermination d'une figure dans laquelle les valeurs à calculer se trouvent représentées par certaines grandeurs géométriques. Seulement, les procédés à suivre pour obtenir cette figure varient totalement d'un cas à l'autre.

Dans le calcul par le trait, chaque variable d'une formule est représentée par la grandeur d'un certain élément d'une figure tracée suivant une loi donnée. Il faut, pour chaque cas particulier, construire une figure spéciale ; on suit toujours la même loi, mais, dans chaque cas, on opère sur des grandeurs différentes des éléments connus.

Un abaque est l'ensemble de toutes les figures construites suivant la même loi ; les valeurs particulières des quantités connues permettent de déterminer dans chaque cas la figure qu'il faut considérer.

Une machine est une figure construite suivant une certaine loi, avec des éléments de grandeur variable ; on peut dire que dans la machine sont virtuellement construites toutes les figures se conformant à la loi donnée. Les valeurs particulières des quantités

(1) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. CXXX, séance du 2 avril 1900.

(2) *Traité de Nomographie*, par MAURICE D'OCAGNE. Paris, Gauthier-Villars ; 1899.

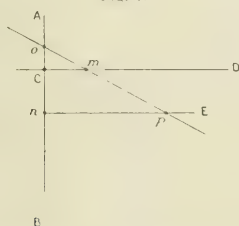
connues permettent, dans chaque cas, d'amener la machine à prendre la position qu'il faut considérer.

Un exemple éclaircira ce que je viens de dire.

Supposons qu'on veuille calculer le produit de deux facteurs ($z = x. y$).

La *fig. 1* indique une construction d'après la méthode de

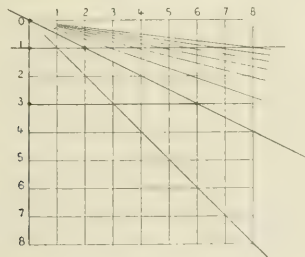
Fig. 1.



calcul par le trait. Sur deux lignes AB, CD, perpendiculaires entre elles, on prend les segments $OC = 1$, $Cm = x$, $On = y$; on trace la ligne Om et la ligne nE , parallèle à CD, et l'on a évidemment $nP = z$.

Cette figure et, en principe, toutes les autres analogues, sont contenues dans l'abaque (*fig. 2*) qui n'exige aucune explica-

Fig. 2.



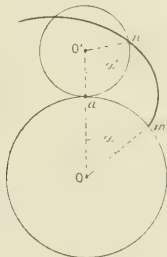
tion. La *fig. 1* y a été mise en évidence au moyen de traits plus forts.

les machines aux abaques à plusieurs plans (1). La *fig. 2* de mon Mémoire présente, si l'on veut, l'abaque de la multiplication à points alignés(2) et une figure schématique, tracée pour expliquer en principe une de mes machines, que j'ai communiquée à M. d'Ocagne, a été étudiée par lui comme un abaque (3).

La différence essentielle consiste en ce que, dans les machines, les différents organes sont liés mécaniquement, tandis que, dans les abaques, les liaisons sont simplement formulées; elles sont indiquées dans les instructions qu'on donne sur la manière de

par des exigences pratiques bien connues; elles conduisent ordinairement à des solutions qui cachent l'analogie dont je viens de parler. L'engrenage de deux roues dentées, par exemple, ne met pas clairement en relief l'existence de cette figure variable. Elle y est pourtant; on pourrait, en admettant dans le calcul par le trait l'emploi de courbes quelconques, calculer un angle α' , n fois plus grand qu'un angle donné α , au moyen de la construction suivante: On trace (*fig. 4*) une circonférence O , de rayon n , et une autre O' , tangente à la première,

Fig. 4.



de rayon n ; on prend sur le cercle O un angle $aOm = \alpha$ et l'on trace l'épicycloïde passant par le point m , que tracerait un point du cercle O' quand celui-ci roulerait sur le cercle O ; l'angle cherché est $nO'a$. Matérialisons l'épicycloïde au moyen d'une rainure tracée sur un plan qui tourne autour du point O et remplaçons le point n par une goupille, engagée dans cette rainure, et fixée dans un plan qui tourne autour du point O' . Le tracé graphique est devenu machine; il n'y a plus, chacun le sait, qu'à employer plusieurs épicycloïdes et plusieurs goupilles pour obtenir une paire de roues dentées.

(1) Étudiées par M. D'OCAGNE, dans son *Traité de Nomographie*, p. 343 et 347.

(2) D'OCAGNE, *Le Calcul simplifié par les procédés mécaniques et graphiques*, p. 109, et *Traité de Nomographie*, p. 332.

(3) *Traité de Nomographie*, p. 366.

placer les différents plans les uns sur les autres au moment de consulter l'abaque. Supposons que, dans la machine (*fig. 3*), les règles R, R' deviennent des feuilles transparentes, que les goupilles deviennent des points et que les rainures deviennent des lignes : nous aurons transformé la machine en un abaque à trois plans ; les règles à suivre pour superposer convenablement ces plans dans chaque cas particulier seront facilement imaginées par le lecteur. Ce serait partout la même chose, seulement, les connexions indiquées entre les plans sont, en général, trop compliquées pour être réalisées mécaniquement.

Dans la construction des fonctions explicites, l'analogie est toujours complète ; c'est dans la résolution d'équations qu'il y a lieu d'établir des différences fondamentales.

Une formule, $\alpha = F(x, y, z, u, \dots)$ étant donnée, on peut toujours, en suivant l'une quelconque des trois méthodes qui nous occupent, déterminer α en fonction de $x, y, z, u, \dots$. Peut-on, également, déterminer une de ces dernières variables en fonction de α et de toutes les autres ?

Le calcul par le trait, tel qu'on l'applique ordinairement, ne donne en général aucune solution pour ce problème ; il faut une construction spéciale pour calculer chacune des variables. Il y a pourtant des cas où les constructions faites pour calculer une fonction explicite donnent des solutions très élégantes pour calculer quelques-unes des autres variables.

La méthode des abaques, quand elle est appliquée dans toute sa pureté, quand chaque variable est représentée par une seule graduation et qu'on a exécuté d'avance toutes les constructions pour tous les cas particuliers qu'on aura à considérer, permet de calculer n'importe laquelle des variables en fonction de toutes les autres. En particulierisant celles-ci, on détermine la figure qui correspond au cas considéré et l'on n'a plus qu'à lire sur cette figure la valeur de l'inconnue ou des inconnues (¹).

Dans les machines on peut toujours, je l'ai déjà dit, construire

(¹) Ce procédé de construction est applicable seulement aux formules qui satisfont à certaines conditions étudiées par M. D'OCAGNE, dans une savante analyse, à la fin de son *Traité de Nomographie*.

n'importe quelle fonction explicite ou implicite, puisqu'on construit réellement toutes les liaisons qui existent entre les variables.

SUR L'UTILITÉ DES EXEMPLES CINÉMATIQUES DANS L'EXPOSITION DES THÉORIES MATHÉMATIQUES;

Par M. L. TORRES.

I. Les mathématiciens emploient volontiers des exemples géométriques pour illustrer leurs explications; ils trouveraient souvent, je pense, plus d'avantage à employer des exemples cinématiques qui seraient généralement plus exacts et plus suggestifs. Dans une figure géométrique, tout est constant; ce n'est que par des artifices plus ou moins ingénieux qu'on peut y considérer des quantités variables dépendantes les unes des autres; la figure ne sera jamais qu'une image symbolique des relations qu'elle représente. Dans une machine, ces relations seront construites, elles existeront réellement, nous les verrons agir et nous aurons ainsi une représentation matérielle des faits ou des lois que nous voudrons mettre en évidence.

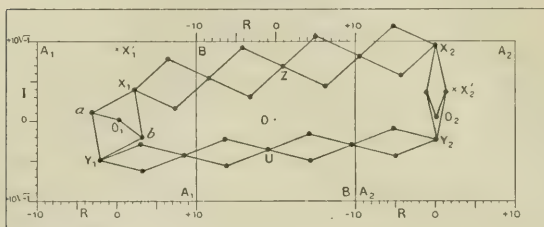
Il n'y aurait là, à vrai dire, aucune nouveauté, puisqu'on prend souvent comme exemple des figures dont la forme peut varier d'après certaines lois, c'est-à-dire des systèmes mécaniques idéaux, mais je pense qu'on devrait recourir d'une manière plus systématique à des exemples de ce genre et même, quand il serait possible, construire des appareils de démonstration. On y arriverait parfois très facilement; ainsi l'appareil que j'ai l'honneur de vous présenter n'est qu'un système articulé très simple qui sert à construire une fonction à deux déterminations avec deux points critiques (¹).

II. Sur la plaque qui porte le système articulé sont dessinés les trois tableaux carrés A_1 , A_2 , B (fig. 1).

(¹) Cet appareil a déjà été présenté par moi à l'Athénée de Madrid, *Ateneo de Madrid*, curso de 1900 à 1901. — Sesión inaugural de la Sección de Ciencias exactas, físicas y naturales, celebrada el 19 de Noviembre de 1900; Madrid, 1900.

Les six points X_1, Y_1, X_2, Y_2, Z, U représentent autant de variables que nous désignerons respectivement par les lettres x_1, y_1, x_2, y_2, z, u . Chacun de ces points reste toujours sur le même tableau et, pour qu'on puisse lire les valeurs des variables ainsi représentées, on a tracé l'échelle des imaginaires pures, I ,

Fig. 1.



et les trois échelles des quantités réelles, R ; ainsi dans la position représentée par la figure nous aurons :

$$X_1 = 2 + 4\sqrt{-1}; U = -1,4 - 3,6\sqrt{-1} \dots$$

Le point O_1 est fixe au centre du tableau A_1 , donc à chaque position du point X_1 correspond une autre position du point Y_1 , parfaitement déterminée par l'action des tiges $X_1 a, X_1 b, Y_1 a, Y_1 b, O_1 a, O_1 b$; nous pourrions donc écrire $y_1 = F(x_1)$. Il s'agit ici d'une fonction qui n'est pas monogène, mais ça ne fait rien pour notre but. On répète dans le Tableau A_2 les constructions que je viens d'indiquer pour le Tableau A_1 ; les points X_2 et Y_2 sont liés par les mêmes connexions mécaniques que les points X_1, Y_1 ; nous pourrions donc écrire $y_2 = F(x_2)$. En outre, par l'effet des deux systèmes de losanges articulés qu'on voit sur la figure, le point Z sera toujours au centre de la droite $X_1 X_2$, et le point U , au centre de la ligne $Y_1 Y_2$.

La position de ce système dépend de la position de deux de ses points que nous pouvons choisir et faire marcher arbitrairement; les valeurs simultanées de toutes les variables considérées se déterminent mécaniquement en fonction de deux quelconques d'entre elles. Nous pourrions donc écrire $z = \varphi(x_1, x_2), u = \psi(x_1, x_2)$,

ou bien, si nous voulons prendre z et u comme variables indépendantes, $x_1 = f_1(z, u)$; $x_2 = f_2(z, u)$. Il n'y a pas moyen de formuler concrètement ces fonctions, parce qu'elles ne sont pas monogènes et ne peuvent pas être représentées par les symboles usuels (¹), mais on peut déduire directement, de la considération des liaisons mécaniques, quelques-unes de leurs propriétés que nous avons intérêt à considérer.

Si l'on permute les valeurs x_1, x_2 , en transportant le point X_1 à X'_1 ($O_1 X'_1 = O_2 X_1$), et le point X_2 à X'_2 ($O_2 X'_2 = O_1 X_2$), le point Z devra se trouver après le mouvement dans le centre de la ligne $X_1 X'_2$; mais les deux droites $X_1 X_2, X'_1 X'_2$ sont les diagonales du parallélogramme $X_1 X'_1 X_2 X'_2$ et se coupent réciproquement en deux parties égales; donc le point Z ne change pas de place. z est donc une fonction symétrique de x_1 et x_2 et nous en dirons autant de u ; car quand on permute les deux points X_1, X_2 , on permute aussi les points Y_1, Y_2 et cette permutation n'altère pas la valeur u .

En donnant des valeurs particulières aux variables z, u , c'est-à-dire en amenant chacun des points Z, U à la position voulue pour qu'il représente la valeur particulière de la variable correspondante, nous déterminerons une certaine position du système; mais on aurait pu en avoir déterminé une autre, celle qu'on obtiendrait en permutant les valeurs x_1, x_2 . Chacune des variables x_1, x_2 peut donc prendre à un moment donné l'une quelconque des deux valeurs représentées simultanément par les points X_1, X_2 et cela quelles que soient les valeurs particulières de z et u ; donc en réalité les deux fonctions $f_1(z, u), f_2(z, u)$ sont une même fonction, et nous pouvons dire que nous avons construit dans notre appareil les deux déterminations d'une fonction de deux variables à deux déterminations, $x = f(z, u)$. En rendant fixe le point U , de manière à rendre la valeur u constante (et cela a été fait dans mon appareil) nous aurons une fonction d'une seule variable à deux déterminations $x = \pi(z)$.

(¹) Il faut excepter la valeur z exprimée par l'équation

$$z = \frac{1}{2} (x_1 + x_2).$$

Considérons maintenant une position de la machine ainsi constituée telle qu'on ait $x_1 = x_2$ et faisons passer le point X_1 à une position infiniment rapprochée; le point X_2 se déplacera en même temps d'une quantité infiniment petite, et il est très facile de faire voir que, u étant une fonction symétrique de x_1, x_2 , et ces deux variables étant égales dans la position considérée, le déplacement de X_2 est égal en grandeur et opposé en direction au déplacement de X_1 , c'est-à-dire qu'on aura $dx_2 = -dx_1$. Réciproquement, z étant encore une fonction symétrique de x_1, x_2 , on déduit des deux conditions $x_1 = x_2, dx_2 = -dx_1$, que cette fonction reste constante. Le point Z reste absolument immobile; il y a donc, dans cette position de l'appareil, un rapport infini de vitesses, c'est-à-dire un point mort; si nous faisons marcher l'appareil en agissant sur le point Z et que nous voulions faire passer celui-ci par la position correspondante au point mort, le mouvement deviendra impossible, et cette impossibilité nous avertira de l'existence d'un point critique dans la fonction construite.

Dans l'appareil ici présent il y a deux points critiques, et l'on peut observer la permutation des deux déterminations chaque fois que le point Z parcourt un contour fermé qui contient un seul de ces deux points.

III. Les fonctions périodiques sont très faciles à représenter cinématiquement. Elles apparaissent, pour ainsi dire, d'elles-mêmes dès qu'on transforme un mouvement circulaire en mouvement continu. On peut en profiter pour construire des fonctions présentant des points critiques logarithmiques ou des fonctions doublement périodiques.

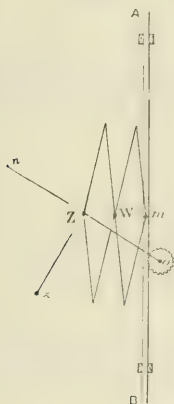
La *fig. 2* représente un appareil composé :

- D'une roue dentée qui tourne autour du point fixe o et entraîne une tige on ;
- D'une tige AB , portant une crémaillère qui engrène avec la roue dentée, guidée par des glissières de façon à ne lui permettre qu'un mouvement de translation dans le sens de sa longueur;
- Et, finalement, d'un double losange qui relie le point Z , assujéti à glisser sur la tige on , au point m , qui est invariablement fixé sur la tige AB .

Si nous faisons marcher le point Z , nous entraînerons la roue dentée, la crémaillère, le point m et le point W . Nous pouvons donc écrire $\varpi = f(z)$.

Supposons que nous faisons marcher le point Z et qu'après lui avoir fait décrire un contour fermé nous le ramenions à la même position ; si le contour ne contient pas le point o , la roue dentée est revenue à sa position sans faire aucun tour et, par suite, les points m et W reviennent à leur position primitive, tandis que,

Fig. 2.



si le point Z a fait un tour autour du point o , la roue dentée aura tourné pendant tout le mouvement d'une circonférence entière, et le point W se trouvera déplacé dans le sens AB d'une distance égale à πr (r étant le rayon de la roue dentée).

o est donc un point logarithmique de la fonction ϖ .

Quand on fera parcourir au point Z un chemin déterminé, à partir d'une position connue de l'appareil, la position finale sera parfaitement déterminée, à moins pourtant que le chemin ne passe pas par le point o ; parce que, si ce cas venait à se présenter, au moment où le point Z est en coïncidence avec le point o , la position de l'appareil devient indéterminée, la roue peut tourner

autant qu'on voudra et il est impossible de savoir quelle sera la position finale de l'appareil.

Il est du reste facile de voir que le mouvement serait, dans ce cas, impossible, car, quand le point Z coïncide avec le point o , la machine passe par un point mort qui représente, comme toujours, un point critique de la fonction construite.

Je pourrais multiplier les exemples, mais je ne le crois pas nécessaire; j'ai assez dit pour qu'on puisse juger si les exemples cinématiques pourraient réellement être, comme je pense, de quelque utilité dans l'enseignement.

APPAREIL STÉRÉOSCOPIQUE POUR METTRE EN RELIEF LES FIGURES GÉOMÉTRIQUES SE RAPPORTANT AUX FONCTIONS ELLIPTIQUES;

Par M. A.-G. GREENHILL.

Cet appareil a figuré au Palais de l'Optique à l'Exposition Universelle; je voudrais le présenter aux Membres de la Société mathématique de France, parce que j'ai réduit de moitié le degré des équations que j'ai données autrefois, et qui se rapportent aux figures.

Ainsi, en employant la projection stéréographique, l'équation de la chaînette sphérique algébrique I, qui dépend d'un paramètre elliptique qui est le cinquième d'une période, peut s'écrire

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{2}{5} \arcsin \frac{(\sqrt{51}-7)t^3 - (3\sqrt{51}-19)t^2 - (3\sqrt{51}+19)t + \sqrt{51}+7}{192\sqrt{3}} \sqrt{T_1} \\ &= \frac{2}{5} \arcsin \frac{(\sqrt{51}-7)t^3 + (3\sqrt{51}-19)t^2 - (3\sqrt{51}+19)t - \sqrt{51}-7}{192\sqrt{3}} \sqrt{T_2}, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{2} [(\sqrt{5}-\sqrt{3})t^2 + 2(2\sqrt{5}+\sqrt{17})t + (\sqrt{5}+\sqrt{3})] \\ &\quad \cdot [(\sqrt{5}-\sqrt{3})t^2 + 2(2\sqrt{5}-\sqrt{17})t + (\sqrt{5}-\sqrt{3})], \\ T_2 &= \frac{1}{2} [(\sqrt{5}-\sqrt{3})t^2 - 2(2\sqrt{5}-\sqrt{17})t + (\sqrt{5}+\sqrt{3})] \\ &\quad \times [(\sqrt{5}-\sqrt{3})t^2 - 2(2\sqrt{5}+\sqrt{17})t + (\sqrt{5}-\sqrt{3})]. \end{aligned}$$

réunissant θ la longitude et t la tangente de la moitié de la distance polaire inférieure.

La même avec la chaînette II, qui dépend d'un paramètre qui est le septième d'une période; et pour les autres figures, lignes géodésiques, courbes de la toupie, chaînettes, etc., dont on trouve les équations écrites au dos des figures.

Ces équations ont été construites avec des intégrales pseudo-elliptiques, inventées par Abel et développées par Moutard, Halphen, Tchebichef, Günther, Goursat, Raffy, Dolbnia et autres.

Mais le degré des résultats donnés par la méthode d'Abel est quatre fois, et même huit fois plus grand qu'il est nécessaire.

C'est ainsi que j'ai trouvé que, pour le vingt-deuxième ordre, l'intégrale pseudo-elliptique peut s'écrire sous la forme

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{x^2 - 1 + R}{\sqrt{(X_1 X_2)}} dx = \frac{1}{11} \arcsin \frac{x^4 + A_1 x^3 + A_2 x^2 + A_3 x + A_4}{C} \sqrt{X_1} \\ = \frac{1}{11} \arcsin \frac{x^4 - A_1 x^3 + A_2 x^2 - A_3 x + A_4}{C} \sqrt{X_2},$$

où

$$X_1 = (-x + 1)(x^2 + Px + Q),$$

$$X_2 = (-x + 1)(x^2 - Px + Q).$$

En posant

$$P = \frac{1}{t}, \quad Q = \frac{1}{4}(P^2 - 1)(1 + n),$$

on trouve que la relation qui subsiste entre t et n est donnée par l'équation (408) dans les *Proceedings London Math. Society*, t. XXVII, p. 464.

C'est l'équation d'une courbe C_8 , dans les coordonnées (t, n) ; mais en posant

$$t = \frac{1}{x+1}, \quad n = \frac{1}{y-1},$$

on obtient une C_7 , avec point triple à l'origine; et encore, en posant

$$y = -\frac{x}{c},$$

$$c^2 x^4 - c(2c^3 - 4c^2 - 3c - 1)x^3 + (c^3 - 9c^2 - 3c^3 - 5c^2 - 4c + 1)x^2 \\ - 2c(2c^3 - 4c^3 - 8c^2 - 4c - 1)x + 4c^4(c - 1) = 0$$

une bicarrée en x .

Cette bicarrée peut se résoudre en

$$\begin{aligned} & [2c^2x^2 - (2c^3 - 4c^2 - 3c - 1)x - 2c(2c^2 + 2c + 1)]^2 \\ & = (4c^3 + 8c^2 + 4c + 1)[(c - 1)x + 2c]^2, \end{aligned}$$

ou, avec $x = P - 1$,

$$\begin{aligned} & [2c^2P^2 - (c + 1)(2c^2 - 2c - 1)P - (c + 1)(2c^2 + 4c + 1)]^2 \\ & = (4c^3 + 8c^2 + 4c + 1)[(c - 1)P + c + 1]^2. \end{aligned}$$

Aussi P et Q peuvent-ils être exprimés en fonction algébrique d'un paramètre c ; et c peut être considéré comme fonction de l'argument elliptique

$$u = \int \frac{dc}{\sqrt{(4c^3 + 8c^2 + 4c + 1)}},$$

l'intégrale dont l'irrationalité icosaédrique de Klein

$$\gamma_1 = 1.$$

Ensuite, on trouve A_1, A_2, A_3, A_4 et R en fonctions algébriques de c

$$A_1 = -\frac{1}{2}(1 + P), \quad A_2 = \dots$$

En désignant par α, β les racines de $X_2 = 0$, on trouve

$$\begin{aligned} k^2 &= \frac{\beta^2(x^2 - 1)}{\alpha^2 - \beta^2}, & k'^2 &= \frac{x^2(1 - \beta^2)}{\alpha^2 - \beta^2}, \\ \operatorname{sn} \frac{K'}{11} &= \frac{1}{\alpha}, & \operatorname{dn} \frac{10K'}{11} &= \beta, & \operatorname{zn} \frac{K'}{11} &= \frac{R}{\sqrt{(x^2 - \beta^2)}}; \end{aligned}$$

et la division des fonctions elliptiques de deuxième étage par 11 est effectuée.

On peut considérer la transformation du onzième ordre comme effectuée en même temps, puisque les coefficients sont des fonctions symétriques des sous-multiples; mais la théorie de la transformation des fonctions elliptiques n'a pas d'utilité dans les applications, excepté peut-être la transformation du deuxième ordre de Landen, comme l'on trouve quand le paramètre elliptique est la moitié d'une période; aussi c'est la théorie de la division des fonctions elliptiques qu'il faut plutôt développer.

Vous avez émis le vœu, Monsieur le Président, que les figures.

dans les Traités de Géométrie dans l'espace, soient construites de manière à montrer l'effet stéréoscopique par les deux projections.

Voici des représentations des solides platoniques qui peuvent servir comme type de ces figures élémentaires.

La diagonale d'une face pentagonale d'un dodécaèdre est le côté d'un cube inscrit dans la même sphère; aussi en supprimant les côtés et en ne traçant que les diagonales des faces d'un dodécaèdre, on obtient cinq cubes, qu'on a distingués par des couleurs différentes; ainsi se trouve réalisée la connexion entre (tétraèdre, cube, octaèdre) et (dodécaèdre, icosaèdre).

Je voudrais poser comme problème, à M. l'abbé Dechevrens, de construire avec l'ingénieux appareil, que nous avons admiré chez le Prince Roland Bonaparte, une série stéréoscopique de figures de ce genre, composées de lignes droites.

Je dois remercier la Maison Armstrong et C^e, de Newcastle, pour ces reproductions des dessins originaux de feu M. Dewar; pour avoir les figures ordinaires, il faut les photographier à une réduction d'un tiers.

Avec un peu d'exercice on peut arriver à se passer d'appareil, dans le cas où l'on emploie les cartes de dimension ordinaire.

Si l'on pouvait faire diverger l'axe des yeux, on obtiendrait le même résultat avec les figures agrandies, mais, dans ce cas, l'on aurait l'impression d'objets placés derrière soi.

Pour obtenir l'effet stéréoscopique dans le cas des grandes figures, sans le secours de cet appareil, il faut croiser l'axe des yeux; de cette manière on aperçoit une figure en relief, amoindrie, renversée à mi-distance.

Les figures stéréoscopiques de petit format, dont il est question dans cette Note, ont été remises à la Société mathématique.

J'ai inscrit, au dos de chacune de ces figures, les équations correspondantes.

SUR LA DYNAMIQUE DES CORPS DÉFORMABLES;

Par M. L. LECORNU.

La théorie générale de la rotation d'un corps de forme variable est exposée dans le Tome II du *Traité de Mécanique céleste* de Tisserand. La présente Note a pour objet de formuler quelques remarques qui se rattachent à cette théorie et qui concernent principalement les propriétés de la force vive.

1. Je suppose que le corps possède un point fixe O, et je prends ce point comme origine des coordonnées. (S'il s'agissait d'un corps entièrement libre, on placerait l'origine au centre de gravité, et il n'y aurait à introduire dans ce qui va suivre que des modifications légères, faciles à apercevoir.) Je prends comme axes mobiles de coordonnées les trois axes d'inertie principaux relatifs au point O. Désignons par A, B, C les moments d'inertie principaux; par p, q, r les composantes de la rotation instantanée éprouvée par le trièdre des trois axes; par f, g, h les sommes des moments des quantités de mouvement relatives aux axes, sommes qu'on peut appeler, avec Tisserand, les *moments de rotation*. Soient enfin L, M, N les sommes des moments des forces appliquées au corps. En écrivant, par application du théorème de Resal, que la vitesse absolue du moment résultant des quantités de mouvement est identique au moment résultant des forces, on obtient immédiatement les trois équations

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} (Ap + f) + (C - B)qr + qh - rg = L, \\ \frac{d}{dt} (Bq + g) + (A - C)rp + rf - ph = M, \\ \frac{d}{dt} (Cr + h) + (B - A)pq + pg - qf = N. \end{cases}$$

2. Si x', y', z' sont les dérivées de x, y, z par rapport au temps, la vitesse d'un point quelconque du corps a pour composantes, suivant trois axes fixes coïncidant, à l'instant t , avec les axes

mobiles,

$$x = qz - r,$$

$$y' = rx - pz,$$

$$z' + py = qx.$$

En tenant compte des relations

$$f = \Sigma m (yz' - y'z), \quad A = \Sigma m (y^2 + z^2),$$

$$g = \Sigma m (zx' - z'x), \quad B = \Sigma m (z^2 + x^2),$$

$$h = \Sigma m (xy' - x'y), \quad C = \Sigma m (x^2 + y^2),$$

on trouve pour expression de la force vive totale

$$2T = \Sigma m (x'^2 + y'^2 + z'^2) + 2(fp + gq + hr) - Ap^2 - Bq^2 - Cr^2.$$

$\Sigma m (x'^2 + y'^2 + z'^2)$ représente la force vive *relative*. Nous l'écrirons, pour abrégér, $\Sigma m x'^2$.

$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2$ est la force vive d'*entraînement*.

Le troisième groupe de termes, $2(fp + gq + hr)$, est ce qu'on peut appeler la *force vive composée*.

3. A un autre point de vue, nous ferons deux parts de la force vive totale, et nous distinguerons :

La force vive *utilisable*, qui subsisterait seule si, par l'introduction de nouvelles liaisons intérieures, on solidifiait subitement le système, de manière à rendre x, y, z indépendants du temps ;

La force vive *inutilisable*, qui disparaîtrait au même instant.

D'après le théorème de Carnot, la force vive inutilisable, ainsi définie, n'est autre chose que la force vive correspondant aux vitesses perdues par l'effet des liaisons. Pour l'évaluer, appelons p_1, q_1, r_1 les variations éprouvées par p, q, r au moment de la solidification. La variation de vitesse du point (x, y, z) a pour composantes

$$(2) \quad \begin{cases} q_1 z - r_1 y - x', \\ r_1 x - p_1 z - y', \\ p_1 y - q_1 x - z'. \end{cases}$$

On en déduit, pour la perte de force vive,

$$\Sigma m x'^2 - 2(fp_1 + gq_1 + hr_1) - Ap_1^2 - Bq_1^2 - Cr_1^2.$$

D'autre part, les équations (1), intégrées pour le temps infini-

ment petit correspondant à l'introduction des liaisons, donnent

$$(3) \quad \begin{cases} Ap_1 - f = 0, \\ Bq_1 - g = 0, \\ Cr_1 - h = 0, \end{cases}$$

d'où

$$Ap_1^2 + Bq_1^2 + Cr_1^2 = fp_1 + gq_1 + hr_1 = \frac{f^2}{A} + \frac{g^2}{B} + \frac{h^2}{C}.$$

La perte de force vive est donc

$$(4) \quad \Sigma m x'^2 = \left(\frac{f^2}{A} + \frac{g^2}{B} + \frac{h^2}{C} \right).$$

Telle est la force vive inutilisable; on voit qu'elle est toujours inférieure à la force vive relative. La force vive utilisable a conséquemment pour valeur

$$(5) \quad Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + 2(fp + gq + hr) = \frac{f^2}{A} + \frac{g^2}{B} + \frac{h^2}{C}$$

ou, plus simplement,

$$(6) \quad A(p + p_1)^2 + B(q + q_1)^2 + C(r + r_1)^2.$$

On arriverait immédiatement au même résultat en remarquant que, les composantes de la rotation devenant $p + p_1$, $q + q_1$, $r + r_1$, l'équation (6) donne la force vive du corps solidifié.

On peut poser

$$\frac{f^2}{A} + \frac{g^2}{B} + \frac{h^2}{C} = \frac{f^2 + g^2 + h^2}{D}$$

en désignant par D une quantité comprise entre le plus grand et le plus petit moment d'inertie. L'expression (5) montre alors que la force vive utilisable est la somme de la force vive d'entraînement, de la force vive composée et d'une partie seulement de la force vive relative, partie égale à $\frac{f^2 + g^2 + h^2}{D}$.

4. Les équations (2) font voir que la vitesse perdue ou gagnée en chaque point est la différence géométrique entre la vitesse relative antérieure à la solidification et la vitesse due à une rotation p_1 , q_1 , r_1 . Celle-ci n'entraînant aucune déformation, on peut dire que toute la force vive de déformation est inutilisable.

Pour que la force vive soit entièrement utilisable, il faut qu'on

ait partout

$$\begin{aligned}x &= q_1 z - r_1 y, \\y &= r_1 x + p_1 z, \\z' &= p_1 y - q_1 x.\end{aligned}$$

Mais on a constamment

$$\Sigma m xy = \Sigma m yz = \Sigma m zx = 0,$$

d'où

$$\Sigma m (x'y' - y'x) = \Sigma m (x^2 - y^2) r_1 = B - A - r_1^2 = 0$$

et de même

$$(C - B)p_1 = 0, \quad A - C)p_1 = 0.$$

Il résulte de là : 1° que le mouvement relatif, s'il existe, doit se réduire à une rotation; 2° que l'axe de rotation doit coïncider avec un axe principal, qui doit être en même temps un axe de révolution de l'ellipsoïde d'inertie. Il y a exception si $A = B = C$. Dans ce cas, la rotation peut s'effectuer autour d'un axe quelconque.

5. Étudions maintenant le travail des forces agissant sur le corps déformable. Si l'on appelle X, Y, Z les composantes de la force extérieure appliquée au point x, y, z , le travail des forces extérieures, pendant le temps dt , est

$$dE = (Lp + Mg + Nr)dt + \Sigma (Xdx + Ydy + Zdz).$$

$\Sigma (Xdx + Ydy + Zdz)$ est le travail des forces extérieures dans le mouvement relatif. Pour abréger, nous l'appellerons *travail relatif* et nous le désignerons par dF .

Soit, d'autre part, dI le travail élémentaire des forces intérieures.

On a

$$dE = dI + dT,$$

d'où

$$\begin{aligned}dI = dT - dE &= d\Sigma \frac{1}{2} m x'^2 - d\{fp + gq + hr\} \\&= \frac{1}{2} d(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) - (Lp + Mg + Nr)dt = dF.\end{aligned}$$

Mais les équations (1) donnent

$$p d(Ap + f) + q d(Bq + g) + r d(Cr + h) = (Lp + Mg + Nr)dt.$$

Par suite

$$(7) \quad \begin{cases} dI + dF = d\Sigma \frac{1}{2} m x'^2 + fdp + g dq + h dr \\ \quad - \frac{1}{2} (p^2 dA + q^2 dB + r^2 dC). \end{cases}$$

On voit qu'une partie seulement du travail intérieur et du travail relatif est employée à faire varier la force vive relative. Le surplus contribue à modifier la rotation d'entraînement et les moments d'inertie.

L'équation (7) peut d'ailleurs être interprétée exclusivement au point de vue du mouvement relatif. Il faut alors tenir compte des forces apparentes, dont le travail se réduit à celui des forces d'inertie d'entraînement. L'ensemble de termes

$$(8) \quad - (f dp + g dq + h dr) + \frac{1}{2} (p^2 dA + q^2 dB + r^2 dC)$$

représente donc nécessairement le travail de ces forces. C'est ce qu'il est aisé de vérifier. En effet, l'accélération d'entraînement a pour composantes

$$\begin{aligned} j'_x &= q'z - r'y - (q^2 + r^2)x + pqy + prz, \\ j'_y &= r'x - p'z - (r^2 + p^2)y + qpx + rqy, \\ j'_z &= p'y - q'x - (p^2 + q^2)z + pqx + rpy. \end{aligned}$$

Le travail des forces d'inertie d'entraînement est

$$= \Sigma m (j_x dx + j_y dy + j_z dz)$$

ou bien

$$\begin{aligned} &= f dp + g dq + h dr + p^2 \Sigma m (y dy + z dz) + \dots \\ &\quad - pq \Sigma m (x dy + y dx) - \dots, \end{aligned}$$

mais

$$\begin{aligned} \Sigma m (y dy + z dz) &= \frac{1}{2} dA, \quad \dots, \quad \dots, \\ \Sigma m (x dy + y dx) &= 0, \quad \dots, \quad \dots \end{aligned}$$

et l'on retrouve ainsi l'expression (8).

6. Concevons qu'à l'intérieur du corps certains points exécutent des mouvements relatifs assignés à l'avance : c'est ce que pourrait faire, par exemple, un être animé entraîné dans le système, et prenant des points d'appui convenables sur des parties rigides. De pareils mouvements ont nécessairement leur répercussion sur le travail total. J'ai déjà étudié une question semblable dans

le cas particulier de l'escarpolette, qui est un système pesant, déformable, possédant un axe fixe (*Bull. de l'A. F. A. S.*, 1894). La formule (7) montre quel est l'effet de ces mouvements dans le cas général d'un système possédant un seul point fixe et soumis à des forces quelconques. Le moteur entraîné dispose arbitrairement des termes $\Sigma m x'^2$, f , g , h , A , B , C . Si l'on connaît en même temps p , q , r , on peut calculer le travail fourni. On voit, par exemple, qu'une valeur donnée de dA a d'autant plus d'influence que son coefficient p^2 est plus grand à l'instant considéré; de même, l'influence de f est mesurée par son coefficient dp , etc. Mais on doit se demander dans quelles limites on est maître de développer par ce procédé de la force vive utilisable; ou, en d'autres termes, quelle quantité de force vive demeure acquise après la cessation des mouvements relatifs qui lui ont donné naissance. Voici, dans cet ordre d'idées, un résultat qui me paraît assez remarquable.

7. Soit un système dont aucune partie ne puisse s'écarter indéfiniment du point fixe et dont la masse ne puisse, à aucun moment, se concentrer tout entière au point fixe. Par suite, les moments d'inertie A , B , C demeurent constamment compris entre deux limites extrêmes, finies et non nulles, que j'appellerai D_1 et D_2 . Supposons, en outre, que les forces extérieures, s'il y en a, dérivent d'un potentiel uniforme : il est clair alors que, au bout d'un temps quelconque, ces forces ne peuvent développer qu'un travail limité. Ceci étant, je dis que :

1° Dans le cas où il n'y a pas de forces extérieures, la force vive utilisable est limitée;

2° Dans le cas où il y a des forces extérieures, si petites qu'on les suppose, la force vive utilisable peut croître au delà de toute limite.

Pour établir la première proposition, ajoutons les équations (1) multipliées au préalable par $Ap + f$, $Bq + g$, $Cr + h$. L'intégration est immédiate et il vient

$$(9) \quad (Ap + f)^2 + (Bq + g)^2 + (Cr + h)^2 = K^2,$$

K^2 désignant une constante. On aurait pu écrire cette équation *a priori*, car elle exprime simplement que le moment résultant

des quantités de mouvement est constant. D'autre part, la force vive utilisable est, d'après ce que l'on a vu,

$$A \left(p + \frac{f}{A} \right)^2 + B \left(q + \frac{g}{B} \right)^2 + C \left(r + \frac{h}{C} \right)^2,$$

ou bien

$$\frac{(Ap + f)^2}{A} + \frac{(Bq + g)^2}{B} + \frac{(Cr + h)^2}{C}.$$

Elle est comprise entre $\frac{K_1^2}{D_1}$ et $\frac{K_2^2}{D_2}$.

Pour établir la seconde proposition, imaginons que le corps soit divisé en deux parties U_1 et U_2 assujetties aux conditions suivantes. La partie U_1 forme une sphère rigide homogène, ou composée de couches homogènes sphériques et concentriques; cette sphère a son centre à l'origine. La partie U_2 est immobile dans l'espace : à cet effet, chacun de ses points est sollicité par une force intérieure F , égale et opposée à la force extérieure. En vertu du principe d'égalité de l'action et de la réaction, la partie U_1 est sollicitée par des forces égales et opposées aux forces F ; sous l'action de ces forces, elle tourne autour de son centre. Ce mouvement n'empêche pas la configuration de l'ensemble U_1, U_2 de demeurer invariable. Les axes d'inertie principaux de cet ensemble sont immobiles; p, q, r sont donc nuls et A, B, C sont constants, ainsi que les moments L, M, N des forces extérieures. Les équations (1) se réduisent à

$$\frac{df}{dt} = L, \quad \frac{dg}{dt} = M, \quad \frac{dh}{dt} = N.$$

D'après cela, f, g, h croissent proportionnellement au temps, et la force vive utilisable, qui est égale ici à

$$\frac{f^2}{A} + \frac{g^2}{B} + \frac{h^2}{C},$$

croît comme le carré du temps. C'est ce que nous voulions faire voir.

Observons, d'ailleurs, que, dans ces conditions particulières, les forces extérieures ne fournissent *aucun travail*. Cela est évident pour la partie U_2 , qui demeure, par hypothèse, immobile, et, quant à la partie U_1 , cela résulte du fait que des forces admettant un potentiel et appliquées à une sphère homogène ou com-

posée de couches homogènes, concentriques, ont une résultante unique appliquée au centre. Malgré cette absence de travail, les forces extérieures sont *indispensables* pour permettre aux forces intérieures de développer le travail équivalent à l'accroissement de la force vive utilisable.

Un exemple bien simple est fourni par l'écureuil qui se meut dans sa cage cylindrique. S'il grimpe aux barreaux de façon à maintenir constamment son centre de gravité dans une position fixe et si l'on néglige les résistances passives, la cage prend un mouvement de rotation uniformément accéléré. A l'instant où l'animal cesse d'agir, l'ensemble conserve une vitesse d'autant plus grande que le travail a duré plus longtemps. Au contraire, si la pesanteur était supprimée, le système, parti du repos, devrait, d'après le théorème des aires, revenir immédiatement au repos dès que l'écureuil se tiendrait immobile. L'escarpolette donne lieu à une application du même genre.

8. On peut, d'une infinité de manières, modifier le corps sans altérer les moments d'inertie principaux A, B, C; c'est ce qui arrive, par exemple, quand une suite continue de points matériels, formant une courbe fermée et homogène, circule le long de cette courbe en respectant sa forme et ses dimensions. Dans ces conditions, il n'y a pas, à vrai dire, de déformation. Mais voici un cas où les choses se passent autrement. Supposons que le système comporte seulement deux points mobiles, de même masse, ayant pour coordonnées respectives x_1, y_1, z_1 et x_2, y_2, z_2 . Si l'on veut que leurs déplacements simultanés soient sans influence sur les moments d'inertie, on doit, en appelant a, b, c, a', b', c' six constantes arbitraires, s'imposer les conditions

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= a^2, & y_1^2 + y_2^2 &= b^2, & z_1^2 + z_2^2 &= c^2, \\ y_1 z_1 + y_2 z_2 &= a, & z_1 x_1 + z_2 x_2 &= b', & x_1 y_1 + x_2 y_2 &= c'. \end{aligned}$$

La solution générale est donnée par les formules

$$\begin{aligned} x_1 &= a \cos(u + \alpha), & x_2 &= a \sin(u + \alpha), \\ y_1 &= b \cos(u + \beta), & y_2 &= b \sin(u + \beta), \\ z_1 &= c \cos(u + \gamma), & z_2 &= c \sin(u + \gamma), \end{aligned}$$

dans lesquelles u est une variable auxiliaire et α, β, γ sont de

nouvelles constantes telles que l'on ait

$$bc \cos(\beta - \gamma) = a', \quad ca \cos(\gamma - \alpha) = b', \quad ab \cos(\alpha - \beta) = c'.$$

Lorsque u varie, les deux points décrivent une même ellipse dont le centre est à l'origine, et ils se trouvent à chaque instant aux extrémités de deux diamètres conjugués. Si l'on pose $\frac{du}{dt} = \omega$, les moments de rotation de ce couple de points sont

$$\omega bc \sin(\beta - \gamma), \quad \omega ca \sin(\gamma - \alpha), \quad \omega ab \sin(\alpha - \beta).$$

Ils sont donc proportionnels à ω , qui est une fonction arbitraire du temps. Il est clair que, avec trois couples semblables, décrivant par exemple trois ellipses situées dans les trois plans de coordonnées, on peut s'arranger pour que les moments de rotation f , g , h soient trois fonctions du temps arbitrairement choisies.

Ceci posé, je dis que, s'il n'y a pas de forces extérieures, on peut trouver un système de mouvements relatifs capables de communiquer aux axes mobiles un mouvement d'entraînement assigné à l'avance. Appelons, en effet, φ , ψ , θ les angles d'Euler. Ce sont ici des fonctions données du temps.

Les formules connues

$$\begin{aligned} p &= \psi' \sin \varphi \sin \theta + \theta' \cos \varphi, \\ q &= \psi' \cos \varphi \sin \theta - \theta' \sin \varphi, \\ r &= \psi' \cos \theta + \varphi' \end{aligned}$$

fournissent immédiatement p , q , r . Si le mouvement relatif se réduit à celui de trois couples de points mobiles dans les conditions qui viennent d'être indiquées, A , B , C sont constants. D'autre part, le moment résultant des quantités de mouvement est un vecteur absolument fixe. Soient C_1 , C_2 , C_3 ses projections sur trois axes fixes quelconques, projections qui sont constantes. Les cosinus directeurs des axes mobiles sont des fonctions connues des angles d'Euler. On peut donc exprimer, en fonction de C_1 , C_2 , C_3 et du temps, les projections du moment résultant sur les axes mobiles. Mais ces projections sont égales à $Ap + f$, $Bq + g$, et $Cr + h$. Comme A , B , C sont constants et comme p , q , r sont connus, on obtient, sans aucune intégration, les moments f , g , h . Enfin, on en déduit, par quadrature, les trois quantités ω qui

règlent les mouvements des trois couples de points sur leurs orbites elliptiques, et le problème se trouve complètement résolu.

9. Inversement, considérons un corps déformable qui n'est soumis qu'à des forces intérieures et, continuant à supposer que A , B , C sont invariables, donnons-nous, en fonction du temps, les trois moments f , g , h . Pour trouver le mouvement, il faut intégrer les équations (1), privées de second membre, en considérant comme inconnues les quantités p , q , r . On peut écrire immédiatement l'intégrale des aires

$$(Ap + f)^2 + (Bq + g)^2 + (Cr + h)^2 = K^2,$$

ou

$$(10) \quad A^2(p + p_1)^2 + B^2(q + q_1)^2 + C^2(r + r_1)^2 = K^2.$$

Si les moments f , g , h sont variables, on n'aperçoit pas d'autre intégrale. Mais, s'ils sont constants, ce qui a lieu quand les quantités ω du n° 8 sont elles-mêmes constantes, on a

$$Ap \frac{dp}{dt} + Bq \frac{dq}{dt} + Cr \frac{dr}{dt} = 0,$$

d'où

$$(11) \quad Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = H^2.$$

Ceci nous montre en passant que :

Si les moments d'inertie sont constants, ainsi que les moments de rotation, et s'il n'y a pas de forces extérieures, la force vive d'entraînement est constante, comme pour un corps solide. En pareil cas, le travail des forces intérieures est entièrement employé à développer la force vive relative et la force vive composée.

Ce résultat concorde avec l'expression trouvée précédemment (7) pour le travail des forces intérieures.

Les deux intégrales précédentes, jointes à la première équation (1), qui devient ici

$$A \frac{dp}{dt} + (C - B)qr - qh - rg = 0,$$

permettent de ramener la recherche de p , q , r à des quadratures. On obtient ensuite les angles d'Euler par le procédé ordinaire, en

Ces formules prouvent que le point P dérive par inversion du point Q , dont les coordonnées sont Ap, Bq, Cr . Le produit $OP \times OQ$ est égal à H . OQ n'est autre chose que le vecteur résultant des moments des quantités de mouvement dues à l'entraînement (p, q, r) . Soit, de même, OQ_1 le vecteur constant résultant des moments de rotation (Ap_1, Bq_1, Cr_1) . Si l'on compose entre eux les deux vecteurs OQ, OQ_1 , on doit obtenir un vecteur OR absolument fixe. Q est donc sur une sphère fixe de centre R , et, par suite, P se trouve sur une autre sphère fixe Σ ayant son centre C sur OR . D'autre part, OQ_1 est lié aux axes mobiles.

Si l'on mène la droite QR_1 parallèle à OR , elle rencontre la droite OQ_1 en un point R_1 tel que $OR_1 = RQ$, et l'on voit que Q se trouve sur une sphère de centre R_1 , liée aux axes mobiles. Le point P se trouve donc, par rapport à ces axes, sur une sphère Σ_1 ayant son centre C_1 sur OQ_1 . D'après les propriétés connues de l'inversion, les angles CPQ, RQP sont égaux et il en est de même des angles C_1PO, R_1QO . Dès lors, on reconnaît sans peine que les triangles PCO, PC_1O sont égaux et que la figure CPC_1O est un contreparallélogramme.

Ceci posé, le mouvement a lieu dans les conditions suivantes. Soit un contreparallélogramme CPC_1O dont les sommets C et O sont fixes et dont les côtés OC_1, C_1P, CP sont trois barres de longueur invariable. La barre C_1P est guidée de manière à rester toujours en contact avec la tige fixe OC . Un plan Π , attaché au sommet P , porte une tige perpendiculaire qui part de P et glisse dans un collier placé en O . L'ellipsoïde d'inertie, qui est fixé à la barre OC_1 , reste constamment tangent au plan Π et tourne à chaque instant autour du diamètre aboutissant au point de contact. La rotation élémentaire déplace la tige OC_1 , ce qui entraîne un mouvement correspondant du plan Π , et l'axe instantané se déplace progressivement, de manière à aboutir toujours au point de contact de l'ellipsoïde et du plan.

Le lieu du point P dans l'espace est une courbe sphérique transcendante. Par rapport aux axes mobiles, le lieu du même point s'obtient en éliminant p, q, r entre les équations (10), (11) et (12), ce qui, en remplaçant Ap_1, Bq_1, Cr_1 par f, g, h , donne

les deux équations

$$H^2 + 2H(fX + gY + hZ) + (f^2 + g^2 + h^2 - K^2)(X^2 + Y^2 + Z^2) = 0,$$

$$\frac{X^2}{A} + \frac{Y^2}{B} + \frac{Z^2}{C} = (X^2 + Y^2 + Z^2)^2.$$

Ces équations représentent évidemment la transformée par inversion d'une section sphérique d'un ellipsoïde.

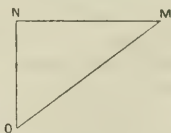
La polhodie (lieu du point M où l'axe instantané perce la surface de l'ellipsoïde d'inertie) est l'intersection des deux ellipsoïdes

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1,$$

$$A^2(Hx + p_1)^2 + B^2(Hy + q_1)^2 + C^2(Hz + r_1)^2 = K^2.$$

Remarquons encore que, si l'on mène par le point de rencontre S des droites OC et PC₁ un plan II' parallèle à II, ce plan, perpendiculaire à OP, est tangent à l'ellipsoïde de révolution qui a pour foyers C₁ et O. Par suite, le plan II est tangent à un ellipsoïde homothétique, de diamètre double, lié aux axes mobiles. La polhodie peut donc être regardée comme étant la courbe de contact de l'ellipsoïde d'inertie avec la développable circonscrite à cet ellipsoïde et à un ellipsoïde de révolution ayant son centre en C₁ et un foyer en O. De là une nouvelle manière de se figurer le mouvement. A un instant quelconque, l'axe instantané de rotation est une droite OM aboutissant à un point M de la polhodie,

Fig. 2.



et la vitesse de rotation est proportionnelle à OM. La génératrice MN de la développable touche l'ellipsoïde de révolution en un point N qui se trouve sur l'axe fixe des moments, et la droite ON coïncide avec cet axe. Le mouvement s'effectue donc de telle manière que chaque droite OM devienne, à tour de rôle, axe de rotation, et que la droite correspondante ON vienne en même temps coïncider avec l'axe des moments. (fig. 2).

On s'assure sans peine que, par rapport aux axes mobiles, la droite ON, de même que la droite OM, décrit un cône du quatrième degré. Au bout d'un temps fini, la droite ON qui, primitivement, se trouvait appliquée sur l'axe fixe, revient en coïncidence avec lui. A partir de cet instant, il est clair que toutes les circonstances du mouvement doivent se reproduire dans le même ordre : le plan MON a seulement tourné d'un certain angle autour de l'axe fixe. Le mouvement qui nous occupe présente donc une périodicité analogue à celle du mouvement de Poinsot.

11. Quand l'ellipsoïde d'inertie est de révolution, les calculs se simplifient. Si l'on a, par exemple, $B = C$, on peut orienter les axes Oy , Oz de façon à avoir, en outre, $q_1 = r_1$. Les équations (10) et (11) fournissent alors pour $q^2 + r^2$ et $q + r$ des polynômes du second degré en p . On en déduit que $q - r$ est la racine carrée d'un polynôme du quatrième degré, et la première équation (1), qui se réduit à

$$A \frac{dp}{dt} + B q_1 (q - r) = 0,$$

montre que l'on n'a plus à envisager qu'une intégrale elliptique.

Si, de plus, l'axe des moments de rotation a même direction que l'axe de révolution de l'ellipsoïde, on a $q_1 = r_1 = 0$. Il vient, par suite,

$$\frac{dp}{dt} = 0, \quad B \frac{dq}{dt} - A p_1 r = 0, \quad B \frac{dr}{dt} - A p_1 q = 0,$$

d'où, en appelant C , C' , C'' trois constantes arbitraires :

$$\begin{aligned} p &= C, \\ q &= C' \cos \left(\frac{A}{B} p_1 t + C'' \right), \\ r &= C' \sin \left(\frac{A}{B} p_1 t + C'' \right). \end{aligned}$$

Comme la direction : $A(p + p_1)$, Bq , Br est fixe dans l'espace, le mouvement se réduit manifestement au roulement uniforme d'un cône droit sur un cône droit de même sommet. On arriverait à la même conséquence en remarquant que, d'après l'hypothèse faite actuellement, l'ellipsoïde d'inertie et l'ellipsoïde auxi-

liaire employé dans l'article précédent sont deux surfaces de révolution ayant même axe, et, par suite, le triangle OMN est de grandeur invariable.

Ce cas se réalise, en particulier, quelle que soit la direction de l'axe des moments de rotation, quand les trois moments d'inertie sont égaux entre eux.

SUR UNE INTÉGRATION PAR APPROXIMATIONS SUCCESSIVES;

Par M. Robert D'ADHÉMAR.

Je me propose de trouver l'intégrale de l'équation

$$(1) \quad \Delta(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = h(x, y, z)u + f(x, y, z),$$

intégrale prenant, ainsi que l'une de ses dérivées, des valeurs données sur une surface donnée.

La méthode suivie permettra d'ailleurs d'intégrer des équations analogues, un peu plus difficiles à étudier.

1. Je dois, tout d'abord, rappeler brièvement ce que j'ai dit dans une Note des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* ⁽¹⁾ sur l'équation

$$(2) \quad \Delta(u) = F(x, y, z).$$

Soit S une surface à un seul bord. J'appelle *conormale* en un point la droite symétrique de la normale par rapport au plan horizontal passant par ce point. Une dérivée prise suivant cette direction sera dite *dérivée conormale*, et représentée par le symbole $\frac{d}{dN}$.

Cela étant, l'on donne sur S les valeurs de u et $\frac{du}{dN}$. L'on obtient alors la valeur de l'intégrale en un point (x_0, y_0, z_0) , si par ce point l'on peut mener un cône à axe vertical et dont les génératrices soient inclinées à 45° sur le plan horizontal, cône qui découpe dans S une aire à un seul bord et cela sans ambiguïté ⁽²⁾.

⁽¹⁾ Le 11 février 1901.

⁽²⁾ Sur les *données* et la surface qui les porte, voir la fin de cette Note.

L'expression de $u(x_0, y_0, z_0)$ est la suivante :

$$(3) \quad u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z_0} \left[\int_S \int_S \int_W FV \, d\tau - \int_S \int_S \left(u \frac{dV}{dN} - V \frac{du}{dN} \right) d\omega \right],$$

(S) étant l'aire découpée dans S par le cône Λ^0 de sommet (x_0, y_0, z_0) ; (W) étant le volume intérieur à ce cône et limité par (S); enfin V étant la fonction auxiliaire suivante :

$$V = \log \left(\frac{z'}{r} + \sqrt{\frac{z'^2}{r^2} - 1} \right)$$

[l'on a posé $z' = z - z_0$, $r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$].

Mais, sous cette forme (3), l'on ne peut *vérifier* que l'intégrale et sa dérivée conormale prennent bien les valeurs données lorsque le point (x_0, y_0, z_0) vient sur S. Or ceci est extrêmement important et j'aurai à y revenir.

De même, avec la forme (3) on ne peut songer à des *approximations successives*.

Pour cette double raison, je vais rechercher une forme explicite pour l'intégrale (3) de l'équation (2).

2. Prenons donc l'équation (2) avec la condition que, sur S, u et $\frac{du}{dN}$ sont *nuls*. (Nous verrons pourquoi l'on peut faire cette hypothèse.) Il vient alors

$$(4) \quad 2\pi u(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial J_A}{\partial z_0},$$

si l'on convient d'écrire

$$J_A = \int_S \int_S \int_{\Lambda^0} F(x, y, z) V_A \, d\tau.$$

J'affecte la lettre V de l'indice A pour bien montrer que la fonction auxiliaire V varie avec le point A, (x_0, y_0, z_0) ($dz_0^2 > 0$).

Nous devons évaluer la dérivée $\frac{\partial J_A}{\partial z_0}$.

Donnons pour cela à z_0 un accroissement infiniment petit dz_0 . A vient en A' et l'on a

$$J_A = \int_S \int_S \int_{\Lambda^0} F(x, y, z) V_A \, d\tau.$$

Le volume se décompose naturellement en deux parties : APQ et BB'PA'QCC', mais la fonction V_A jouit d'une propriété remarquable. Pour tout *volume conique régulier* l'on a

$$\int \int \int V_A dz = \int \int \int dz.$$

Donc notre intégrale relative au volume APQ est égale à $\frac{\pi}{3} \overline{AA'}^3$ et, comme $\overline{AA'} = dz_0$, elle est du *troisième ordre*.

Évaluons l'intégrale relative à BB'PA'QCC'. Soit

$$\int_{z_0-dz_0}^Z dz \int_0^{2\pi} d\alpha \int_{z-z_0-dz_0}^{z-z_0} \log \left[\frac{z-z_0}{r} + \sqrt{\left(\frac{z-z_0}{r} \right)^2 - 1} \right] r dr$$

(Z est la cote du plan majorant).

Or

$$\int \log \left[\frac{z-z_0}{r} + \sqrt{\left(\frac{z-z_0}{r} \right)^2 - 1} \right] r dr = \frac{r^2}{2} \log \left[\frac{z-z_0}{r} + \sqrt{\left(\frac{z-z_0}{r} \right)^2 - 1} \right] - \frac{z-z_0}{2} \sqrt{(z-z_0)^2 - r^2}.$$

Ici, en prenant pour r les limites voulues : $z-z_0$ et $z-z_0-dz_0$, l'on a

$$\left\{ -\frac{(z-z_0-dz_0)^2}{2} \log \left[\frac{z-z_0}{z-z_0-dz_0} + \sqrt{\left(\frac{z-z_0}{z-z_0-dz_0} \right)^2 - 1} \right] + \frac{z-z_0}{2} \sqrt{(z-z_0-dz_0)^2 - 1} \right\}.$$

L'intégrale relative à l'angle polaire α donne 2π (constante sans importance). Il reste à intégrer cette dernière expression par rapport à z .

Intégrons, par parties, le premier terme. L'on obtient

$$\left\{ -\frac{1}{6} (z-z_0-dz_0)^3 \log \left[\frac{z-z_0}{z-z_0-dz_0} + \sqrt{\left(\frac{z-z_0}{z-z_0-dz_0} \right)^2 - 1} \right] + \frac{(z-z_0-dz_0)^3}{6} \sqrt{\left(\frac{z-z_0}{z-z_0-dz_0} \right)^2 - 1} \right\} dz,$$

il faut ajouter l'intégrale du deuxième terme

$$- \int_{z_0 + dz_0}^Z \frac{z - z_0}{\sqrt{2(z - z_0)(dz_0 - dz_0^2)}} dz.$$

Laissons le terme tout intégré et réunissons les deux intégrales précédentes; cela donne, pour élément différentiel,

$$\frac{1}{6\sqrt{2(z - z_0)(dz_0 - dz_0^2)}} \{ 3(z - z_0)[2(z - z_0)dz_0 - dz_0^2] - (z - z_0 - dz_0)^2 dz_0 \}.$$

Les termes en dz_0^2 et dz_0^3 dans le crochet donnent naissance à des termes en dz_0^3 et dz_0^5 qui ne jouent aucun rôle, et il reste à considérer

$$\int_{z_0 + dz_0}^Z \frac{5}{6\sqrt{2(z - z_0)(dz_0 - dz_0^2)}} dz - \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{dz_0} \int_{z_0 + dz_0}^Z \frac{(z - z_0)^2 dz}{(z - z_0 - dz_0)^2}.$$

Ici encore nous n'avons à conserver que

$$\frac{1}{6\sqrt{2}} \sqrt{dz_0} \frac{1}{5} (Z - z_0)^2,$$

le reste étant d'ordre $\frac{3}{2}$ au moins en dz_0 .

Nous obtenons en somme

$$\left\{ \begin{aligned} & - \frac{1}{6} (Z - z_0 - dz_0)^3 \log \left[\frac{Z - z_0}{Z - z_0 - dz_0} + \sqrt{\left(\frac{Z - z_0}{Z - z_0 - dz_0} \right)^2 - 1} \right], \\ & + \frac{\sqrt{2}}{6} (Z - z_0)^2 \sqrt{dz_0} - \lambda dz_0^3 + \dots \end{aligned} \right.$$

Les deux premiers termes tendent vers *zéro* lorsque dz_0 tend vers *zéro*. Écrivons-les

$$M \sqrt{dz_0} - N.$$

La règle de l'Hospital montre que

$$\lim_{dz_0 \rightarrow 0} \left(\frac{M \sqrt{dz_0}}{N} \right) = \sqrt{1 - \frac{dz_0}{2}} = 1 - \frac{1}{2} \frac{dz_0}{2} + \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right)}{12} \frac{dz_0^2}{4} - \dots$$

d'où

$$\lim (M \sqrt{dz_0} - N) = \lim N \left(- \frac{dz_0}{4} + \frac{dz_0^2}{32} \dots \right),$$

et comme

$$\lim_{dz_0 \rightarrow 0} (N) = -\frac{1}{6} (Z - z_0)^3 \log t = 0,$$

nous voyons que $M_A \sqrt{dz_0} - N$ est, en dz_0 , d'ordre supérieur à un.

Donc

$$J_A = \int \int \int_{A'BC'} F V_A dz + 2 dz_0^{1/2} \dots$$

Le premier terme est seul à conserver et l'on a

$$(5) \quad H = \int \int \int_{A'BC'} F(x, y, z) [V_A(x, y, z) - V_A(x, y, z_0)] dz.$$

Remarquons maintenant que l'on a

$$V_A(x, y, z) = V_A(x, y, z_0 + dz_0),$$

d'où

$$\begin{aligned} V_A(x, y, z) - V_A(x, y, z_0) &= V_A(x, y, z_0 + dz_0) - V_A(x, y, z_0) \\ &= dz_0 \frac{\partial V_A(x, y, z)}{\partial z} \quad (1). \end{aligned}$$

Lorsque dz_0 s'approche de zéro, V' vient en V , V_A devient V et l'on a

$$(6) \quad 2\pi u(x_0, y_0, z_0) = \int \int \int_{A'BC'} F \frac{\partial V}{\partial z} dz.$$

résultat assez surprenant par sa simplicité.

(1) Pour être rigoureux on ne peut appliquer cette formule que dans une région où V_A et $\frac{\partial V_A}{\partial z}$ soient finis.

Or la première fonction est *infinie* sur la verticale passant par A' et la deuxième est *infinie* sur le cône $A'B'C'$. On isolera donc la verticale par un petit *cylindre vertical* et le cône $A'B'C'$ par un *cône* ou un *hyperboloïde* intérieur à ce cône. Dans les petits volumes ainsi isolés on remplacera $(V_A - V_A')$ par $2V_A'$ et l'on verra que l'*influence* de ces volumes infiniment petits est *nulle*.

D'ailleurs $\frac{\partial V_\Lambda}{\partial z}$ ayant un signe constant, on peut écrire

$$\begin{aligned} 2\pi u(x_0, y_0, z_0) &= F(\xi, \eta, \zeta) \int_{\Sigma} \int_{\Sigma} \int_{\Sigma} \frac{\partial V_\Lambda}{\partial z} d\tau \\ &= F(\xi, \eta, \zeta) \theta(\Lambda) \int_{\Sigma} \int_{\Sigma} \int_{\Sigma} \frac{\partial V_\Lambda}{\partial z} d\tau, \end{aligned}$$

ou enfin

$$(7) \quad u(x_0, y_0, z_0) = F(\xi, \eta, \zeta) \theta(\Lambda) \frac{1}{2} (Z - z_0)^2.$$

θ dépend de la position de Λ , de la forme de Σ , mais on sait que l'on a

$$0 < \theta < 1.$$

Avec cette expression (7), prise au lieu de l'expression (4), on peut intégrer l'équation (1) et voici comment :

3. Soit d'abord une intégrale u_0 de l'équation

$$\Delta(u_0) = f(x, y, z),$$

satisfaisant aux conditions aux limites, calculée par (3). u_0 est connu, soit M_0 une limite supérieure de son module dans le champ d'intégration.

Intégrons alors

$$\Delta(u_1) = h u_0$$

(avec zéro pour conditions aux limites).

D'après (7) on a

$$u_1(x, y, z) = M_0 \frac{(Z - z)^2}{2} K$$

(K étant une limite supérieure du module de $h(x, y, z)$ dans le domaine considéré).

Intégrons maintenant

$$\Delta(u_2) = h u_1$$

(toujours avec zéro aux limites).

Nous aurons

$$\begin{aligned} |2\pi u_2(x_0, y_0, z_0)| &= M_0 K \int_0^1 \int_0^1 \int_{ABC} \frac{(Z - z)^2}{\lambda^2} \frac{1}{\sqrt{z^2 - r^2}} d\tau \\ &= M_0 K \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{(Z - z)^2}{\lambda^2} d\lambda \end{aligned}$$

et, pour un point (x, y, z) quelconque,

$$|u_2(x, y, z)| = M_0 K \frac{(Z - z)^2}{2\pi \lambda^2}.$$

L'intégrale cherchée est

$$(8) \quad u = u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} u_n,$$

convergente, car on a

$$|u_n(x_0, y_0, z_0)| = M_0 K \frac{(Z - z_0)^{2n}}{2\pi \cdot 1 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)}.$$

4. On voit, par la formule (7), que l'intégrale u de l'équation $A(u) = F$ (prise avec zéro pour conditions aux limites) tend bien vers *zéro* lorsque (x_0, y_0, z_0) vient sur S .

Par des considérations analogues, j'ai obtenu des expressions explicites de

$$\frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y},$$

qui donnent l'intégrale de

$$A(u) = a(x, y, z) \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + c \frac{\partial u}{\partial z} + hu = f(x, y, z),$$

et qui permettent de vérifier que la dérivée conormale tend bien vers la valeur donnée lorsque le point (x_0, y_0, z_0) vient sur S .

Je réserve cette exposition, assez compliquée, pour une époque ultérieure.

5. Quelques remarques essentielles sont à faire sur les données et sur la surface S qui les porte.

Pour que le cône Λ^0 coupe S d'une manière bien définie, unique, il faut que les plans tangents à S fassent avec le plan horizontal un angle $< 45^\circ$.

Si la convexité de S n'est pas constamment dirigée dans le sens de $\overline{Oz}$ ou de $\overline{Oz'}$, il y aura une ligne de points d'inflexion.

Cela est acceptable, toujours à la condition que le plan tangent soit incliné à 45° au plus.

Enfin soit un plan Π incliné à 45° sur le plan horizontal, la *co-normale* au plan vient sur le plan. Donc toute surface enveloppe de plans Π est une surface privilégiée, pour laquelle le fait de donner u est seul nécessaire et suffisant pour déterminer l'intégrale. Tout polyèdre formé de plans Π est dans les mêmes conditions. Si les plans Π passent par un point fixe, leur enveloppe est un cône Λ , parallèle à

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0.$$

6. On voit le rôle considérable que jouent les cônes Λ dans l'intégration des équations $\Lambda(u) = F$, avec des données qui ne sont aucunement supposées analytiques. Ces cônes font partie des *caractéristiques* définies par M. Beudon ⁽¹⁾ au point de vue de Cauchy, c'est-à-dire au point de vue des fonctions analytiques.

Ce rapprochement nous paraît intéressant.

Si nous voulons maintenant comparer les équations

$$\Lambda(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = F$$

et

$$\Delta(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = F,$$

nous voyons la raison de la grande distance qui les sépare dans ce fait :

L'analogue du cône Λ relatif à $\Lambda(u)$ c'est la sphère réduite à un point $x^2 + y^2 + z^2 = 0$, pour $\Delta(u)$.

L'analogue de l'intégrale $\frac{1}{\sqrt{x^2 - y^2 - z^2}}$ de $\Delta u = 0$, c'est, pour $\Lambda(u) = 0$, l'intégrale $\frac{1}{\sqrt{\epsilon(x^2 + y^2 - z^2)}}$ (ϵ étant ± 1 de manière que l'intégrale soit réelle).

(1) Voir dans ce Bulletin, t. XXV: 1897.

La première intégrale est *isotrope* et n'a qu'un point singulier. Pour la deuxième, les axes de coordonnées doivent conserver toujours la même direction, et il y a une surface indéfinie de singularités, le cône A

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0.$$

En plus, cette deuxième intégrale se compose en réalité de deux intégrales distinctes, suivant que l'on est à l'intérieur ou à l'extérieur du cône A.

Cette remarque toute simple m'avait fait pressentir le rôle important des cônes A avant que je connusse un Mémoire fondamental de M. Volterra (¹).

J'aurai à revenir sur cette séparation de l'espace en deux régions et sur la forme de S au point de vue de l'*Analysis situs*.

Je ne saurais oublier de dire, en terminant, que la lecture, malheureusement un peu difficile, des premières pages du Mémoire de M. Volterra, et l'étude des beaux travaux de M. Picard sur les approximations successives (²), ont été pour moi le premier fondement solide de ces recherches.

SUR UNE CLASSE DE POLYGONES DE PONCELET;

Par M. MATHIEU WEILL.

Considérons deux cercles, O, O', se coupant aux points cycliques I, J, et en deux autres points A, B.

S'il existe des polygones de $2m$ côtés inscrits au cercle O et circonscrits au cercle O', il existe une ligne polygonale formée de m tangentes au cercle O', A étant le point de contact de la première tangente, B, I ou J étant le point de contact de la dernière, et dont les $(m + 1)$ sommets sont sur le cercle O; réciproquement, s'il existe une pareille ligne, on peut inscrire au cercle O un polygone de $2m$ côtés qui soit circonscrit au cercle O'.

Deux cas peuvent se présenter : ou bien la ligne commençant en A se termine en B, et dans ce cas il y a aussi une ligne com-

(¹) *Acta mathematica*, t. XVIII: (1894).

(²) *Journal de Mathématiques*, 1894. Voir aussi Le Vide inscrite dans le t. IV des *Leçons sur les surfaces* de M. Darboux.

mençant en I et se terminant en J; ou bien la ligne commençant en A se termine en I ou J; ces deux cas correspondent à deux classes *absolument distinctes* de polygones.

PREMIÈRE PARTIE.

Nous nous occuperons d'abord des polygones de la première classe, et nous choisirons la ligne polygonale commençant en I et se terminant en J.

Les deux cercles auront pour équations

$$(1) \quad (x - \hat{\sigma})^2 + y^2 = \hat{\sigma}^2 = a,$$

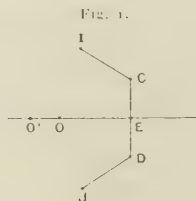
$$(2) \quad x^2 + y^2 - R^2 = 0,$$

1° *Quadrilatère*. — La ligne est ici IMJ, M étant sur la ligne des centres, donc

$$\hat{\sigma} = R;$$

résultat bien connu, la seconde circonférence passe par le centre de la première.

2° *Hexagone*. — La ligne polygonale est ici ICDJ (*fig. 1*), CD étant perpendiculaire à la ligne des centres et coupée par



cette ligne en deux parties égales.

L'équation de IC est

$$y = i(x - \hat{\sigma});$$

celle de CD est

$$x - \hat{\sigma} = \dots \hat{\sigma};$$

prenons la première solution $x = \hat{\sigma} + \hat{\sigma}$; les coordonnées de C

sont

$$\begin{aligned} \sqrt{x - \delta} &= \rho, \\ y &= i\rho. \end{aligned}$$

Exprimons que ce point est sur la seconde circonférence; nous aurons la condition

$$\delta^2 + 2\delta\rho = R^2.$$

Avec la seconde solution, on trouve

$$\delta^2 - 2\delta\rho = R^2.$$

Une discussion facile montre que la première solution ne correspond à des polygones réels que si l'on a $\delta > \frac{R^2}{4}$, et alors les cercles sont sécants.

La seconde solution exige $\delta > 2\rho$, et les cercles sont alors extérieurs.

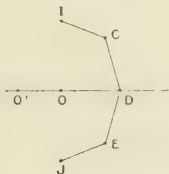
En particulier, les cercles sont égaux pour $\delta = R(\sqrt{2} + 1)$.

Pour $\delta = \frac{R^2}{2}$, on a $R = \rho \frac{\sqrt{2}}{2}$, la corde commune aux deux cercles est un diamètre du cercle de rayon ρ .

Pour $\delta = \frac{2R^2}{3}$, $R = \frac{4\rho}{3}$.

3^e *Octogone*. — La ligne polygonale est ICDEJ (fig. 2), symé-

Fig. 2.



trique par rapport à la ligne des centres. Les équations de IC et CD sont

$$y = i(x - \delta), \quad (x - \delta)\cos\varphi + y\sin\varphi = \rho = 0.$$

Les coordonnées du point C sont donc

$$x_1 = \delta + \rho\cos\varphi = i\sin\varphi, \quad y_1 = i\delta\cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Exprimons que ce point est sur le cercle de rayon R ; nous aurons

$$\delta^2 - R^2 + 2\delta\rho(\cos\varphi - i\sin\varphi) = 0.$$

Le point B a pour coordonnées

$$y = 0, \quad x = \delta + \frac{\rho}{\cos\varphi}.$$

Exprimons qu'il est sur le cercle de rayon R ; nous aurons

$$\delta + \frac{\rho}{\cos\varphi} = \pm R.$$

Posant

$$\cos\varphi - i\sin\varphi = \alpha,$$

il vient

$$\cos\varphi + i\sin\varphi = \frac{1}{\alpha},$$

et

$$\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{\alpha^2 + 1}{2\alpha}, & \alpha &= \frac{R^2 - \delta^2}{2\delta\rho}, & \delta \pm R + \frac{2\alpha\rho}{\alpha^2 + 1} &= 0, \\ (\delta \pm R) [(R^2 - \delta^2)^2 + 4\delta^2\rho^2] + 4\delta\rho^2(R^2 - \delta^2) &= 0. \end{aligned}$$

On voit facilement qu'il faut prendre $(\delta - R)$ comme premier facteur, et l'on a la condition cherchée

$$\rho^2 = \frac{(R^2 - \delta^2)^2}{4\delta R}.$$

On trouve, après discussion, qu'il faut prendre

$$3 - 2\sqrt{2} < \frac{\delta}{R} < 3 + 2\sqrt{2},$$

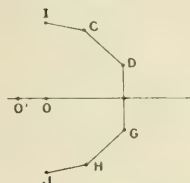
et les cercles sont alors sécants. Il n'y a pas d'autres cas de possibilité.

Exemples :

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{R}{4}, & \rho &= \frac{15R}{16}, \\ \delta &= 4R, & \rho &= \frac{15R}{4}. \end{aligned}$$

4° *Décagone*. — La ligne polygonale est ici ICDGHJ (*fig. 3*), symétrique par rapport à la ligne des centres.

Fig. 3.



Les équations des droites IC, CD, DG sont respectivement

$$\begin{aligned} y &= i(x - \delta), \\ (x - \delta) \cos \varphi + y \sin \varphi - \rho &= 0, \\ x - \delta &= \pm \rho. \end{aligned}$$

Prenons la solution

$$x - \delta = \rho.$$

Exprimons que le point C est sur le cercle de rayon R; nous aurons

$$\frac{R^2 - \delta^2}{2\delta\rho} = \cos \varphi - i \sin \varphi = \alpha, \quad \cos \varphi = \frac{\alpha^2 + 1}{2\alpha}.$$

Opérant de même pour D, nous aurons

$$(\delta - \rho)^2 - R^2 + \rho^2 \frac{1 - \cos \varphi}{1 + \cos \varphi} = 0,$$

ou

$$(\delta + \rho)^2 - R^2 - \rho^2 \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \right)^2 = 0.$$

Remplaçons α par sa valeur; nous aurons la condition cherchée

$$(R^2 - \delta^2 - 2\delta\rho)(R^2 - \delta^2 - 2\delta\rho)^2 - 8\delta\rho^3(R^2 - \delta^2) = 0.$$

Prenons ensuite la solution $x - \delta = -\rho$; nous trouvons la condition

$$(R^2 - \delta^2 + 2\delta\rho)(R^2 - \delta^2 + 2\delta\rho)^2 - 8\delta\rho^3(R^2 - \delta^2) = 0.$$

Reprenons la première solution

$$R^2 - \delta^2 = 2a\delta\rho,$$

$$R^2 = \delta^2 + \rho^2 - 2\delta\rho = \rho^2 \left(\frac{a-1}{a+1} \right)^2,$$

d'où

$$\begin{cases} \frac{\rho}{\delta} = \frac{(a-1)(a+1)^2}{2a}, \\ \frac{R^2}{\delta^2} = a(a^2 + a - 1). \end{cases}$$

Exemples :

$$a = \frac{-3}{2}, \quad \rho = \frac{5\delta}{4}, \quad R = \delta\sqrt{\frac{3}{8}},$$

les cercles sont extérieurs.

$$a = 2, \quad \rho = \frac{9\delta}{4}, \quad R = \delta\sqrt{10},$$

les cercles sont sécants.

Il faut d'abord, pour la réalité de la solution, que a soit compris entre $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et zéro, ou bien supérieur à 1. En exprimant que R est plus grand que ρ , on est amené à l'inégalité

$$a^6 - 2a^5 - 5a^4 - a^2 + 2a - 1 < 0.$$

Le polynôme a deux racines négatives α et β , et deux racines positives γ et δ .

Une discussion détaillée conduit aux conclusions suivantes : il faut et il suffit, pour que la solution soit réelle, que a soit compris entre α et β , ou bien entre 1 et $(2 - \sqrt{5})$. (La racine α est comprise entre $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et -1 , et la racine β entre $2 - \sqrt{5}$ et 0.)

Théorie générale. — Considérons toujours la ligne polygonale en I (fig. 4) et formée par des tangentes du cercle O' .

Le premier côté a pour équation

$$y = i(x - \delta).$$

Le second, CD, a pour équation

$$(1) \quad (x - \delta)(1 - t^2) + 2ty - \rho(1 - t^2) = 0.$$

Le point C a pour coordonnées

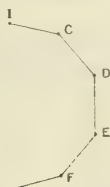
$$x_1 = \frac{R^2 - \delta^2}{\rho\delta}, \quad y_1 = i \frac{R^2 - \delta^2}{\rho\delta}.$$

On a donc, en formant le produit des racines de (1),

$$t_1 i = \frac{x_1 - \delta - \varphi}{\delta - x_1 - \varphi} = \frac{R^2 - \delta^2 - \varphi^2}{\delta^2 - R^2 - \varphi^2}.$$

Nous avons ainsi les premiers éléments de la ligne polygonale;

Fig. 4.



cherchons une loi de récurrence qui lie les valeurs de t correspondant aux divers côtés de la ligne polygonale; l'équation (1) nous donne

$$t' = \frac{x - \delta - \varphi}{\delta - x - \varphi}, \quad t + t' = \frac{-2x}{\delta^2 - R^2 - \varphi^2};$$

exprimons que le point (x, y) est sur le cercle O, il vient

$$(t^2 + t'^2) \varphi^2 - 2 t t' (\delta^2 - R^2) + t^2 t'^2 [(\delta - \varphi)^2 - R^2] + (\delta + \varphi)^2 - R^2 = 0,$$

d'où résulte la loi de récurrence cherchée

$$t_{n-1} t_{n+1} = \frac{t_n^2 - \alpha}{\beta t_n^2 - 1},$$

en posant

$$\frac{(\delta - \varphi)^2 - R^2}{\varphi^2} = \alpha, \quad \frac{(\delta + \varphi)^2 - R^2}{\varphi^2} = \beta.$$

On a ainsi la suite des formules

$$t_0 = i,$$

$$t_1 i = - \frac{\alpha - 1}{\beta - 1},$$

$$t_2 i = \frac{t_1^2 - \alpha}{\beta t_1^2 - 1},$$

$$t_3 = t_1 = \frac{t_2^2 - \alpha}{\beta t_2^2 - 1},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$t_{n-1} t_{n+1} = \frac{t_n^2 - \alpha}{\beta t_n^2 - 1}.$$

Ceci posé, cherchons la condition relative à un polygone de $4p$ côtés; il suffit d'exprimer que l'extrémité du côté correspondant à t_{p-1} est sur la ligne des centres des deux cercles, d'où

$$p \frac{t_{p-1}^2 + 1}{t_{p-1}^2 - 1} = \mp \delta \pm R.$$

Pour avoir la condition relative à un polygone de $(4p+2)$ côtés, il suffit d'écrire que le côté correspondant à t_p est perpendiculaire à la ligne des centres, c'est-à-dire que l'on a

$$t_{p-1}^2 + 2 = 0,$$

ou bien

$$\beta t_{p-1}^2 + 1 = 0.$$

Ces résultats sont d'une simplicité remarquable.

Comme application, proposons-nous de trouver la condition relative à un polygone de *quatorze côtés*; nous aurons une première solution en écrivant

$$t_2^2 = -\alpha,$$

d'où

$$\alpha = \frac{\left[\alpha - \left(\frac{\alpha-1}{\beta-1} \right)^2 \right]^2}{\left[1 - \beta \left(\frac{\alpha-1}{\beta-1} \right)^2 \right]^2}.$$

Comme seconde solution, nous écrivons

$$t_2^2 = \frac{-1}{\beta},$$

c'est-à-dire

$$-\frac{1}{\beta} = \frac{\left[\alpha - \left(\frac{\alpha-1}{\beta-1} \right)^2 \right]^2}{\left[1 - \beta \left(\frac{\alpha-1}{\beta-1} \right)^2 \right]^2}.$$

SECONDE PARTIE.

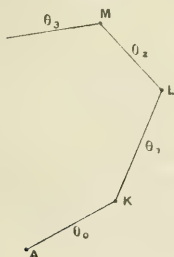
Considérons (*fig. 5*) une ligne polygonale commençant en I et se terminant en A(x_1, y_1); soient $\theta_0, \theta_1, \dots$, les paramètres dé-

finissant les côtés AK, KL, LM, . . . , nous aurons

$$\begin{aligned}\theta_0 &= \frac{-x_1}{\delta - x_1 - \rho}, \\ x'x_1 &= \frac{[\rho(1 - \theta_0^2) + \delta(1 - \theta_0^2)]^2 - 4R^2\theta_0^2}{(1 + \theta_0^2)^2}, \\ \theta_0 - \theta_1 &= \frac{x' - \delta - \rho}{\delta - x' - \rho}, \\ \theta_0 - \theta_2 &= \frac{\theta_1^2 + \alpha}{\beta\theta_1^2 + 1}, \\ &\dots\dots\dots, \\ \theta_{n-1} - \theta_{n+1} &= \frac{\theta_n^2 + \alpha}{\beta\theta_n^2 + 1}.\end{aligned}$$

Dans ces formules, x, y sont les coordonnées d'un point A

Fig. 5.



(autre que les points cycliques) commun aux deux cercles; x' est l'abscisse du point K , où la tangente en A au cercle de rayon ρ rencontre le cercle de rayon R .

Ceci posé, cherchons, par exemple, la ligne de quatre côtés commençant en I et se terminant en A, c'est-à-dire l'octogone de seconde espèce; on peut écrire

$$t_3 = \theta_0;$$

on peut aussi écrire

$$t_2 = \theta_1.$$

De même cherchons la ligne de cinq côtés, commençant en I et

se terminant en A; nous écrirons, ou bien

$$t_1 = 0_0,$$

ou bien

$$t_1 = 0_1,$$

ou bien

$$t_2 = 0_2.$$

Les résultats sont, comme on le voit, beaucoup moins simples que pour les polygones de première espèce:

Pour l'hexagone de seconde espèce, nous écrirons

$$t_2 = 0_0,$$

ou

$$\frac{-i_1 r_1}{\delta - x_1 - \rho} = \frac{x - t_1^2}{\beta t_1^2 + 1},$$

ou

$$\frac{x_1^2 - R^2}{(\delta - x_1 - \rho)^2} = \frac{\left[x - \left(\frac{x - 1}{\beta - 1} \right)^2 \right]^2}{\left[1 - \beta \left(\frac{x - 1}{\beta - 1} \right)^2 \right]^2}.$$

avec

$$x_1 = \frac{\delta^2 - \rho^2 - R^2}{2\delta}, \quad \alpha = \frac{(\delta + \rho)^2 - R^2}{\rho^2}, \quad \beta = \frac{(\delta - \rho)^2 - R^2}{\rho^2}.$$

On voit, par cet exemple, combien les formules relatives aux polygones de seconde espèce sont, de leur nature, compliquées; il faut préférer, à la méthode générale, l'étude de chacun des cas particuliers, étude qui, seule, peut conduire aux simplifications possibles; c'est ainsi que nous avons obtenu les formules relatives à l'hexagone de seconde espèce :

$$\frac{R^2}{\rho^2} = \frac{\lambda(\lambda - 1)^2(2 - 3\lambda)}{(1 - 2\lambda)^2},$$

$$\frac{\delta^2}{\rho^2} = \frac{\lambda^2(1 - 3\lambda)(\lambda - 1)}{(1 - 2\lambda)^2},$$

λ désignant un paramètre arbitraire.

Nous reviendrons prochainement sur toutes ces questions, sur l'étude des polygones d'un nombre impair de côtés, et l'extension aux coniques de la méthode exposée pour deux cercles.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES

SÉANCE DU 3 AVRIL 1901.

PRÉSIDENCE DE M. D'OCAGNE.

Communications :

M. Torrès : 1° *Sur les rapports entre le calcul mécanique et le calcul graphique*; 2° *Sur un système articulé permettant de montrer la permutation des deux racines d'une équation du second degré.*

M. Laisant : *Sur une transformation des déterminants.*

M. Lecornu : *Sur une question d'aires.*

M. d'Ocagne : *Sur la vérification des angles en topographie.*

M. EDMOND MAILLET fait la Communication suivante :

Sur les systèmes complets d'équations aux dérivées partielles.

Nous avons établi antérieurement ⁽¹⁾ un théorème relatif aux systèmes complets d'équations linéaires aux dérivées partielles définissant deux divisions P et Q de l'espace R_n invariables par un groupe fini continu transitif G de transformations de Lie.

On peut établir un théorème tout à fait analogue qui ne fait pas intervenir la théorie des groupes de Lie ⁽²⁾ :

THÉORÈME I. — *Soient*

$$(1) \quad \begin{cases} Y_1 = 0, & \dots, & Y_p = 0, \\ Z_1 = 0, & \dots, & Z_q = 0 \end{cases}$$

deux systèmes complets,

$$(2) \quad \begin{cases} \Omega_1, & \dots, & \Omega_{q-p}, \\ \Omega_1, & \dots, & \Omega_{n-q} \end{cases}$$

⁽¹⁾ *Comptes rendus*, mai-juin 1900, et *Journal de Mathématiques*, p. 50 et suiv.; 1901.

⁽²⁾ Voir un résumé de notre Note : *Comptes rendus*, 1^{er} mars 1901.

les Ω_i sont des solutions est une combinaison linéaire des $Y_i = 0$ (1). Toute équation aux dérivées partielles dont les O_i sont des solutions est une combinaison linéaire des $Z_j = 0$. Donc, toute équation dont l'ensemble des fonctions (2) est solution est à la fois une combinaison linéaire des $Y_i = 0$ et des $Z_j = 0$; c'est une équation commune aux deux systèmes (en considérant comme appartenant à chaque système les combinaisons linéaires des équations de chaque système). Elle est donc une conséquence linéaire du système (6), c'est-à-dire que les O_i et les Ω_j sont des solutions de (6). Donc, *parmi ces fonctions, il y en a au plus $n - s$ indépendantes; il n'y en a pas moins, sans quoi elles satisferaient à un système complet de plus de s équations, par suite à quelque équation qui ne serait pas conséquence de (6), tout en étant commune aux deux systèmes (1).*

D'autre part, *le nombre des solutions indépendantes de (1) est bien $n - (p + q - s)$.*

Les conditions sont suffisantes.

En effet, supposons-les remplies : toute solution commune aux deux systèmes (1) est de la forme

$$(7) \quad \Theta = \theta_1 O_1, \dots, O_{n-q} + \epsilon_1 \Omega_1, \dots, \Omega_{n-q},$$

et il y a $n - q$ solutions indépendantes de cette forme, avec $q = p + q - s$ (2).

Dès lors, le système complet dérivé de (1) comprend évidemment $p + q - s$ équations. Donc, si les deux systèmes (1) ont ω équations communes, et $p + q - \omega$ équations linéairement indépendantes, on a $\omega \geq s$, c'est-à-dire que l'on pourra trouver exactement ω des expressions Z_j qui soient fonctions linéaires des Y_i et de $Z_1, \dots, Z_{q-\omega}$. En raisonnant comme sur les systèmes (3) et (4), on pourra mettre ces ω équations sous la forme

$$(8) \quad Y_1 = 0, \dots, Y_\omega = 0, \quad (0 \leq \omega \leq s).$$

(1) Sans quoi, en l'adjoignant au premier système (1), on en déduirait un système complet de plus de p équations admettant $n - p$ solutions indépendantes.

(2) Ces équations sont résolubles par rapport à $n - q$ des quantités $O_1, \dots, O_{n-q}$, par exemple, car sinon il y aurait entre les θ_i ou moins une relation, et les $n - q$ solutions Θ ne seraient pas indépendantes.

Soit $\Psi_1, \dots, \Psi_{n-\omega}$ un système de solutions indépendantes de (8) : Ω_i et O_j satisfaisant au système (8), on aura

$$(9) \quad \begin{cases} \Omega_i = F_i(\Psi_1, \dots, \Psi_{n-\omega}), \\ O_j = f_j(\Psi_1, \dots, \Psi_{n-\omega}), \end{cases}$$

et les Ω_i et O_j seraient fonctions des $n - \omega$ fonctions Ψ_k . Donc, en éliminant $\Psi_1, \dots, \Psi_{n-\omega}$ entre ces $n - p + n - q$ relations, on obtiendra au moins

$$\delta = n - p + n - q - (n - \omega) = n - (p + q - \omega)$$

relations entre les Ω_i et O_j . Parmi ces fonctions, il y en aura au plus

$$n - p + n - q - \delta = n - \omega$$

indépendantes : d'après l'hypothèse

$$\begin{aligned} n - \omega &= n - s, \\ \omega &= s. \end{aligned}$$

Il en résulte $\omega = s$. Parmi les équations (1), il y en a exactement $p + q - s$ indépendantes; le système complet dérivé comprenant $p + q - s$ équations indépendantes, il en résulte que les équations (1) forment déjà un système complet.

C. Q. F. D.

Interprétation géométrique. — Supposons que (1) forme un système complet à $p + q - s$ équations indépendantes. Le théorème I est alors applicable.

Considérons l'ensemble des multiplicités

$$(10) \quad \begin{cases} P \left\{ \begin{array}{l} \Omega_1 = \alpha_1, \quad \dots, \quad \Omega_{n-p} = \alpha_{n-p}, \\ O_1 = \alpha_1, \quad \dots, \quad O_{n-q} = \alpha_{n-q}; \end{array} \right. \end{cases}$$

soient Π_0 un point quelconque $(x_1^0, \dots, x_n^0)$ de position générale et P_0 celle des multiplicités P qui passe par Π_0 , d'équations

$$(11) \quad \Omega_1 = \alpha_1^0, \quad \dots, \quad \Omega_{n-p} = \alpha_{n-p}^0.$$

Formons les équations de la multiplicité M engendrée par toutes les multiplicités Q qui rencontrent P_0 . Une multiplicité Q_i

de Q qui rencontre P_0 a ses équations de la forme

$$(12) \quad O_1 = a_1, \quad \dots, \quad O_{n-q} = a_{n-q}$$

et, pour tout point de l'intersection, (11) et (12) ont lieu simultanément.

D'après les équations (7), on aura à la fois

$$(13) \quad \theta_i(a_1, \dots, a_{n-q}) = \tau_i(z_1^0, \dots, z_{n-q}^0) \quad [i = 1, 2, \dots, n - (p + q - s)]$$

et $n - (p + q - s)$ des équations (12), les dernières, par exemple, sont des conséquences des équations (11) et des $(p - s)$ premières équations (12).

On a ainsi entre les coordonnées d'un point de l'intersection $n - s$ équations qui représentent une multiplicité R à ζ degrés de liberté et qui est l'intersection de P_0 et de Q_1 . On a $\zeta = s$: sinon une des équations $O_1 = a_1, \dots, O_{p-s} = a_{p-s}$; la dernière, par exemple, serait une conséquence des autres et de (11), et il ne peut en être ainsi en général⁽¹⁾, puisque parmi les fonctions O et Ω il y en a exactement $n - s$ indépendantes. Or, parmi les constantes a_i de (12), $n - (p + q - s)$ sont fonctions de $a_1, \dots, a_{p-s}$ et des z_j^0 , d'après (13), par exemple. Si donc on élimine les a_i entre (12) et (13), on obtient le lieu des multiplicités Q qui coupent P_0 . Ce lieu est

$$(14) \quad \theta_i(O_1, \dots, O_{n-q}) = \tau_i(z_1^0, \dots, z_{n-q}^0).$$

Réciproquement, toute multiplicité Q_1 située sur (14) coupe P_0 , car, pour Q_1 , les a_i satisfont aux équations (13) et l'intersection de Q_1 et de P_0 est déterminée par $n - s$ équations indépendantes.

Ceci posé, nous remarquerons, si Q_0 est la multiplicité Q qui passe par Π_0 , que l'on a

$$(15) \quad \theta_i(O_1, \dots, O_{n-q}) = \tau_i(\Omega_1, \dots, \Omega_{n-p}) = \tau_i(z_1^0, \dots, z_{n-q}^0) = \theta_i(a_1^0, \dots, a_{n-q}^0).$$

Si l'on avait cherché à obtenir le lieu des multiplicités P qui

(1) Comparer, par exemple, JORDAN, *Cours d'Analyse lithographique* de l'Ecole Polytechnique, première division.

rencontrent Q_0 , on eût été conduit aux équations

$$(16) \quad \gamma_i(\Omega_1, \dots, \Omega_{n-p}) = \theta_i(\alpha_1^0, \dots, \alpha_{n-q}^0),$$

qui, d'après (15), sont identiques aux équations (14). Les multiplicités (14) et (16) coïncident donc.

Ainsi :

Quand les équations (1) forment un système complet de $p + q - s$ équations indépendantes, soient

$$(10) \quad \begin{cases} P, & \Omega_1 = \alpha_1, & \dots, & \Omega_{n-p} = \alpha_{n-p}, \\ Q, & \Omega_1 = \alpha_1, & \dots, & \Omega_{n-q} = \alpha_{n-q}, \end{cases}$$

les deux divisions de l'espace déterminées par les deux systèmes (1),

$$\theta_i(\Omega_1, \dots, \Omega_{n-q}) = \gamma_i(\Omega_1, \dots, \Omega_{n-p}) \quad [i = 1, 2, \dots, n - (p + q - s)],$$

les solutions communes aux deux systèmes (1), P_0 et Q_0 deux multiplicités quelconques des deux divisions (10) qui se coupent. Le lieu des multiplicités Q qui rencontrent P_0 coïncide avec le lieu des multiplicités P qui rencontrent Q_0 et est une des multiplicités

$$(17) \quad \gamma_i = \text{const.} \quad [i = 1, 2, \dots, n - (p + q - s)].$$

Ces dernières équations représentent une division de l'espace dont chaque multiplicité R est engendrée au choix par des multiplicités P et des multiplicités Q .

Dans quelle mesure peut-on établir une réciproque ?

Considérons deux systèmes complets (1) tels que le système complet dérivé ait $p + q - s$ équations indépendantes, (2) représentant encore deux systèmes de solutions indépendantes des deux systèmes (1), et les multiplicités (10) correspondantes. Supposons que le lieu des multiplicités P qui rencontrent une quelconque des multiplicités Q soit une multiplicité d'équations

$$\gamma_i = \text{const.},$$

la même multiplicité étant en même temps le lieu des multiplicités Q qui rencontrent une multiplicité P .

Tout lieu de multiplicités P a ses équations de la forme

$$\delta_i(\Omega_1, \dots, \Omega_{n-p}) = \text{const.}$$

D'après l'hypothèse, les équations $\delta_i = \text{const.}$ deviendront

$$(18) \quad \delta_i(\Omega_1, \dots, \Omega_{n-p}) = \gamma_i(O_1, \dots, O_{n-q}) = \text{const.},$$

les fonctions δ_i étant évidemment indépendantes.

Les δ_i sont ainsi des solutions communes aux deux systèmes (1); soit ξ leur nombre: $\xi \leq n - (p + q - s)$.

D'autre part, en raisonnant comme précédemment, on voit que les deux systèmes (1) ont ω équations communes, avec $\omega \leq s$, et comprennent $p + q - \omega$ équations linéairement indépendantes. Ces ω équations seront de la forme (8) et l'on aura encore (9). On en conclura au moins $n - (p + q - \omega)$ relations entre les Ω_i et les O_j , dont $n - \omega$ au plus seront indépendantes. Admettons que parmi les fonctions Ω et O il y en ait exactement $n - \rho$ indépendantes avec $\rho \leq \omega$. L'intersection d'une multiplicité P_0 et d'une multiplicité Q ayant un point commun avec P_0 est une multiplicité R à ρ degrés de liberté. Soient

$$(19) \quad \lambda_i(O_1, \dots, O_{n-q}, \Omega_1, \dots, \Omega_{n-p}) = 0$$

les $n - p + n - q - \rho = n - \rho = n - (p + q - \rho)$ relations entre les O et les Ω . On en conclura $n - (p + q - \rho)$ relations

$$(20) \quad \lambda_i(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-q}, x_1^n, \dots, x_{n-p}^n) = 0,$$

nécessaires pour que Q coupe P_0 . Le lieu des multiplicités Q sera la multiplicité S

$$\lambda_i(O_1, \dots, O_{n-q}, x_1^n, \dots, x_{n-p}^n) = 0,$$

et toute multiplicité Q_i située sur S coupera P_0 , car, pour Q_i les α_i satisfont aux équations (20) et l'intersection de Q_i et P_0 existe et est déterminée par $n - \rho$ relations. On a

$$n - (p + q - \rho) = \xi \leq n - (p + q - s),$$

d'où $\omega \leq \rho \leq s$, avec $s \leq \omega$, c'est-à-dire $\rho = \omega = s$. Parmi les fonctions Ω_i et O_j , il y en a ainsi $n - s$ indépendantes exactement, les

relations (18) sont au nombre de $n - (p + q - s)$, et les deux systèmes (1) ont s équations communes exactement.

C. Q. F. D.

On en conclut :

THÉORÈME II. — Soient

$$(1) \quad \begin{cases} Y_1 = 0, & \dots, & Y_p = 0, \\ Z_1 = 0, & \dots, & Z_q = 0 \end{cases}$$

deux systèmes complets,

$$(2) \quad \begin{cases} \Omega_1, & \dots, & \Omega_{n-p}, \\ O_1, & \dots, & O_{n-q} \end{cases}$$

deux systèmes de solutions indépendantes de ces deux systèmes,

$$\begin{cases} P, & \Omega_1 = \alpha_1, & \dots, & \Omega_{n-p} = \alpha_{n-p}, \\ Q, & O_1 = a_1, & \dots, & O_{n-q} = a_{n-q} \end{cases}$$

les deux divisions de l'espace correspondantes. Par tout point Π_0 de l'espace passe une multiplicité P_0 de P et une Q_0 de Q . La condition nécessaire et suffisante pour que l'ensemble des équations (1) forme un système complet de $p + q - s$ équations indépendantes est que, quel que soit le point Π_0 (de position générale) le lieu R des multiplicités Q qui rencontrent P_0 coïncide avec le lieu des multiplicités P qui rencontrent Q_0 ; l'ensemble des lieux R est alors une division de l'espace à $p + q - s$ degrés de liberté

$$\varphi_1 = \text{const.}, \quad \dots, \quad \varphi_{n-(p+q-s)} = \text{const.},$$

les premiers membres de ces équations formant un système de solutions indépendantes du système (1) ⁽¹⁾. C. Q. F. D.

⁽¹⁾ Comparer GOURSAT, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles de premier ordre*, p. 80, Paris, 1891.

M. E. LEMOINE fait la Communication suivante :

Détermination simple de la direction des axes d'une conique.

Les méthodes classiques pour trouver la direction des axes d'une conique conduisent à des calculs, souvent assez compliqués, qui manquent *toujours* d'élégance, de symétrie, et donnent un résultat définitif ne correspondant à aucune image géométrique, ne menant point à une construction simple. La présente Communication a pour but d'indiquer une solution générale exempte des défauts inhérents à la méthode classique. Elle repose sur un théorème de Géométrie élémentaire fort connu, dont voici l'énoncé :

Si M est un point du cercle circonscrit à un triangle ABC, les bissectrices des angles que fait un côté avec la droite qui joint le point M au sommet opposé ont la même direction, quel que soit le côté considéré.

Donc, à chaque groupe de deux *directions* rectangulaires correspond un point du cercle circonscrit, lequel détermine ces directions et réciproquement; nous dirons pour abrégé : point M correspondant à telles directions.

On arrive sans difficultés à calculer que :

Si

$$lx + my^2 + n z^2 + 2fyz + 2g zx + 2hxy = 0$$

est l'équation générale d'une conique en coordonnées normales, le point M correspondant à la direction de ses axes a pour coordonnées normales

$$(1) \quad l_1 b^2 - c^2 + a^2 (m - n) + 2gac + 2hab' \dots$$

résultat fort simple, car il faut considérer qu'il doit contenir les six coefficients de l'équation générale.

Lorsque la conique est circonscrite au triangle de référence, le point M est évidemment le quatrième point commun à cette conique et au cercle circonscrit.

Dans la pratique, les calculs se font le plus souvent avec rapidité ou même donnent immédiatement le résultat.

Pour les coniques remarquables du triangle, à cause de la symétrie, on n'a qu'à calculer la coordonnée x , les autres s'en déduisant par permutation circulaire des lettres a, b, c, l, m, n . On ramène donc immédiatement la détermination des directions de leurs axes à la connaissance d'un point remarquable du cercle circonscrit; mais comme, en général, on arrive ainsi à un point remarquable déjà étudié que l'on sait construire simplement, la question est complètement résolue par une détermination géométrique et imagée, au lieu de l'être par des formules compliquées de radicaux et qui ne disent rien.

Voici comme exemples l'indication de quelques applications :

1. Les axes de la conique

$$\sum a(p-a)x^2 - \sum [bc + (p-b)(p-c)]yz = 0,$$

qui passe par les points où les tangentes au cercle inscrit parallèles aux côtés coupent les autres côtés du triangle, ont pour point M le point $\frac{1}{b-c}, \dots$, car la substitution des coefficients dans (1) donne successivement

$$\begin{aligned} & \frac{a}{b-c} [a(p-a)(b^2-c^2) - a^2\{b(p-a) - c(p-c)\}] \\ & - ac[ac - (p-c)(p-a)] - ab[ab - (p-a)(p-b)] \\ & \frac{a}{b-c} [ap(b^2-c^2) - a^2\{-b^2-c^2 + b(p-a) - c(p-c) - c^2 - b^2\}] \\ & - ac(p-c)(p-a) - ab(p-b)(p-a) \\ & \frac{a}{b-c} [ap(b^2-c^2) - abp(p-b) - acp(p-c)] \\ & - [b^2-c^2] : [b(p-b) - c(p-c)] \dots \text{ ou } \frac{1}{b-c}, \dots \end{aligned}$$

2. Les axes des coniques de Césaro (coniques telles que la somme des carrés des distances de chacun de leurs points aux trois côtés soit constante) ont pour point M le point $\frac{a}{b^2-c^2}, \dots$

3. Les axes de la conique d'inertie du triangle (réduit à trois

masses égales à l'unité, placées en ses sommets ϵ_i , ont pour point M le point de Steiner $\frac{1}{a_1(b^2+c^2)}, \dots$

4. Les axes de l'hyperbole équilatère qui passe par le barycentre, par les centres des quatre cercles tritangents au triangle et a pour équation

$$\sum a^2 x^2 (b^2 + c^2) = 0,$$

ont pour point M le point $\frac{1}{a_1(b^2+c^2)}, \frac{1}{a_2(b^2+c^2)}, \dots$, c'est-à-dire le point de Tarry.

5. Pour montrer l'extrême commodité de cette méthode, nous citerons encore la conique dont l'équation est

$$\sum (p - a) x^2 - \sum a y z = 0,$$

étudiée par M. de Longchamps (*A. P. A. S., Congrès de Nancy: 1886*), elle a pour centre le centre du cercle inscrit et elle passe par les pieds des bissectrices intérieures. M. de Longchamps renonce à déterminer la direction des axes *par la méthode générale* (car il y arrive autrement par un artifice géométrique ingénieux). Il dit : *on ne peut vérifier directement la proposition que par des calculs très laborieux et que nous n'avons même pas poussés jusqu'au bout, par suite des complications qu'ils semblent présenter.*

Avec notre formule générale on trouve *immédiatement* que la direction des axes de cette ellipse a pour point M le point

$$(p - a) (b^2 + c^2) - a^2 (b - c), \dots$$

ou

$$(b - c) [(b + c)^2 - a(b - c) - a^2], \dots,$$

ou

$$(b - c) (a - b - c), \dots$$

ce qui est le point correspondant à la direction de la droite qui joint le centre du cercle circonscrit au centre du cercle inscrit et

à la direction perpendiculaire, laquelle est celle de l'axe anti-orthique

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0.$$

La transformation continue (voir *N. A.*, p. 20; 1893) montre immédiatement qu'il y a trois autres coniques transformées continues de celle qu'a étudiée M. de Longchamps et jouissant des mêmes propriétés, lesquelles se déduisent par transformation continue des propriétés établies pour la première, coniques que l'auteur n'a pas remarquées.

SÉANCE DU 17 AVRIL 1901.

PRÉSIDENCE DE M. D'OCAGNE.

Communications :

M. Carvallo : *Sur le cerceau et les cycles.*

M. Lovett présente un appareil stéréoscopique de M. Greenhill.

M. Lindemann : *Sur les chiffres chez les anciens.*

M. Walther Dyck : *Sur des intégrales triples de Kronecker.*

M. Borel : *Sur les fonctions méromorphes.*

M. Hadamard : *Sur l'équilibre élastique d'une plaque circulaire non encastrée.*

SÉANCE DU 1^{er} MAI 1901.

PRÉSIDENCE DE M. D'OCAGNE.

Elections :

M. Hancock (Harris), présenté par MM. Darboux et d'Ocagne ; M. Angiboust, présenté par MM. Rally et Servant, sont élus membres de la Société à l'unanimité des membres présents.

Communications :

M. André fait hommage à la Société d'une brochure dont il est l'auteur et qui traite de la *comptabilité des assauts complets.*

M. Demoulin : *Sur une propriété des courbes algébriques et des surfaces algébriques.*

M. Raffy : *Sur les surfaces à lignes de courbure planes.*

M. Angiboust : *Sur les surfaces W à lignes de courbure planes dans un système.*

SÉANCE DU 15 MAI 1901.

PRÉSIDENCE DE M. TOUCHE ET DE M. D'OCAGNE.

Communications :

M. Servant : *Sur la déformation du parabolôïde.*

M. Demoulin : *Sur une propriété caractéristique des surfaces de M. Voss.*

M. Laisant : *Sur l'Annuaire des mathématiciens.*

M. EDMOND MAILLET adresse la Note suivante :

Sur certains théorèmes de Géométrie cinématique.

Nous nous proposons d'indiquer ci-dessous par un ou deux exemples les extensions simples dont sont susceptibles plusieurs des propriétés indiquées par M. Mannheim dans ses *Principes et développements de Géométrie cinématique* (1) :

THÉORÈME. — *Soit un système invariable mobile dont les positions dépendent d'un ou deux paramètres. A chaque point $p(X, Y, Z)$ de ce système, faisons correspondre un plan P*

$$AX_1 + BY_1 + CZ_1 + D = 0$$

(OXYZ axes fixes), les coefficients de son équation dépendant rationnellement de X, Y, Z et de leurs dérivées par rapport aux paramètres variables.

Pour une position quelconque du système, considérons :
1° les points p qui sont sur une courbe unicursale et les plans P correspondants; l'enveloppe de ces plans P est une surface

réglée unicursale dont l'arête de rebroussement est unicursale :
 2° les points p qui sont sur une surface unicursale et les plans P correspondants; leur enveloppe est unicursale.

En effet, soient

$$(1) \quad \begin{cases} X = X_0 + a_1 x + b_1 y + c_1 z, \\ Y = Y_0 + a_2 x + b_2 y + c_2 z, \\ Z = Z_0 + a_3 x + b_3 y + c_3 z \end{cases}$$

les équations qui définissent les trajectoires de chaque point du système invariable mobile (O, x, y, z axes mobiles, fixes par rapport au système invariable mobile), $X_0, Y_0, Z_0, a_1, \dots, c_3$ dépendant d'un ou deux paramètres variables t ou u et v , suivant que le mouvement est à un ou deux degrés de liberté.

A chaque position de $p(x, y, z, X, Y, Z)$ sur sa trajectoire, nous faisons correspondre le plan P .

Considérons les points p qui sont sur une courbe C ou une surface S unicursale, dont les équations en x, y, z dépendent d'un ou deux paramètres variables t_1 ou u_1 et v_1 , et les plans P correspondants.

Pour une courbe C , l'enveloppe des plans P s'obtient en considérant les équations

$$(2) \quad \begin{cases} AX_1 + BY_1 + CZ_1 + D = 0, \\ X_1 \frac{dA}{dt_1} + Y_1 \frac{dB}{dt_1} + Z_1 \frac{dC}{dt_1} + \frac{dD}{dt_1} = 0. \end{cases}$$

Dans tous les cas, les dérivées de X, Y, Z par rapport aux paramètres variables, c'est-à-dire les dérivées de X, Y, Z relatives au point p sur sa trajectoire (courbe ou surface) sont rationnelles en t_1 ou en u_1 et v_1 . Il en est de même de A, B, C, D , et l'on déduira de (2) X_1 et Y_1 en fonction rationnelle de Z_1 et de t_1 . Pour chaque position du système invariable mobile, l'enveloppe est une surface réglée unicursale.

L'arête de rebroussement est donnée par (2) et par

$$(3) \quad X_1 \frac{d^2 A}{dt_1^2} + Y_1 \frac{d^2 B}{dt_1^2} + Z_1 \frac{d^2 C}{dt_1^2} + \frac{d^2 D}{dt_1^2} = 0.$$

Ce sera une courbe unicursale.

Pour une surface S, l'enveloppe des plans P est évidemment une surface unicursale.

Des généralisations sont possibles; nous n'insistons pas.

C. Q. F. D.

On peut déduire de là, comme corollaire, deux théorèmes de M. Mannheim (¹) en les englobant dans une même démonstration.

Supposons que A, B, C soient du deuxième degré, et D du troisième en X, Y, Z et leurs dérivées. Ce sera le cas du plan osculateur de la courbe trajectoire dans un mouvement à un paramètre

$$(4) \quad \begin{vmatrix} X_2 - X & Y_2 - Y & Z_2 - Z \\ dX & dY & dZ \\ d^2X & d^2Y & d^2Z \end{vmatrix} = 0.$$

Ce sera encore le cas du plan passant par le point X, Y, Z et dont les cosinus directeurs de la normale sont proportionnels à X^2 , Y^2 , Z^2 , ou du plan passant par X, Y, Z, perpendiculaire au plan osculateur et parallèle à une droite fixe.

D'autre part, ce sera encore le cas du plan tangent de la surface trajectoire, dans un mouvement à deux paramètres,

$$(5) \quad \begin{vmatrix} X_2 - X & Y_2 - Y & Z_2 - Z \\ X_u & Y_u & Z_u \\ X_v & Y_v & Z_v \end{vmatrix} = 0.$$

Ce sera encore le cas du plan passant par X, Y, Z et dont les cosinus directeurs de la normale sont proportionnels à X^2 , Y^2 , Z^2 déjà indiqué, ou du plan normal parallèle à une droite fixe.

Le théorème précédent sera applicable.

Prenons le cas particulier où la courbe C est une droite D

$$(6) \quad X = X_0 + c_1 z, \quad Y = Y_0 + c_2 z, \quad Z = Z_0 + c_3 z$$

(z remplaçant ici t_1).

Les équations des six plans ci-dessus sont de la forme

$$(7) \quad \begin{cases} X_2(m_1 - n_1 z + p_1 z^2) + Y_2(m_2 - n_2 z + p_2 z^2) \\ + Z_2(m_3 - n_3 z + p_3 z^2) + D = 0. \end{cases}$$

¹ *Ann. chim. p. 160 et 167.*

La deuxième équation (2) devient

$$(8) \quad X^2(n+2pz) + Y_2(n_1+2p_1z) + Z_2(n_2+2p_2z) + D_2 = 0.$$

Le cône directeur s'obtient en éliminant z entre les équations (7) et (8) où l'on néglige D et D'_z . Or, si l'on coupe ce cône par un plan quelconque $Z_2 = xX_2 + yY_2$, et si l'on élimine X_2 et Y_2 , on a une équation en z , de degré 2, en général ⁽¹⁾. Donc, en général, ce cône est du second ordre.

Quant à l'enveloppe elle-même, déterminée par (7) et (8), sa classe est évidemment égale au plus grand degré de A , B , C , D , c'est-à-dire à 3. Son degré est 4, car si on la coupe par une droite on trouve quatre valeurs de z .

On obtient ainsi, par une même démonstration, six théorèmes, dont deux ont été indiqués par M. Mannheim.

Remarque. — On pourra encore considérer le cas où la courbe C est une conique mobile et le cas où la surface S est un plan mobile, étudier également le cas où le degré des lieux (et de leurs cônes directeurs dans le cas des surfaces réglées) s'abaisse ⁽²⁾. Nous croyons inutile d'insister.

M. HADAMARD fait la Communication suivante :

Sur l'itération et les solutions asymptotiques des équations différentielles.

Les travaux de M. Poincaré ont montré comment une solution périodique d'un système d'équations différentielles quelconques était, en général, entourée d'un cortège de solutions asymptotiques. Dans certains cas, toute solution suffisamment voisine de la solution périodique est par cela même asymptotique. Dans d'autres, l'asymptotisme n'a lieu que pour les trajectoires situées sur certaines surfaces passant par la courbe fermée qui sert de point de départ. Pour former les équations de ces surfaces,

⁽¹⁾ Le degré des déterminants des équations (7) et (8) s'abaisse en effet au deuxième.

⁽²⁾ Dans le cas où C est une conique il y a probablement des cas intéressants d'abaissement du cône directeur.

M. Poincaré emploie des développements en séries entières, établis en supposant les équations données analytiques.

Il m'a paru intéressant de traiter la même question au point de vue exclusivement réel et sans faire intervenir l'analyticité des données. Je me bornerai d'ailleurs aux cas les plus simples et aux résultats les plus immédiats.

Le problème revient, comme on sait, à celui de l'itération à plusieurs variables. Soit donc

$$\begin{aligned}x_1 &= f(x, y) = ax + by + \dots, \\y_1 &= \varphi(x, y) = cx + dy + \dots\end{aligned}$$

une transformation ponctuelle du plan, conservant l'origine. Nous supposons que l'équation

$$\begin{vmatrix} a-s & b \\ c & d-s \end{vmatrix} = 0,$$

ait ses racines s, s' réelles et distinctes. Alors, moyennant un changement de coordonnées, la transformation s'écrit

$$(1) \quad \begin{cases} x_1 = f(x, y) = sx + F(x, y), \\ y_1 = \varphi(x, y) = s'y + \Phi(x, y), \end{cases}$$

F et Φ étant des fonctions dont les développements (formels) commencent par des termes du second degré. Nous admettrons que F et Φ ont des dérivées partielles dans un certain domaine entourant l'origine, ces dérivées partielles étant continues et, en particulier, tendant vers zéro avec x et y . Enfin s , supposé plus grand que s' en valeur absolue (l'égalité étant exclue), sera positif et plus grand que 1.

Le point (x_1, y_1) est dit le *conséquent* de (x, y) et celui-ci l'*antécédent* de (x_1, y_1) ; le point (x_2, y_2) , conséquent de (x_1, y_1) , est dit le *second conséquent* de (x, y) , etc.

Une circonférence de rayon suffisamment petit, décrite avec l'origine pour centre, aura pour conséquente, moyennant les hypothèses faites sur s et s' , une sorte d'ellipse allongée suivant l'axe des x ; celle-ci aura, à son tour, pour conséquente une courbe de forme analogue, mais plus allongée encore, et ainsi de suite. Dès lors, il est à présumer que toute la partie du plan entourant

l'origine ira en s'amincissant indéfiniment et tendra vers une courbe unique. C'est ce que nous allons vérifier.

A cet effet, traçons, en partant de l'origine, un arc de courbe C non tangent à l'axe des y , arc sur lequel y sera bien déterminé en fonction de x et $\frac{dy}{dx}$ partout inférieur en valeur absolue à un certain nombre α . Il est aisé de voir, étant données les hypothèses faites sur les fonctions f et φ , que la conséquent de la courbe C jouira de la même propriété, du moins si l'on se restreint (comme nous allons le faire) à un certain domaine D entourant l'origine. Toutes les conséquentes successives seront donc coupées par une parallèle quelconque à l'axe des y en un seul point et les coefficients angulaires de leurs tangentes et, par conséquent aussi, de leurs cordes quelconques, seront tous moindres que α .

Soit C' une seconde courbe remplissant les mêmes conditions que C. Si nous coupons ces deux lignes par une même droite $x = \text{const.}$, la différence $y - y'$ sera nulle avec x et le rapport $\frac{|y - y'|}{x}$ aura, dans le domaine D, un certain maximum μ .

Soient maintenant C₁, C'₁ les conséquentes de C et de C'; μ_1 la quantité analogue à μ déterminée à l'aide de C₁ et de C'₁. Le rapport $\frac{\mu_1}{\mu}$ est inférieur à un nombre fixe σ plus petit que 1, à savoir un nombre supérieur d'aussi peu qu'on veut à $\frac{|s'|}{s}$, si le domaine D a été pris suffisamment restreint.

Désignons, en effet, par Y, Y' les ordonnées de C et de C' correspondant à une même valeur X de l'abscisse (X étant supposé positif pour fixer les idées); y_1, y'_1 les ordonnées analogues de C₁ et de C'₁. Les points (X, y_1) et (X, y'_1) seront les conséquents de deux points (x, y) et (x', y') respectivement situés sur C et sur C₁.

De l'hypothèse faite sur C résulte

$$(2) \quad |y| \leq \alpha x,$$

et des hypothèses faites sur F et Φ

$$(3) \quad |X - sx'| \leq \eta_1(x - |y|),$$

η_1 pouvant être pris aussi petit qu'on veut avec les dimensions du domaine D.

Ces deux inégalités montrent que x , et pareillement x' , sont tous deux plus petits que $\frac{X}{s - \tau_1(1 - \alpha)}$.

Si enfin y'_0 est le point de C_1 correspondant à l'abscisse x , on a

$$(4) \quad |y'_0 - y| \leq p \cdot x \leq \frac{pX}{s - \tau_1(1 - \alpha)},$$

$$(5) \quad |y' - y'_0| \leq \alpha |x' - x|.$$

D'autre part, puisque les dérivées de F et Φ sont toutes en valeur absolue plus petites que τ_1 , on peut écrire

$$(6) \quad |x - x'| \leq \frac{\tau_1}{s - \tau_1} |y - y'|,$$

et, par suite, en vertu de (4) et de (5),

$$(6') \quad |y - y'| \leq \frac{y'_0 - y}{1 - \frac{\tau_1}{s - \tau_1}} \leq \frac{pX(s - \tau_1)}{[s - \tau_1(1 - \alpha)]},$$

puis

$$(7) \quad |y_1 - y'_1 - s'(y - y_0)| \leq \tau_1(|x - x'| + |y - y_0|).$$

Les inégalités (2) à (7) donnent bien, ainsi que nous l'avions annoncé,

$$(8) \quad |y_1 - y'_1| \leq p \left| \frac{y'}{s} \right| + \varepsilon \frac{X}{s},$$

ε étant limité en fonction de τ_1 et de α et tendant vers zéro avec τ_1 .

Il est aisé de déduire de là que les conséquentes successives de C tendent vers une courbe limite ε . Supposons, en effet, que C' coïncide avec C_1 : alors C'_1 ne sera autre que la seconde conséquente C_2 de C . Le segment intercepté, sur l'ordonnée correspondante à l'abscisse X , entre C et C_1 étant plus petit que pX , celui qui est intercepté entre C_1 et C_2 sera plus petit que $p\tau X$; celui qui est intercepté entre C_2 et C_3 , plus petit que $p\tau^2 X$, ... Ces segments formeront donc une série convergente.

De plus, la courbe ε obtenue est indépendante du choix de la courbe C , puisque si C' est une autre courbe quelconque (issue de l'origine et non tangente à l'axe des y), $C'_1, C'_2, \dots, C'_n, \dots$ ses conséquentes successives, le segment intercepté sur

une ordonnée quelconque entre C_n et C'_n tend vers zéro lorsque n augmente indéfiniment.

La courbe $\mathcal{C}$ est évidemment invariante (c'est-à-dire coïncide avec sa conséquente), et l'on voit, de plus, que c'est la seule courbe invariante qui aboutisse à l'origine, s'y comporte régulièrement et ne soit pas tangente à l'axe des y .

On remarquera que ces différents résultats ne supposent nullement $|s'| \leq 1$. Si l'on ajoute cette nouvelle hypothèse, il arrivera que les antécédentes d'une courbe quelconque issue de l'origine (et non tangente à l'axe des x) tendront également vers une position limite déterminée $\mathcal{C}'$, laquelle sera tangente à l'axe des y .

Les deux courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ seront alors les lieux géométriques, l'une des points dont les antécédents successifs tendent vers l'origine, l'autre des points dont les conséquents successifs tendent vers l'origine. Ce sont elles qui interviennent dans la théorie des solutions asymptotiques.

SÉANCE DU 3 JUIN 1901.

PRÉSIDENCE DE M. BOCAGNE.

Correspondance :

M. le Président signale le dépôt du Tome XII de la 1^{re} série des *Œuvres complètes d'Augustin Cauchy* et fait valoir l'intérêt qui s'attache à la rédaction d'une Table d'après les conventions du Répertoire.

Communications :

M. Raffy : *Sur l'identité des surfaces doublement cylindrées suivant leurs lignes de courbure avec les surfaces à lignes de courbure planes dont les plans enveloppent un cylindre.*

M. d'Adhémar : *Sur l'application de la méthode des approximations successives à une équation aux dérivées partielles de forme particulière.*

M. A. PELLET adresse la Note suivante :

Sur la méthode d'approximation de Newton.

La formule d'approximation de Newton est susceptible d'une

extension très utile dans la pratique. Soit l'équation

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots = 0.$$

Désignons par u la racine de plus petit module de l'équation obtenue en se bornant aux $i + 1$ premiers termes,

$$a_0 + a_1x + \dots + a_ix^i = 0.$$

Si l'on prend pour valeur approchée de la racine de plus petit module de l'équation

$$f(x) = 0, \quad u = \frac{f(u)}{f'(u)},$$

l'erreur commise a un module inférieur à

$$\frac{M\xi^2}{1 - M^2\xi^2},$$

ξ module de

$$\frac{f(u)}{f'(u)}, \quad \xi = \left| \frac{f(u)}{f'(u)} \right|,$$

et M nombre positif au plus égal à

$$= \frac{1}{2} \frac{\varphi''(\xi)}{\varphi'(\xi)},$$

$\varphi(\xi)$ représentant la fonction

$$x_0 + x_1\xi + x_2\xi^2 + \dots + x_n\xi^n + \dots$$

où x_n est le module de

$$a_n, \quad x_n = |a_n|,$$

et ξ prenant la valeur de la plus petite racine de $\varphi(\xi) = 0$. La seule condition pour que la formule s'applique est l'existence de la racine ξ , supposée en outre simple.

Ainsi, soit l'équation

$$x^3 - 7x + 7 = 0.$$

Posons

$$x = 1 + \frac{1}{3}y;$$

il vient

$$y^3 - 4y^2 - \frac{5}{3}y - \frac{1}{7} = 0.$$

ξ est inférieur à $\sqrt[3]{2} = 1 + \frac{1}{3}$, ce qui donne

$$M \leq 1,6.$$

Désignant par u la plus petite racine de

$$4u^2 - \frac{5}{3}u + \frac{1}{27} = 0,$$

on aura la valeur approchée de y

$$u - \frac{u^3}{3u^2 - 8u - \frac{5}{3}} = u - \frac{u^3}{\frac{61}{36} - 9,25u}.$$

Un calcul avec les Tables à 7 décimales donne

$$u = \frac{15 - \sqrt{172}}{72} = 0,0235537,$$

$$y = \frac{8,849561}{10^6}, \quad \frac{M^2}{1 - M^2} = \frac{1,26}{10^{10}},$$

d'où

$$x = 1,3568958;$$

Serret, *Algèbre supérieure*, traite cet exemple. Mais la formule permettrait d'avoir x avec deux chiffres exacts de plus, puisque l'erreur commise en l'appliquant est inférieure à $\frac{1,26}{10^{10}}$.

SÉANCE DU 19 JUIN 1901.

PRÉSIDENCE DE M. TOUCHE.

Communication :

M. Blutel : *Sur une propriété des coniques tracées sur le cylindroïde de Cayley.*

SÉANCE DU 3 JUILLET 1901.

PRÉSIDENCE DE M. TOUCHE.

Élections :

M. Padé, présenté par MM. Painlevé et Borel; M. Massau, présenté par MM. Demoulin et Borel; M. Delassus, présenté par MM. Cosserat et Kœnigs, sont élus membres de la Société à l'unanimité des membres présents.

Communication :

M. Lecornu : *Sur la dynamique des systèmes déformables.*

M. SERVANT fait la Communication suivante :

Sur la déformation des quadriques.

Soit

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

l'élément linéaire d'une quadrique rapportée à ses génératrices rectilignes ; on trouve facilement les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 12 \\ 11 \end{pmatrix} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial v} \log K, & \begin{pmatrix} 12 \\ 22 \end{pmatrix} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} \log K, & \begin{pmatrix} 11 \\ 22 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix} &= 0, \\ \begin{pmatrix} 11 \\ 11 \end{pmatrix} &= \frac{\partial}{\partial u} \log \frac{\delta}{\sqrt{K}}, & \begin{pmatrix} 22 \\ 22 \end{pmatrix} &= \frac{\partial}{\partial v} \log \frac{\delta'}{\sqrt{K}}, & K^2 &= -\frac{1}{RR'}, \\ \delta' &= -\frac{1}{\sqrt{EG + F^2}} \operatorname{Sc} \frac{\partial^2 v}{\partial u \partial v}. \end{aligned}$$

Soit

$$D du^2 + 2D' du dv + D'' dv^2$$

la seconde forme quadratique relative à une surface applicable sur la quadrique donnée ; les équations de Gauss deviennent

$$\Omega \frac{\partial \Delta'}{\partial u} = \frac{\partial \Delta}{\partial v}, \quad \Omega \frac{\partial \Delta'}{\partial v} = \frac{\partial \Delta''}{\partial u}, \quad \Delta \Delta' = \Omega^2 (\Delta'^2 - 1)$$

où l'on a posé

$$\sqrt{K} D = \Delta, \quad \sqrt{K} D' = \Delta', \quad \frac{D''}{\delta'} = \Delta'', \quad \sqrt{K} \delta = \Omega;$$

on voit que ces équations ont la même forme que celles qui déterminent une surface à courbure totale constante rapportée à ses lignes de longueur nulle ; la valeur de Ω seule diffère. L'analogie entre les deux problèmes se poursuit plus loin ; en effet, on voit de suite que le réseau conjugué commun à la quadrique et à la surface applicable est

$$\Delta du^2 - \Delta'' dv^2 = 0;$$

c'est l'équation qui détermine les lignes de courbure d'une surface à courbure totale constante rapportée à ses lignes de longueur nulle ; on en déduit de suite une proposition de M. Darboux (*A. E. N. S.*, 1900). *Le réseau conjugué commun à une quadrique et à une surface applicable sur celle-ci est un réseau isotherme conjugué.*

On peut, par d'autres méthodes, donner une forme très simple

aux équations de la déformation d'une quadrique : en effet, les équations de M. Darboux (*Th. des surf.*, t. III) qui permettent de déterminer les quantités u et v en fonction des asymptotiques α et β d'une surface applicable prennent ici la forme très simple :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial u}{\partial \alpha} \frac{\partial u}{\partial \beta} \frac{\partial}{\partial u} \log \Omega - \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial v}{\partial \alpha} \frac{\partial v}{\partial \beta} \frac{\partial}{\partial v} \log \Omega = 0;$$

on en tire facilement en intégrant

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} \frac{\partial v}{\partial \alpha} = \frac{\partial u}{\partial \beta} \frac{\partial v}{\partial \beta} = \Omega.$$

Si l'on pose

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial \alpha}}{\frac{\partial \beta}{\partial \alpha}} = \frac{\frac{\partial u}{\partial v}}{\frac{\partial v}{\partial \alpha}} = \lambda,$$

la quantité λ satisfait à l'équation

$$(1) \quad \frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial \alpha \partial \beta} = \lambda \frac{\partial^2 \Omega}{\partial u^2} - \frac{1}{\lambda} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial v^2}.$$

Dans le cas où la quadrique donnée est une *sphère*, une *surface de révolution* ou un *paraboloïde quelconque*, les quantités

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial u^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \Omega}{\partial v^2}$$

se réduisent à des constantes, et l'équation (1) devient l'équation bien connue des surfaces à courbure totale constante ; on en déduit facilement une méthode pour ramener la déformation d'une quelconque de ces surfaces à celle de la sphère.

Si la quadrique donnée est un paraboloïde à plan directeur isotrope, l'équation (1) se réduit à celle des surfaces minima ; dans le cas d'un paraboloïde de révolution, elle s'intègre immédiatement.

SÉANCE DU 17 JUILLET 1901.

PRESIDENCE DE M. TOUCHÉ.

Le Comité de publication des *Œuvres de Brioschi* fait hommage à la Société du Tome I de ces œuvres.

MÉMOIRES.

SUR L'INTÉGRATION DE CERTAINS SYSTÈMES DE PFAFF
DE CARACTÈRE DEUX:

Par M. ÉLIE CARTAN.

Dans un Mémoire inséré tout récemment dans les *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, j'ai étudié la question de l'existence des intégrales d'un système d'équations aux différentielles totales quelconques. J'ai montré en particulier que, en ce qui concerne les intégrales non singulières, la dimension maxima de l'intégrale et la nature de son indétermination étaient fournies complètement par l'étude purement géométrique d'un certain système de complexes linéaires dans un espace à un nombre convenable de dimensions. On est ainsi conduit à une série de n entiers, n désignant la dimension maxima de l'intégrale du système,

$$s_1, s_2, \dots, s_n,$$

dont le premier a déjà été introduit par M. E. von Weber dans un Mémoire cité plus loin et qu'il a nommé le *caractère* du système. Ces entiers ne vont pas en croissant; de plus, en formulant d'une manière convenable le problème de la détermination des intégrales, j'ai montré que l'intégrale générale dépendait de

s_n fonctions arbitraires de n arguments,

s_{n-1}	"	$n-1$	"
....	...		...
s_1	"	1	"

et enfin de s constantes arbitraires, s désignant le nombre des équations du système.

Le cas où le caractère s_1 est égal à l'unité comprend comme cas particulier le système formé d'une seule équation de Pfaff et a fait l'objet du Mémoire dont j'ai déjà parlé de M. von Weber.

Je m'occupe, dans ce présent Mémoire, des systèmes de caractère *deux* qui comprennent comme cas particuliers les systèmes formés de deux équations de Pfaff, et aussi les systèmes auxquels

sont équivalentes les équations aux dérivées partielles du second ordre à une fonction inconnue de deux variables indépendantes ⁽¹⁾. Mais en réalité je ne traite que le cas de certains systèmes de caractère *deux* que je qualifie de *systèmes singuliers* pour la raison suivante. En général, si les coefficients d'un système de Pfaff sont des fonctions quelconques des variables, les $n - 1$ caractères $s_1, s_2, \dots, s_{n-1}$ sont tous égaux entre eux et égaux au nombre s des équations du système. Pour un système de caractère *deux* à coefficients non particuliers, on a donc

$$s_2 = s_3 = \dots = s_{n-1} = 2,$$

s_n pouvant avoir l'une des trois valeurs 0, 1, 2. Les systèmes que j'appelle singuliers sont ceux pour lesquels s_{n-1} est inférieur à 2. Il faut ajouter une autre restriction : c'est que l'intégrale générale n'est pas engendrée par des caractéristiques analogues à celles des équations aux dérivées partielles du premier ordre, caractéristiques que j'étudie complètement dans le Mémoire précité; cette restriction n'en est d'ailleurs en réalité pas une, car tout système engendré par des caractéristiques de cette nature se ramène facilement à un système sans caractéristiques.

Le résultat fondamental obtenu dans ce Travail est que ces *systèmes singuliers s'intègrent par des équations différentielles ordinaires*. Mais, chemin faisant, la suite des raisonnements m'a conduit à introduire la notion de système *systatique*; j'appelle ainsi un système jouissant de la propriété que toutes les intégrales qui passent par un point donné et admettent en ce point une tangente donnée admettent en ce point une deuxième tangente commune. La notion de ce que j'appelle les *caractéristiques de Monge* se présente aussi tout naturellement; comme les caractéristiques dont j'ai parlé précédemment, elles engendrent les intégrales générales : par chaque point d'une intégrale générale il en passe une, et une seule; mais elles dépendent dans leur ensemble de fonctions arbitraires, c'est-à-dire que par tout point de l'espace il en passe une infinité; les caractéristiques dont il est question plus haut, au contraire, ou *caractéris-*

(1) Et aussi certains systèmes qui en sont une généralisation immédiate et dont s'occupe M. von Weber dans un Mémoire intitulé : *Ueber gewisse Systeme Pfaff'scher Gleichungen* (Munch. Sitzungsber., L. XXX, p. 433-441; 1895).

et, par suite, transformant un élément linéaire

$$(x_1, x_2, \dots, x_r, dx_1, \dots, dx_r)$$

en un élément linéaire

$$(y_1, y_2, \dots, y_r, dy_1, \dots, dy_r)$$

on obtient

$$\omega_p = b_{p1} dy_1 + b_{p2} dy_2 + \dots + b_{pr} dy_r + \pi_p,$$

et l'on a alors, par le même changement de variables,

$$\omega'_p = \pi'_p.$$

Les propriétés des éléments intégraux subsistent encore si l'on substitue au système (1) un système linéairement équivalent

$$\Omega_p = \lambda_{p1} \omega_1 + \lambda_{p2} \omega_2 + \dots + \lambda_{ps} \omega_s = 0 \quad (p = 1, 2, \dots, s),$$

les λ_{ik} étant des fonctions quelconques de $x_1, x_2, \dots, x_r$ à déterminant non identiquement nul. Il est évident, en effet, qu'un élément *linéaire* intégral ne cesse pas d'être intégral. De plus, *pour les éléments linéaires intégraux*, on vérifie sans peine que l'on a

$$\Omega'_p = \lambda_{p1} \omega'_1 + \lambda_{p2} \omega'_2 + \dots + \lambda_{ps} \omega'_s,$$

de sorte que deux éléments linéaires intégraux en involution ne cessent pas d'être en involution.

Donc, sous quelque forme qu'on mette le système (1) et quelque variable qu'on choisisse, un élément intégral est toujours intégral.

3. Le lieu des éléments linéaires intégraux issus d'un point donné $M(x_1, x_2, \dots, x_r)$ est un élément plan H_{r-s} défini par les équations (1); tout élément intégral issu de M est nécessairement contenu dans H_{r-s} ; mais la réciproque n'est en général pas vraie. Si nous coupons tous les éléments issus de M par une multiplicité plane P à $r-1$ dimensions ne passant pas par M , chaque élément linéaire donne un point et $dx_1, dx_2, \dots, dx_r$ peuvent être regardés comme les coordonnées *homogènes* de ce point dans P ; ce point peut être appelé l'*image* de l'élément linéaire. Le lieu des images des éléments linéaires intégraux issus de M est une multiplicité plane Σ_{r-s-1} à $r-s-1$ dimensions. La condition nécessaire et suffisante pour que deux éléments linéaires intégraux

issus de M soient en involution est que la droite qui joint leurs images appartienne d'abord à ε_{r-s-1} et ensuite à s complexes linéaires définis par les équations (2); les quantités

$$dx_i \delta x_k - dx_k \delta x_i$$

n'étant en effet autre chose que les coordonnées plückériennes de la droite et ces coordonnées étant assujetties à vérifier s relations linéaires (non nécessairement indépendantes).

D'ailleurs, si l'on tient compte de ce que la droite appartient à ε_{r-s-1} , on peut ne laisser dans les équations de ces complexes que les $2r - 2s$ quantités $dx_1, dx_2, \dots, dx_{r-s}; \delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_{r-s}$, si les équations (1) sont résolubles par rapport à $dx_{r-s+1}, \dots, dx_r$, de sorte que tout se ramène à la considération de points d'un espace à $r - s - 1$ dimensions.

4. Ces préliminaires étant posés, au système donné (1) on peut faire correspondre un entier n et un système de n entiers

$$s_1, s_2, \dots, s_n$$

jouissant des propriétés suivantes.

Le lieu des éléments linéaires intégraux en involution avec un élément linéaire intégral arbitraire E_1 est un élément plan à $r - s - s_1$ dimensions H_{r-s-s_1} .

Par un élément intégral arbitraire E_2 contenant E_1 il passe au moins un élément intégral à trois dimensions et le lieu de ces éléments intégraux est un élément plan à $r - s - s_1 - s_2$ dimensions $H_{r-s-s_1-s_2}$ contenu dans H_{r-s-s_1} , ...

Par un élément intégral arbitraire E_{n-1} contenant E_{n-2} il passe au moins un élément intégral à n dimensions et le lieu de ces éléments intégraux, ou encore le lieu des éléments linéaires intégraux en involution avec E_{n-1} , est un élément plan à $r - s - s_1 - \dots - s_{n-1}$ dimensions $H_{r-s-\dots-s_{n-1}}$ contenu dans $H_{r-s-\dots-s_{n-2}}$.

Par un élément intégral arbitraire E_n contenant E_{n-1} il ne passe aucun élément intégral à $n - 1$ dimensions; autrement dit, le lieu des éléments linéaires intégraux en involution avec E_n est l'élément E_n lui-même et l'on a

$$n = r - s - s_1 - \dots - s_{n-1} - s_n.$$

Si l'on s'est arrangé de manière à faire disparaître dans $\omega'_1, \omega'_2, \dots, \omega'_r$ les termes en $dx_{r-s+1}, \dots, dx_r, \partial x_{r-s+1}, \dots, \partial x_r$ et qu'alors ω'_p prenne la forme

$$(4) \quad \omega'_p = \sum_{i,k}^{1, \dots, r-s} A_{pik} (dx_i \partial x_k - dx_k \partial x_i),$$

s_1 est tout simplement le rang de la matrice

$$(5) \quad \begin{vmatrix} \sum_i A_{11i} \partial x_i & \sum_i A_{12i} \partial x_i & \dots & \sum_i A_{1, r-s+1, i} \partial x_i \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_i A_{s1i} \partial x_i & \sum_i A_{s2i} \partial x_i & \dots & \sum_i A_{s, r-s+1, i} \partial x_i \end{vmatrix},$$

où $\partial x_1, \dots, \partial x_{r-s}$ sont des quantités absolument arbitraires.

Cet entier s_1 s'appelle le *caractère* du système d'équations aux différentielles totales donné. Par analogie, $s_2, s_3, \dots, s_n$ sont les 2^e, 3^e, ..., $n^{\text{ième}}$ caractères du système.

5. Voici maintenant quelle est la signification des entiers qui viennent d'être introduits au point de vue de l'existence des multiplicités intégrales du système (1).

Par un point arbitraire M_0 il passe au moins une multiplicité intégrale à une dimension M_1 ; par une multiplicité intégrale arbitraire M_1 il passe au moins une multiplicité intégrale à deux dimensions $M_2, \dots$; par une multiplicité intégrale arbitraire M_{n-1} il passe au moins une multiplicité intégrale à n dimensions M_n ; enfin par une multiplicité intégrale arbitraire M_n il ne passe aucune multiplicité intégrale à $n+1$ dimensions.

D'une manière plus précise, désignons par :

ϱ_0 un point arbitraire;

ϱ_1 une multiplicité arbitraire à $s+1$ dimensions passant par ϱ_0 ;

ϱ_2 une multiplicité arbitraire à $s+s_1+2$ dimensions contenant

$\varrho_1, \dots$;

ϱ_n une multiplicité arbitraire à $s+s_1+\dots+s_{n-1}+n$ dimensions contenant ϱ_{n-1} .

Alors il existe une multiplicité intégrale à n dimensions M_n et

une seule passant par μ_0 , ayant en commun avec μ_1 une multiplicité à une dimension, avec μ_2 une multiplicité à deux dimensions, ..., avec μ_{n-1} une multiplicité à $n-1$ dimensions, et enfin contenue tout entière dans μ_n . De plus, cette multiplicité M_n n'est contenue dans aucune multiplicité intégrale à $n+1$ dimensions (1).

En présentant d'une manière convenable les éléments arbitraires de l'intégrale M_n , on peut dire encore que cette intégrale dépend respectivement de $s_n, s_{n-1}, \dots, s_1$ fonctions arbitraires de $n, n-1, \dots, 1$ arguments et de s constantes arbitraires.

Si s_{n-1} est nul et si, d'une manière générale, s_ν est le premier caractère qui soit nul ($\nu \leq n-1$), la recherche de la multiplicité intégrale M_n déterminée par les multiplicités $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n$ dont il est question plus haut se ramène à la résolution d'un problème analogue à ν variables indépendantes, mais dépendant de $n-\nu$ paramètres arbitraires.

6. Enfin il est un cas où la multiplicité intégrale générale M_n est engendrée par une famille de courbes ou de multiplicités dépendant de constantes arbitraires : c'est celui où par chaque point $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ il passe des éléments intégraux *caractéristiques*, c'est-à-dire engendrés par des éléments linéaires intégraux en involution avec *tous* les éléments linéaires intégraux issus de M . Ces éléments caractéristiques, s'il en existe, sont tous compris dans l'un d'entre eux, et la dimension de cet élément indique la dimension des multiplicités caractéristiques qui engendrent M_n . On obtient ce plus grand élément caractéristique en ajoutant aux équations (1) celles qu'on obtient en annulant tous les mineurs à $s+1$ lignes et $s-1$ colonnes de la matrice (3)

$$(3) \quad \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{ss} \end{array}$$

$$\sum x_{11i} dx_i \quad \sum x_{12i} dx_i \quad \dots \quad \sum x_{1si} dx_i$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$\sum x_{s1i} dx_i \quad \sum x_{s2i} dx_i \quad \dots \quad \sum x_{ssi} dx_i$$

(1) La recherche de l'intégrale M_n déterminée par les conditions énoncées constitue ce que j'ai appelé le *problème de Cauchy*.

ou encore, si les covariants ω' ont été mis sous la forme (4), en ajoutant aux équations (1) les suivantes :

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_i^{1, \dots, r-s} \Lambda_{p1i} dx_i = \sum_i \Lambda_{p2i} dx_i = \dots = \sum_i \Lambda_{p, r-s, i} dx_i = 0 \\ (p = 1, 2, \dots, s). \end{array} \right.$$

Si alors les équations (1) et (6) se réduisent à moins de r indépendantes, elles constituent un système d'équations aux différentielles totales *complètement intégrable* et leur intégrale générale fournit les multiplicités caractéristiques. De plus, si les équations

$$u_1 = a_1, \quad u_2 = a_2, \quad \dots, \quad u_r = a_r,$$

représentent ces multiplicités, on peut, par un changement de variables, faire en sorte que le système (1) ne dépende plus que de $u_1, u_2, \dots, u_{r'}$; de sorte qu'on est ramené à rechercher l'intégrale générale d'un nouveau système à r' variables pour lequel on a d'ailleurs

$$n' = n - r + r',$$

$$s' = s, \quad s'_1 = s_1, \quad s'_2 = s_2, \quad \dots, \quad s'_{n'} = s_{n'} \quad (s'_{n'+1} = \dots = s_n = 0).$$

Ce système formé des équations (1) et (6) s'appelle le *système adjoint* du système donné.

En particulier, la condition nécessaire et suffisante pour que le système donné soit complètement intégrable est que les équations (6) soient des identités, ou encore que tous les déterminants à $s+1$ lignes et $s+1$ colonnes de toutes les matrices,

$$(7) \quad \left| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sr} \\ \alpha_{p1i} & \alpha_{p2i} & \dots & \alpha_{pri} \end{array} \right| \quad (p = 1, 2, \dots, s; \quad i = 1, 2, \dots, r),$$

soient nuls: alors on a

$$s_1 = s_2 = \dots = s_n = 0, \\ r = s + n.$$

II.

LES EXPRESSIONS DIFFÉRENTIELLES SYMBOLIQUES ET LEURS DÉRIVÉES.

7. Nous représenterons le covariant bilinéaire ω' de l'expression de Pfaff

$$(8) \quad \omega = a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + \dots + a_r dx_r$$

sous la forme *symbolique*

$$(9) \quad \omega' = \sum_{i,k} \left(\frac{\partial a_k}{\partial x_i} - \frac{\partial a_i}{\partial x_k} \right) dx_i dx_k = da_1 dx_1 + \dots + da_r dx_r,$$

où les différentielles $dx_1, \dots, dx_r$ sont soumises aux règles de la multiplication *combinatoire* de Grassmann ⁽¹⁾.

Le procédé de dérivation qui permet de passer de ω à ω' peut s'appliquer à des expressions différentielles symboliques de n'importe quel degré. Considérons, pour fixer les idées, une expression différentielle symbolique du second degré

$$(10) \quad \Omega = \sum_{i,k}^{1,\dots,r} a_{ik} dx_i dx_k \quad (a_{ii} = 0, \quad a_{ik} + a_{ki} = 0);$$

les coefficients a_{ik} étant des fonctions quelconques de $x_1, x_2, \dots, x_r$; la *dérivée* de Ω sera, par définition, l'expression différentielle du troisième degré définie par

$$(11) \quad \Omega' = \sum da_{ik} dx_i dx_k + \sum_{i,j,k}^{1,2,\dots,r} \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} - \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial a_{ki}}{\partial x_j} \right) dx_i dx_j dx_k.$$

Cette expression Ω' est un *covariant* de Ω par rapport à tout changement de variables, au même titre que ω' est un covariant de ω ⁽²⁾.

(1) La multiplication est *distributive* et *associative*; de plus, on a

$$dx_i dx_i = 0, \quad dx_i dx_j = -dx_j dx_i, \quad dx_i dx_i = 0.$$

Voir CARTAN, *Sur certaines expressions différentielles et le problème de Pfaff* (Ann. de l'Ec. Norm. sup., 1896, p. 341 et suiv.).

(2) Pour la démonstration, voir CARTAN, *loc. cit.*, p. 341-342.

8. Voici maintenant une proposition très importante et qui nous sera d'un usage fréquent :

Si ω désigne une expression de Pfaff quelconque, ω' son expression dérivée (covariant bilinéaire), l'expression du troisième degré dérivée de ω' est identiquement nulle.

On peut donner de ce théorème une démonstration intuitive fondée sur le caractère de covariance de la dérivée. La dérivée de ω' est, en effet, la somme des dérivées des termes

$$da_1 dx_1, \quad da_2 dx_2, \quad \dots, \quad da_r dx_r;$$

or, prenons le premier de ces termes; si a_1 ne dépend que de x_1 , ce terme est nul et sa dérivée aussi; dans le cas contraire on peut, par un changement de variables, faire en sorte que a_1 et x_1 soient deux des nouvelles variables y_1, y_2 ; mais alors la dérivée de $dy_1 dy_2$ est nulle, puisque tous les coefficients sont constants. Donc les dérivées de tous les termes de ω' sont nulles.

On peut aussi vérifier ce théorème par le calcul; on a, en effet, pour ω'

$$a_{ik} = \frac{\partial a_k}{\partial x_i} - \frac{\partial a_i}{\partial x_k},$$

de sorte que le coefficient de $dx_i dx_j dx_k$ dans l'expression dérivée de ω' est

$$\begin{aligned} & \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial a_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial a_{ki}}{\partial x_j} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial a_i}{\partial x_j} - \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial a_k}{\partial x_j} - \frac{\partial a_j}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial a_i}{\partial x_k} - \frac{\partial a_k}{\partial x_i} \right) \end{aligned}$$

et le développement du second membre montre qu'il est nul.

9. THÉORÈME. — *Si l'expression différentielle du second degré Ω est le produit de deux expressions de Pfaff ω et π , on a*

$$(12) \quad \Omega' = \omega' \pi - \pi' \omega.$$

Si, en effet,

$$\Omega = (a_1 dx_1 + \dots + a_r dx_r)(b_1 dx_1 + \dots + b_r dx_r) = \sum_{i,k} a_i b_k dx_i dx_k.$$

on a

$$\begin{aligned}\Omega' &= \sum_i b_k da_i + a_i db_k + dx_i dx_k \\ &= \sum_i da_i dx_i \sum b_k dx_k - \sum a_i dx_i \sum db_k dx_k,\end{aligned}$$

ce qui démontre le théorème.

THÉOREME. — Si ω désigne une expression différentielle d'un degré quelconque et m un coefficient fonction finie de $x_1, x_2, \dots, x_r$, si enfin on pose

$$\Omega = m\omega,$$

on a

$$(13) \quad \Omega' = m\omega' + dm\omega.$$

La démonstration est évidente.

10. On peut, dans une expression différentielle symbolique ω , introduire, au lieu des r différentielles $dx_1, dx_2, \dots, dx_r$, r combinaisons linéaires à coefficients fonctions quelconques des x , c'est-à-dire r expressions de Pfaff, linéairement indépendantes, soient $\varpi_1, \varpi_2, \dots, \varpi_r$

$$\varpi_i = \lambda_{i1} dx_1 + \lambda_{i2} dx_2 + \dots + \lambda_{ir} dx_r,$$

ces expressions de Pfaff n'étant plus nécessairement des différentielles exactes. Alors l'expression ω devient une expression différentielle en $\varpi_1, \varpi_2, \dots, \varpi_k$, dans laquelle les ϖ sont soumises aux règles de la multiplication combinatoire. Si, par exemple, on a

$$\omega = A_1 \varpi_1 + A_2 \varpi_2 + \dots + A_r \varpi_r,$$

la dérivée de ω se calculera, d'après les théorèmes précédents (form. 13), au moyen de la formule

$$\omega' = dA_1 \varpi_1 + dA_2 \varpi_2 + \dots + dA_r \varpi_r + A_1 \varpi_1 + \dots + A_r \varpi_r;$$

si ω est une expression du second degré

$$\omega = \sum A_{jk} \varpi_j \varpi_k,$$

et les éléments *caractéristiques* sont donnés par les équations

$$(19) \quad \sum_k^{1, \dots, \rho} A_{i1k} \pi_k = \sum_k^{1, \dots, \rho} A_{i2k} \pi_k = \dots = \sum_k^{1, \dots, \rho} A_{i\rho k} \pi_k = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, s).$$

13. Comme application, nous allons donner une nouvelle démonstration du théorème fondamental de la théorie des caractéristiques, à savoir que le *système des équations (1) et (19) est complètement intégrable*.

Nous pouvons toujours, en effet, supposer choisies les ρ expressions π , de manière que les équations (19) se réduisent à

$$\pi_1 = \pi_2 = \dots = \pi_\sigma = 0 \quad (\sigma = \rho),$$

et il s'agit alors de montrer que le système d'équations de Pfaff

$$\omega_1 = \omega_2 = \dots = \omega_s = \dots = \pi_\sigma = 0$$

est complètement intégrable, ou encore que l'on a

$$\omega'_1 = \omega'_2 = \dots = \omega'_s = \pi'_1 = \dots = \pi'_\sigma = 0 \quad (\text{mod } \omega_1, \omega_2, \dots, \pi_\sigma).$$

Pour cela, remarquons d'abord que, par hypothèse, les équations (19) ne doivent pas contenir $\pi_{\sigma+1}, \dots, \pi_\rho$, c'est-à-dire que tous les coefficients

$$A_{ij\sigma+1}, \dots, A_{ij\rho} \quad (i = 1, 2, \dots, s; j = 1, 2, \dots, \rho)$$

sont nuls, ou enfin que dans les seconds membres des formules (17) n'entrent que $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_\sigma$. De plus, les relations (19)

$$\sum_k^{1, \dots, \sigma} A_{i1k} \pi_k = \dots = \sum_k^{1, \dots, \sigma} A_{i\sigma k} \pi_k = 0$$

entraînent avec elles

$$\pi_1 = \pi_2 = \dots = \pi_\sigma = 0.$$

Cela étant, prenons les dérivées des deux membres des congruences (17), en remarquant que les dérivées des expressions

Il en résulte bien les congruences à démontrer

$$\omega'_1 = \omega'_2 = \dots = \omega'_s = \pi'_1 = \dots = \pi'_s = 0 \pmod{\omega_1, \dots, \pi_s}.$$

14. Voici maintenant deux remarques qui nous seront utiles.

Si Ω désigne une expression symbolique du second degré et ω une expression non nulle du premier degré, la congruence

$$\Omega \equiv 0 \pmod{\omega}$$

entraîne l'identité

$$\Omega^2 = \Omega \Omega = 0,$$

car il existe une expression de Pfaff π telle que

$$\Omega = \omega \pi,$$

et alors

$$\Omega^2 = \omega \pi \omega \pi = 0,$$

à cause de la présence de deux facteurs identiques du premier degré.

Plus généralement si $\omega_1, \dots, \omega_p$ désignent p expressions indépendantes du premier degré, la congruence

$$\Omega \equiv 0 \pmod{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_p}$$

entraîne

$$\Omega^{p+1} = 0,$$

car la puissance $(p + 1)$ de toute expression de la forme

$$\omega_1 \pi_1 + \dots + \omega_p \pi_p$$

est une somme de termes dont chacun contient au moins deux facteurs identiques et par suite est nul.

La deuxième remarque est la suivante :

Si $\omega_1, \dots, \omega_p$ désignent p expressions indépendantes du premier degré, la congruence

$$\Omega \equiv 0 \pmod{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_p}$$

est équivalente à l'identité

$$\omega_1 \omega_2 \dots \omega_p \Omega = 0;$$

car si l'on a

$$\Omega = \omega_1 \pi_1 + \omega_2 \pi_2 + \dots + \omega_p \pi_p,$$

chaque terme du produit $\omega_1 \omega_2 \dots \omega_p \Omega$ contient deux facteurs identiques du premier degré; et réciproquement si le produit $\omega_1 \omega_2 \dots \omega_p \Omega$ est identiquement nul, on peut choisir à la place de $dx_1, \dots, dx_r$, r expressions indépendantes de Pfaff parmi lesquelles $\omega_1, \dots, \omega_p$; si alors $\omega_{p+1}, \dots, \omega_r$ sont les $r - p$ autres, tout terme de Ω devra contenir une des expressions $\omega_1, \dots, \omega_p$, sinon on obtiendrait dans le produit $\omega_1 \omega_2 \dots \omega_p \Omega$ un terme *non nul* et irréductible avec un autre terme quelconque du même produit. Cela démontre le théorème.

15. Nous introduirons enfin la définition suivante :

Étant données une expression Ω du second degré et p expressions $\omega_1, \dots, \omega_p$ du premier degré, nous désignerons sous le nom de GENRE de l'expression $\Omega \pmod{\omega_1, \dots, \omega_p}$ le plus petit entier h tel que l'on ait

$$\Omega^{h+1} \equiv 0 \pmod{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_p}.$$

Si $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_p$ sont indépendantes, c'est le plus petit entier satisfaisant à l'identité

$$\omega_1 \omega_2 \dots \omega_p \Omega^{h+1} = 0.$$

D'une manière plus générale, si au lieu d'une seule expression Ω du second degré l'on en a plusieurs

$$\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_q,$$

nous désignerons sous le nom de *genre* du faisceau

$$(23) \quad u_1 \Omega_1 + u_2 \Omega_2 + \dots + u_q \Omega_q$$

par rapport aux modules $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_p$, le genre maximum de l'expression (23), où l'on regarde $u_1, \dots, u_q$ comme des constantes arbitraires. Le genre ne change pas si l'on remplace les Ω par des expressions qui leur soient congrues $\pmod{\omega_1, \dots, \omega_p}$.

Le genre d'un système de Pfaff sera celui du faisceau formé par les covariants bilinéaires de ses premiers membres, les modules étant ces premiers membres eux-mêmes. La condition nécessaire et suffisante pour qu'un système de Pfaff soit complètement intégrable est donc qu'il soit de genre zéro.

où les π sont regardées comme des paramètres *arbitraires*. Ici, ce caractère doit être égal à l'unité, c'est-à-dire que tous les mineurs du deuxième degré de la matrice (2) doivent être identiquement nuls. Supposons, par exemple, que les éléments de la première ligne ne soient pas tous identiquement nuls et qu'en particulier le premier élément

$$\sum \Lambda_{11i} \pi_i$$

ne soit pas identiquement nul. Alors l'identité

$$\sum_i \Lambda_{11i} \pi_i \sum_i \Lambda_{2ki} \pi_i = \sum_i \Lambda_{1ki} \pi_i \sum_i \Lambda_{21i} \pi_i$$

(où les π sont maintenant soumis aux règles ordinaires du calcul algébrique) montre que l'on a, ou bien

$$\begin{aligned} \sum_i \Lambda_{1ki} \pi_i &= l_k \sum_i \Lambda_{11i} \pi_i \\ \sum_i \Lambda_{2ki} \pi_i &= l_k \sum_i \Lambda_{21i} \pi_i \end{aligned} \quad (k = 2, 3, \dots, \rho),$$

ou bien

$$\begin{aligned} \sum_i \Lambda_{21i} \pi_i &= l \sum_i \Lambda_{11i} \pi_i \\ \sum_i \Lambda_{2ki} \pi_i &= l \sum_i \Lambda_{1ki} \pi_i \end{aligned} \quad (k = 2, 3, \dots, \rho),$$

$l_1, l_2, \dots, l_\rho$ désignant des fonctions des x (indépendantes des π). Mais la première hypothèse entraîne

$$\Lambda_{1k1} = 0,$$

ce qui est absurde, parce que $\sum \Lambda_{11i} \pi_i$ serait identiquement nul. Il ne reste donc que la seconde hypothèse. Elle exprime tout simplement la congruence

$$\omega'_2 = l \omega'_1 \pmod{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\rho}.$$

Si donc on prend pour seconde équation du système

$$\bar{\omega}_2 = \omega_2 - l \omega_1 = 0,$$

on a

$$\bar{\omega}_2 = 0 \pmod{\omega_1, \dots, \omega_\rho}.$$

Il en est de même pour les $s - 2$ autres, ce qui démontre le théorème.

Le système

$$\bar{\omega}_2 = \bar{\omega}_3 = \dots = \bar{\omega}_s = 0$$

est dit le système *dérivé* ⁽¹⁾ du système donné. Si

$$u_1 \omega_1 + u_2 \omega_2 + \dots + u_s \omega_s = 0$$

est une équation du système dérivé, on doit avoir

$$u_1 \omega'_1 + u_2 \omega'_2 + \dots + u_s \omega'_s = 0 \quad (\text{mod } \omega_1, \dots, \omega_s),$$

ce qui revient à l'identité

$$(3) \quad \omega_1 \omega_2 \dots \omega_s (u_1 \omega'_1 + \dots + u_s \omega'_s) = 0.$$

Le développement de cette identité conduit à un certain nombre d'équations linéaires en $u_1, u_2, \dots, u_s$, équations qui se réduisent à une seule, si le caractère du système est l'unité, et qui définissent le système dérivé.

IV.

LE COMPLEXE LINÉAIRE ATTACHÉ AU SYSTÈME DE PFAFF.

17. Le seul covariant ω'_i qu'il y ait lieu de considérer définit alors un complexe linéaire que nous allons maintenant étudier.

Soit Π_p ($p = r - s$) l'élément plan lieu des éléments linéaires intégraux. Supposons que σ désigne la dimension du plus grand élément caractéristique ε_σ , σ étant nul s'il n'y a pas d'élément caractéristique. Soit alors E_1 un élément linéaire intégral (situé dans Π_p) et n'appartenant pas à ε_σ ; le lieu des éléments intégraux en involution avec E_1 est un élément plan Π_{p-1} contenant naturellement ε_σ . Pour les éléments contenus dans Π_{p-1} , il existe un élément caractéristique à $\sigma + 1$ dimensions, à savoir le plus petit élément plan $\varepsilon_{\sigma+1}$ contenant à la fois ε_σ et E_1 . Je dis d'abord que Π_{p-1} n'admet pas d'élément caractéristique à plus de $\sigma + 1$ dimensions. Si, en effet, il en existait un à $\sigma + 2$ dimensions, par exemple $\varepsilon_{\sigma+2}$, l'élément plan Π'_{p-1} lieu des éléments

(1) Cette dénomination est due à M. von Weber, *loc. cit.*

intégraux en involution avec un élément linéaire E'_1 non situé dans $\Pi_{\rho-1}$ couperait $\varepsilon_{\sigma+2}$ suivant un élément à $\sigma+1$ dimensions au moins, soit $\varepsilon'_{\sigma+1}$; mais alors $\varepsilon'_{\sigma+1}$ serait caractéristique pour $\Pi_{\rho-1}$ et pour E'_1 et par suite pour le plus petit élément contenant à la fois $\Pi_{\rho-1}$ et E'_1 , c'est-à-dire pour Π_ρ , ce qui est contraire à l'hypothèse.

Donc le plus grand élément caractéristique pour $\Pi_{\rho-1}$ est à $\sigma+1$ dimensions, et c'est $(\varepsilon_\sigma, E_1)$ (*).

Prenons alors dans $\Pi_{\rho-1}$ un élément linéaire E'_1 non situé dans $\varepsilon_{\sigma+1}$; le lieu des éléments linéaires de $\Pi_{\rho-1}$ en involution avec E'_1 est, d'après ce qui précède, un élément $\Pi_{\rho-2}$ et le plus grand élément caractéristique pour $\Pi_{\rho-2}$ est à $\sigma+2$ dimensions, à savoir $(\varepsilon_{\sigma+1}, E'_1)$ ou $(\varepsilon_\sigma, E_1, E'_1)$, que nous désignerons par $\varepsilon_{\sigma+2}$.

On peut continuer ainsi de proche en proche jusqu'à ce qu'on arrive à un élément $\Pi_{\rho-h}$ pour lequel le plus grand élément caractéristique $\varepsilon_{\sigma+h}$ se confond avec $\Pi_{\rho-h}$, ce qui arrivera nécessairement pour une valeur de h donnée par

$$(4) \quad \rho - \sigma = \rho h.$$

L'élément $\Pi_{\rho-h}$ est alors un des éléments intégraux au nombre maximum de dimensions et l'on a

$$(5) \quad \begin{cases} n = \rho - h = \sigma + h, \\ s_1 = s_2 = \dots = s_h = 1, \quad s_{h+1} = \dots = s_n = 0 \quad (\text{si } \sigma \geq 0). \end{cases}$$

18. Convenons d'appeler *élément polaire* d'un élément linéaire intégral donné E_1 le lieu $\Pi_{\rho-1}$ des éléments intégraux en involution avec E_1 ; il résulte de ce qui précède que $\Pi_{\rho-1}$ est élément polaire pour tous les éléments de $\varepsilon_{\sigma+1}$: $(\varepsilon_\sigma, E_1)$. Pour arriver à $\Pi_{\rho-h}$ nous sommes partis, en somme, de h éléments $\varepsilon_{\sigma+1}$ en involution deux à deux et nous avons pris l'intersection de leurs h éléments polaires. Soient

$$(6) \quad \varpi_1 = 0, \quad \varpi_2 = 0, \quad \dots, \quad \varpi_h = 0$$

les équations de ces h éléments. Si l'on tient compte de (6), le covariant ω'_1 doit s'annuler identiquement: on a donc une rela-

(*) Je désignerai par la notation $(E_1, \dots, E_r)$ le plus petit élément contenant à la fois E_1 et E_r .

tion de la forme

$$(7) \quad \omega'_1 \equiv \pi_1 \pi_{h+1} + \pi_2 \pi_{h+2} + \dots + \pi_h \pi_{2h} \pmod{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s},$$

et les $2h$ expressions de Pfaff $\pi_1, \dots, \pi_{2h}$ doivent être indépendantes $(\text{mod } \omega_1, \dots, \omega_s)$, sinon le plus grand élément caractéristique serait à plus de $\rho - 2h$, c'est-à-dire à plus de τ dimensions.

La forme réduite (7) montre que tout élément $H_{\rho-1}$ contenant ε_σ est l'élément polaire d'un élément $\varepsilon_{\sigma+1}$ contenant ε_σ . En effet, soient

$$(8) \quad \frac{\pi_1}{a_1} = \frac{\pi_2}{a_2} = \dots = \frac{\pi_{2h}}{a_{2h}}$$

les équations de l'élément $\varepsilon_{\sigma+1}$, celles de l'élément ε_σ étant

$$\pi_1 = \pi_2 = \dots = \pi_{2h} = 0.$$

L'élément polaire de $\varepsilon_{\sigma+1}$ a alors pour équation

$$(9) \quad a_1 \pi_{h+1} - a_{h+1} \pi_1 - \dots + a_h \pi_{2h} - a_{2h} \pi_h = 0,$$

et cette équation (9) est évidemment l'équation *générale* d'un élément $H_{\rho-1}$ passant par ε_σ .

Nous dirons que deux éléments $H_{\rho-1}, H'_{\rho-1}$ passant par ε_σ sont *conjugués* lorsque les deux éléments $\varepsilon_{\sigma+1}, \varepsilon'_{\sigma+1}$ dont ils sont les éléments polaires sont en involution; alors $H_{\rho-1}$ contient $\varepsilon'_{\sigma+1}$ et $H'_{\rho-1}$ contient $\varepsilon_{\sigma+1}$. *Pour obtenir un élément intégral à n dimensions, il suffit de prendre h éléments $H_{\rho-1}$ contenant ε_σ et conjugués deux à deux; ces h éléments permettent de réduire ω'_1 à la forme (7).*

19. Cherchons à exprimer analytiquement tous les résultats précédents. D'abord pour obtenir l'entier h , on peut chercher le plus grand élément caractéristique ε_σ , et alors

$$h = \frac{\rho - \tau}{2};$$

ou bien encore on peut remarquer, d'après la formule (7), que h est le plus petit entier satisfaisant à la congruence

$$(10) \quad \omega_1^{h+1} \equiv 0 \pmod{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s},$$

ou encore à l'identité

$$(11) \quad \omega_1 \omega_2 \dots \omega_s \omega_1^{h+1} = 0.$$

On voit que l'entier h n'est autre chose que le *genre* du système (n° 13).

On exprimera que l'élément à $\varphi - 1$ dimensions

$$\pi = 0,$$

contient ε_σ , en écrivant que pour cet élément l'entier h est diminué d'une unité, c'est-à-dire que l'on a soit

$$(12) \quad \pi \omega_1^h = 0 \quad (\text{mod } \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s),$$

soit

$$(13) \quad \omega_1 \omega_2 \dots \omega_s \omega_1^h \pi = 0.$$

On exprimera que les deux éléments à $\varphi - 1$ dimensions

$$\pi = 0,$$

$$\pi' = 0,$$

passant par ε_σ sont conjugués, en écrivant que $\pi' = 0$ contient l'élément caractéristique relatif à l'élément $\pi = 0$, c'est-à-dire d'après (12)

$$\omega_1^{h-1} \pi' = 0 \quad (\text{mod } \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s, \pi),$$

ou, ce qui revient au même,

$$(14) \quad \omega_1 \omega_2 \dots \omega_s \omega_1^{h-1} \pi \pi' = 0.$$

V.

INTÉGRATION DES SYSTÈMES DE CARACTÈRE *un*.

20. Il se produit, au point de vue de l'intégration, un fait très remarquable, énoncé et démontré par M. von Weber (1), et qui sépare nettement le cas où le genre h est supérieur à 1 de celui où il est égal à 1.

THÉORÈME. — *Si h est supérieur à l'unité, le système dérivé est complètement intégrable.*

Supposons que

$$(15) \quad \omega_2 = \omega_3 = \dots = \omega_s = 0$$

(1) *Loc. cit.*

soit le système dérivé. On a alors, par définition,

$$\omega'_2 \equiv \omega'_3 \equiv \dots \equiv \omega'_s \equiv 0 \pmod{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s}.$$

Il résulte de là que l'on peut écrire, par exemple,

$$(16) \quad \omega'_2 \equiv \omega_1 \gamma \pmod{\omega_2, \omega_3, \dots, \omega_s},$$

γ étant une combinaison linéaire de $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{2h}$. Si nous prenons les dérivées des deux membres de la congruence (16) en remarquant que la dérivée du premier membre est identiquement nulle, nous obtenons

$$\omega'_1 \gamma - \gamma' \omega_1 \equiv 0 \pmod{\omega_2, \dots, \omega_s; \omega'_2, \dots, \omega'_s},$$

et, *a fortiori*,

$$(17) \quad \omega'_1 \gamma \equiv 0 \pmod{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s}.$$

Cela étant, si γ était indépendant de ω_1 , la congruence (17) entraînerait (n° 14)

$$\omega_1'^2 \equiv 0 \pmod{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s},$$

et le genre h serait au plus égal à l'unité, ce qui est contraire à l'hypothèse. γ ne dépend donc que de ω_1 et, par suite, la congruence (16) se réduit à

$$\omega'_2 \equiv 0 \pmod{\omega_2, \omega_3, \dots, \omega_s}.$$

Le raisonnement fait pour ω_2 est valable pour $\omega_3, \dots, \omega_s$ et l'on arrive finalement aux congruences

$$\omega'_2 \equiv \omega'_3 \equiv \dots \equiv \omega'_s \equiv 0 \pmod{\omega_2, \omega_3, \dots, \omega_s},$$

qui démontrent la proposition.

21. Cela étant, voici comment, dans le cas $h > 1$, on intégrera le système. On commencera par intégrer le système dérivé, ce qui donnera par exemple

$$(18) \quad \gamma_1 = a_1, \quad \gamma_2 = a_2, \quad \dots, \quad \gamma_{s-1} = a_{s-1},$$

les γ désignant $s-1$ fonctions indépendantes des variables et les a désignant des constantes arbitraires. En tenant compte alors de (18), il reste à intégrer une seule équation de Pfaff

$$\omega_1 = 0$$

avec

$$\omega_1'^{h+1} \equiv 0 \pmod{\omega_1},$$

On appliquera la théorie bien connue du problème de Pfaff qui nous est d'ailleurs fournie par les considérations géométriques précédentes. Les équations de Pfaff qui définissent l'élément ε_σ sont complètement intégrables; on en cherchera une intégrale première

$$(19) \quad z_1 = \text{const.}$$

au moyen de l'équation (18)

$$(20) \quad \omega_1 \omega_1'^h dz_1 = 0,$$

z_1 étant une fonction inconnue des variables. Cette intégrale étant trouvée, si l'on tient compte de (19), le genre de l'équation ω_1 est diminué d'une unité; on cherchera une intégrale première $z_2 = \text{const.}$ de l'équation

$$\omega_1 \omega_1'^{h-1} dz_1 dz_2 = 0,$$

et ainsi de suite. On aura de proche en proche h intégrales

$$(21) \quad z_1 = b_1, \quad z_2 = b_2, \quad \dots, \quad z_h = b_h,$$

telles que les h éléments

$$dz_1 = 0, \quad dz_2 = 0, \quad \dots, \quad dz_h = 0$$

contiennent ε_σ et soient conjugués deux à deux. En tenant compte de (21) on aura alors

$$\omega_1' \equiv 0 \pmod{\omega_1},$$

c'est-à-dire que l'équation $\omega_1 \equiv 0$ deviendra complètement intégrable, c'est-à-dire réductible à la forme

$$dz_{h+1} = 0.$$

Autrement dit l'équation $\omega_1 \equiv 0$ pourra s'écrire

$$dz_{h+1} = p_1 dz_1 + p_2 dz_2 + \dots + p_h dz_h = 0,$$

où les $2h+1$ quantités z_i, p_k sont indépendantes.

Finalement, le système donné est réductible à la forme

$$(22) \quad \begin{cases} dy_1 = 0, \\ dy_2 = 0, \\ \dots\dots\dots \\ dy_{s-1} = 0, \\ dz_{h+1} - p_1 dz_1 - \dots - p_h dz_h = 0, \end{cases}$$

où $y_1, \dots, y_{s-1}, z_1, \dots, z_{h+1}, p_1, \dots, p_h$ sont $s + 2h$ variables indépendantes.

On déduit facilement de cette forme l'intégrale générale du système; s'il y a des caractéristiques, on les obtient en égalant à des constantes arbitraires les $s + 2h$ variables y, z, p .

La réduction du système à la forme canonique (22) exige $s + h$ opérations d'ordres

$$s-1, \quad s-2, \quad \dots, \quad 2, \quad 1; \quad 2h-1, \quad 2h-1, \quad \dots, \quad 3, \quad 1.$$

22. *Cas où h est égal à 1.* — Dans ce cas une réduction analogue est en général impossible. Si ρ est supérieur à 2, il y a des caractéristiques à $\rho - 2$ dimensions et n est égal à $\rho - 1$. L'intégrale générale se ramène à des équations différentielles ordinaires. Le moyen le plus simple de procéder est le suivant :

On cherchera une intégrale première des équations des caractéristiques (s'il n'y en a pas, on prendra une fonction quelconque); soit

$$(23) \quad z = \text{const.},$$

elle est fournie par

$$\omega'_1 dz = 0 \quad (\text{mod } \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s)$$

ou encore par

$$(24) \quad \omega_1 \omega_2 \dots \omega_s \omega'_1 dz = 0.$$

En tenant compte alors de (23), le système devient complètement intégrable; il admet s intégrales premières indépendantes fournies par le système complet

$$\omega_1 \omega_2 \dots \omega_s df = 0.$$

Soient

$$z_1 = a_1, \quad z_2 = a_2, \quad \dots, \quad z_s = a_s,$$

Alors cela signifie que le système donné est réductible à la forme

$$(25) \quad \begin{cases} dz_1 - u_1 dz = 0, \\ dz_2 - u_2 dz = 0, \\ \dots\dots\dots \\ dz_s - u_s dz = 0, \end{cases}$$

et il y a $2s + 1 - (s + 2) = s - 1$ relations entre $z, z_1, \dots, z_s, u_1, \dots, u_s$.

Finalement l'intégration du système revient à celle du système d'équations différentielles ordinaires

$$(26) \quad \begin{cases} F_1 \left(z, z_1, \dots, z_s, \frac{dz_1}{dz}, \dots, \frac{dz_s}{dz} \right) = 0, \\ \dots\dots\dots \\ F_{s-1} \left(z, z_1, \dots, z_s, \frac{dz_1}{dz}, \dots, \frac{dz_s}{dz} \right) = 0. \end{cases}$$

On peut se donner arbitrairement une relation entre $z, z_1, \dots, z_s$.

Dans certains cas particuliers, le système est susceptible d'une forme canonique simple; mais, pour ne pas trop sortir de notre sujet, je renverrai sur ce point au Mémoire déjà cité de M. von Weber.

CHAPITRE III.

LES SYSTÈMES DE CARACTÈRE *deux*.

VI.

LE SYSTÈME DÉRIVÉ.

23. Soit

$$(1) \quad \omega_1 - \omega_2 = \dots = \omega_s = 0$$

un système de caractère *deux*. Le système *dérivé* est alors au plus formé de $s - 2$ équations indépendantes. Cherchons d'abord dans quel cas il contiendrait *moins* de $s - 2$ équations, autrement dit dans quel cas les s covariants $\omega'_1, \omega'_2, \dots, \omega'_s$ seraient liés par moins de $s - 2$ relations linéaires (mod $\omega_1, \dots, \omega_s$).

Supposons, pour fixer les idées, que l'on n'ait aucune relation

de la forme

$$(2) \quad u_1 \omega'_1 + u_2 \omega'_2 + u_3 \omega'_3 \equiv 0 \pmod{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s},$$

soit h le genre minimum de l'expression

$$u_1 \omega'_1 + u_2 \omega'_2 + u_3 \omega'_3 \pmod{\omega_1, \dots, \omega_s}.$$

Nous pouvons alors supposer que l'on a

$$(3) \quad \omega_1^{h+1} \equiv 0 \pmod{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s},$$

et pour aucun système de valeurs des u on n'a

$$(u_1 \omega'_1 + u_2 \omega'_2 + u_3 \omega'_3)^h \equiv 0 \pmod{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s}.$$

Cela étant, *supposons d'abord que h est égal à 1*; on peut alors mettre ω'_1 sous la forme

$$(4) \quad \omega'_1 \equiv \pi_1 \pi_2 \pmod{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s},$$

soit

$$(5) \quad \begin{cases} \omega'_2 \equiv \sum_{i,k}^{1, \dots, \rho} a_{ik} \pi_i \pi_k \\ \omega'_3 \equiv \sum_{i,k}^{1, \dots, \rho} b_{ik} \pi_i \pi_k \end{cases} \pmod{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s}.$$

D'après la définition du caractère, tous les déterminants du troisième degré de la matrice

$$(6) \quad \begin{vmatrix} \pi_2 & -\pi_1 & 0 & \dots & 0 \\ \sum a_{1i} \pi_i & \sum a_{2i} \pi_i & \sum a_{3i} \pi_i & \dots & \sum a_{\rho i} \pi_i \\ \sum b_{1i} \pi_i & \sum b_{2i} \pi_i & \sum b_{3i} \pi_i & \dots & \sum b_{\rho i} \pi_i \end{vmatrix}$$

doivent être nuls, quels que soient $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_\rho$. Il résulte en particulier de là que tous les déterminants du second degré de la matrice

$$(7) \quad \begin{vmatrix} \sum a_{3i} \pi_i & \dots & \sum a_{\rho i} \pi_i \\ \sum b_{3i} \pi_i & \dots & \sum b_{\rho i} \pi_i \end{vmatrix}$$

doivent être identiquement nuls. D'après un raisonnement fait

Dans ce cas, si ρ est supérieur à 3, le système admet un élément caractéristique à $\rho - 3$ dimensions.

La réciproque est d'ailleurs évidente, parce qu'alors on peut s'arranger pour avoir des congruences de la forme

$$(11) \quad \begin{cases} \omega'_1 \equiv \overline{m}_1 \overline{m}_2 \\ \omega'_2 \equiv \overline{m}_1 \overline{m}_3 \\ \omega'_3 \equiv \overline{m}_2 \overline{m}_3 \\ \omega'_4 \equiv 0 \\ \dots\dots\dots \\ \omega'_s \equiv 0 \end{cases} \pmod{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s},$$

et l'on a manifestement $s_1 = 2$.

24. Prenons maintenant le cas où h est supérieur à l'unité, et soit

$$(12) \quad \begin{cases} \omega'_1 \equiv \overline{m}_1 \overline{m}_2 + \dots + \overline{m}_{2h-1} \overline{m}_{2h} \\ \omega'_2 \equiv \sum a_{ih} \overline{m}_i \overline{m}_h \\ \omega'_3 \equiv \sum b_{ih} \overline{m}_i \overline{m}_h \end{cases} \pmod{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s},$$

on a alors forcément $\rho > 2h$, sinon l'équation

$$(\omega'_2 - \lambda \omega'_1)^h = 0,$$

équivalente à une équation de degré h en λ , admettrait au moins une racine, ce qui conduirait à une contradiction.

Cela étant, formons la matrice

$$(13) \quad \begin{vmatrix} \overline{m}_2 & -\overline{m}_1 & \dots & \overline{m}_{2h} & -\overline{m}_{2h+1} & 0 & \dots & 0 \\ \sum a_{1i} \overline{m}_i & \sum a_{2i} \overline{m}_i & \dots & \sum a_{2h-1,i} \overline{m}_i & \sum a_{2h,i} \overline{m}_i & \sum a_{2h+1,i} \overline{m}_i & \dots & \sum a_{\rho i} \overline{m}_i \\ \sum b_{1i} \overline{m}_i & \sum b_{2i} \overline{m}_i & \dots & \sum b_{2h-1,i} \overline{m}_i & \sum b_{2h,i} \overline{m}_i & \sum b_{2h+1,i} \overline{m}_i & \dots & \sum b_{\rho i} \overline{m}_i \end{vmatrix}$$

Tous les déterminants du troisième degré de cette matrice doivent être nuls et, par suite, tous les déterminants du second degré de la matrice

$$(14) \quad \begin{vmatrix} \sum a_{2h+1,i} \overline{m}_i & \dots & \sum a_{\rho i} \overline{m}_i \\ \sum b_{2h+1,i} \overline{m}_i & \dots & \sum b_{\rho i} \overline{m}_i \end{vmatrix}$$

En raisonnant comme tout à l'heure, on voit que les éléments de la deuxième ligne de cette matrice ne peuvent pas être proportionnels à ceux de la première, sinon il y aurait un covariant tel que $\omega'_3 - l\omega'_2$ ne dépendant que de $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{2h}$, et, par suite, il existerait un coefficient m tel que

$$(\omega'_3 - l\omega'_2 - m\omega'_1)^h \equiv 0 \pmod{\omega_1, \dots, \omega_{2h}},$$

ce qui est contraire à l'hypothèse.

Il faut donc, comme dans le cas de $h = 1$, que tous les coefficients

$$a_{2h+i, 2h+j}, \quad b_{2h+i, 2h+j}$$

soient nuls et, de plus, par une substitution linéaire convenable effectuée sur les ω , on peut faire en sorte qu'il n'y ait pas de termes en $\omega_{2h+2}, \dots, \omega_p$.

Cela étant, les coefficients

$$b_{1, 2h+1}, \quad b_{2, 2h+1}, \quad \dots, \quad b_{2h, 2h+1}$$

ne sont pas proportionnels aux coefficients

$$a_{1, 2h+1}, \quad a_{2, 2h+1}, \quad \dots, \quad a_{2h, 2h+1},$$

sinon on retomberait sur la première hypothèse. Supposons, par exemple, que l'on ait

$$a_{1, 2h+1} b_{2, 2h+1} - a_{2, 2h+1} b_{1, 2h+1} \neq 0.$$

Prenons dans la matrice (13) le déterminant formé des trois premières colonnes; dans ce déterminant, le coefficient de $\omega_1 \omega_{2h+1}^2$ est précisément la quantité

$$a_{1, 2h+1} b_{2, 2h+1} - a_{2, 2h+1} b_{1, 2h+1};$$

il est donc impossible que ce déterminant soit nul.

Nous voyons donc que, dans le cas où h est supérieur à 1, trois quelconques des covariants $\omega'_1, \omega'_2, \dots, \omega'_s$ sont liés par une relation linéaire, autrement dit que le système dérivé est formé de $s - 2$ équations.

Nous arrivons donc au théorème suivant :

THÉORÈME. — *Le système dérivé d'un système de Pfaff de s équations à variables et de caractère deux est formé de $s - 2$ équations. Il n'y a qu'une exception, lorsque le système admet*

un élément caractéristique à $r - s - 3$ dimensions; alors le système dérivé peut contenir $s - 3$ équations seulement.

25. Cas où le système dérivé est formé de $s - 3$ équations.

— On a dans ce cas les formules (11) déjà écrites

$$(11) \quad \begin{cases} \omega'_1 = m_1 m_2 \\ \omega'_2 = m_1 m_3 \\ \omega'_3 = m_2 m_4 \\ \omega'_4 = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \omega'_s = 0 \end{cases} \pmod{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s}.$$

Si $\varphi = r - s$ est égal à 3, il n'y a pas d'élément caractéristique et la formule

$$r = s + s_1 + \dots + s_n + n$$

montre que l'on a

$$n = 1, \quad s_1 = 2.$$

L'intégrale générale est à une dimension et dépend de deux fonctions arbitraires d'un argument. On peut regarder le système (11) comme un système de s équations différentielles ordinaires à $s + 2$ fonctions inconnues, et l'on peut prendre arbitrairement deux de ces fonctions inconnues.

Si $\varphi = r - s$ est supérieur à 3, il y a des caractéristiques à $\varphi - 3$ dimensions et l'on a

$$n = \varphi - 2, \quad s_1 = 2, \quad s_2 + \dots + s_n = 0.$$

Pour avoir les caractéristiques, on cherchera deux intégrales premières du système qui les détermine et alors, en égalant ces intégrales premières à des constantes arbitraires, le système donné deviendra complètement intégrable. Il suffira de l'intégrer pour avoir par différentiation la dernière intégrale du système des caractéristiques. Cette méthode exige $s + 2$ opérations d'ordre

$$s + 3, \quad s + 2, \quad s, \quad s - 1, \dots, 2, 1;$$

elle permet de mettre le système sous la forme

$$(15) \quad \begin{cases} dz_1 - u_1 dx - v_1 dy = 0, \\ dz_2 - u_2 dx - v_2 dy = 0, \\ \dots\dots\dots \\ dz_s - u_s dx - v_s dy = 0. \end{cases}$$

et il existe $2s - 1$ relations entre $x, y, z_1, \dots, z_s, u_1, \dots, u_s, v_1, \dots, v_s$. Les équations des caractéristiques s'obtiennent, par exemple, en égalant à des constantes $x, y, z_1, \dots, z_s$ et u_1 , si u_1 est indépendant des variables précédentes.

Une fois le système mis sous la forme (15), on est ramené au cas où ρ est égal à 3, c'est-à-dire à des équations différentielles ordinaires.

VII.

LES SYSTÈMES POUR LESQUELS n EST SUPÉRIEUR À $\frac{r-s}{2}$.

26. Nous pouvons maintenant nous borner à étudier le cas général où le système dérivé est formé de $s - 2$ équations, que nous supposerons être

$$(16) \quad \omega_3 - \omega_1 = \dots = \omega_s = 0.$$

Nous allons d'abord démontrer un théorème très important, qui est d'ailleurs valable dans le cas particulier précédemment étudié.

THÉORÈME. — *Si l'intégrale générale d'un système de Pfaff de caractère deux est à n dimensions et si la différence ρ du nombre r des variables et du nombre s des équations est inférieure à $2n$, le système admet des caractéristiques à $2n - \rho$ dimensions au moins.*

Soit, en effet, E_n un élément intégral non singulier à n dimensions; il n'est contenu dans aucun élément intégral à $n + 1$ dimensions. Prenons un élément linéaire intégral E_1 non contenu dans E_n ; le lieu des éléments intégraux en involution avec E_1 est un élément $H_{\rho-2}$ qui coupe E_n suivant un élément à $n - 2$ dimensions au moins; il ne contient d'ailleurs pas E_n tout entier, car l'élément (E_n, E_1) serait intégral, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Il n'y a donc que deux cas possibles; $H_{\rho-2}$ coupe E_n suivant un élément à $n - 1$ ou $n - 2$ dimensions.

Si $H_{\rho-2}$ coupe E_n suivant un élément ε_{n-1} à $n - 1$ dimensions, cet élément intégral ε_{n-1} est en involution avec tous les éléments linéaires contenus dans le plus petit élément E_{n+1} contenant à la fois E_n et E_1 .

Si $H_{\rho-2}$ coupe E_n suivant un élément (intégral) ε_{n-2} à $n-2$ dimensions, par l'élément intégral (ε_{n-2}, E_1) il passe au moins un élément intégral à n dimensions E'_n ; cet élément E'_n ne peut pas avoir avec E_n d'autre élément commun que ε_{n-2} , E'_n étant nécessairement contenu dans $H_{\rho-2}$; par suite, l'élément (E_n, E'_n) est à $n + n - (n-2) = n+2$ dimensions, soit E_{n+2} , et ε_{n-2} est en involution avec tous les éléments linéaires de E_n et de E'_n , c'est-à-dire de E_{n+2} .

Dans les deux cas on trouve donc un élément intégral ε_{n-i} situé dans E_n et un élément non intégral E_{n+i} contenant E_n , tels que ε_{n-i} soit en involution avec tous les éléments linéaires de E_{n+i} ; i a l'une des valeurs 1 ou 2.

27. Supposons, d'une manière générale, que cette propriété ait lieu pour une certaine valeur de i ; si $n+i$ est égal à ρ , $n-i$ est égal à $2n-\rho$ et le théorème est démontré. Si $n+i$ est inférieur à ρ , je dis que la propriété peut être étendue à une valeur de i supérieure.

Prenons, en effet, en dehors de E_{n+i} un élément linéaire intégral non singulier E'_1 et l'élément $H'_{\rho-2}$, lieu des éléments linéaires intégraux en involution avec E'_1 . Si $H'_{\rho-2}$ a avec ε_{n-i} un élément commun à $n-i-1$ dimensions, ε_{n-i-1} , cet élément, contenu dans E_n , est en involution avec tous les éléments linéaires de E_{n+i} et avec E'_1 et, par suite, avec tous les éléments linéaires du plus petit élément E_{n+i+1} contenant à la fois E_{n+i} et E'_1 . Supposons maintenant que $H'_{\rho-2}$ n'ait en commun avec ε_{n-i} qu'un élément ε_{n-i-2} à $n-i-2$ dimensions, alors $H'_{\rho-2}$ n'aura nécessairement en commun avec E_n qu'un élément H_{n-2} à $n-2$ dimensions; de plus, H_{n-2} n'a en commun avec ε_{n-i} que l'élément ε_{n-i-2} , de sorte que le plus petit élément contenant H_{n-2} et ε_{n-i} est à $(n-2) + (n-i) - (n-i-2) = n$ dimensions, c'est-à-dire est précisément E_n . Cela étant, par l'élément intégral (H_{n-2}, E'_1) il passe au moins un élément intégral à n dimensions E''_n , et E''_n n'a en commun avec E_n que H_{n-2} . Je dis que l'élément (E''_n, E_{n+i}) est à $n+i+2$ dimensions. Si, en effet, il n'était qu'à $n+i+1$ dimensions, E''_n aurait en commun avec E_{n+i} un élément à $n+(n+i)-(n+i+1) = n-1$ dimensions, formé par suite de H_{n-2} et d'un élément linéaire E'_1 situé

dans E_{n+i} , mais non dans E_n . Mais alors E_i serait en involution avec ε_{n+i} (comme situé dans E_{n+i}) et avec H_{n-2} (comme faisant partie avec H_{n-2} d'un même élément intégral E''_n); donc E_i serait en involution avec l'élément $(\varepsilon_{n+i}, H_{n-2})$, c'est-à-dire avec E_n ; autrement dit *l'élément (E_n, E_i) à $n+1$ dimensions serait intégral*, ce qui est contraire à l'hypothèse faite sur E_n .

Il résulte donc de ce qui précède que l'élément (E''_n, E_{n+i}) est à $n+i+2$ dimensions, soit E_{n+i+2} . De plus, ε_{n-i-2} est en involution avec tous les éléments linéaires de E''_n (qui est un élément intégral contenant ε_{n-i-2}) et avec tous les éléments linéaires de E_{n+i} (puisque ε_{n-i-2} est contenu dans ε_{n-i}); donc ε_{n-i-2} est en involution avec tous les éléments linéaires de E_{n+i+2} .

La propriété supposée pour i est donc vraie, soit pour $i+1$, soit pour $i+2$.

Il résulte enfin de là que la propriété est vraie pour $i = \rho - n$, c'est-à-dire *qu'il existe au moins un élément intégral $\varepsilon_{2n-\rho}$ en involution avec tous les éléments linéaires intégraux et par suite caractéristique*.

28. On peut encore énoncer ce théorème sous la forme suivante :

Si un système de caractère deux n'admet pas de multiplicités caractéristiques, l'excès ρ du nombre des variables sur le nombre des équations est au moins égal au double $2n$ de la dimension de l'intégrale générale.

Nous supposons dorénavant que les systèmes dont nous nous occupons n'ont pas d'élément caractéristique, et que l'on a par suite

$$\rho < 2n.$$

VIII.

LES SYSTÈMES SYSTATIQUES.

29. Considérons, dans un système sans élément caractéristique, un élément linéaire intégral non singulier E_i ; si tous les éléments intégraux à n dimensions qui contiennent E_i ont en commun un élément à deux ou plus de deux dimensions (contenant E_i)

le système sera dit systatique. On voit quelle est la propriété correspondante des multiplicités intégrales M_n d'un système systatique.

Toutes les intégrales M_n qui passent par un point non singulier, et ont en ce point une même tangente, ont également en commun, en ce point, une multiplicité plane tangente à deux dimensions au moins.

L'hypothèse faite revient encore à la suivante. Dans l'élément plan H_{p-2} , lieu des éléments linéaires intégraux en involution avec E_1 , il y a au moins un autre élément linéaire E'_1 en involution avec tous les éléments linéaires de H_{p-2} , c'est-à-dire qui soit caractéristique pour H_{p-2} .

L'élément ε caractéristique de H_{p-2} est au plus à deux dimensions, car si c'était un élément ε_3 à trois dimensions, un raisonnement identique à celui fait tout à l'heure (nos 26 et 27) prouverait l'existence d'un élément à trois, deux ou une dimension ε_1 en involution avec tous les éléments linéaires intégraux et par suite caractéristique, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Donc, pour un système systatique, tous les éléments linéaires intégraux en involution avec E_1 sont également en involution avec un élément E_2 contenant E_1 , mais ne le sont avec aucun autre élément situé en dehors de E_2 .

30. Désignons (dans l'élément H_p , lieu des éléments linéaires intégraux) par

$$(17) \quad \pi_1 = \pi_2 = 0,$$

les équations de H_{p-2} , et soient

$$(18) \quad \pi_1 = \pi_2 = \gamma_1 = \dots = \gamma_{p-1} = 0,$$

les équations de l'élément E_2 caractéristique pour H_{p-2} .

Soient enfin η_1 et η_2 deux expressions de Pfaff formant avec π_1 , π_2 , γ_1 , ..., γ_{p-1} un système de p expressions indépendantes entre elles et indépendantes de ω_1 , ω_2 , ..., ω_s .

Si dans ω'_1 et ω'_2 l'on introduit les équations (17), ω'_1 et ω'_2 doivent se réduire (mod ω_1 , ..., ω_s) à des formes du second degré

en $\gamma_1, \dots, \gamma_{p-1}$, de sorte que l'on a

$$(19) \quad \begin{cases} \omega'_1 = \alpha_{11}\pi_1\theta_1 + \alpha_{12}\pi_1\theta_2 + \alpha_{21}\pi_2\theta_1 + \alpha_{22}\pi_2\theta_2 + \alpha\pi_1\pi_2 \\ \quad - \pi_1 \sum a_i \gamma_i + \pi_2 \sum a'_i \gamma_i - \sum a_{ik} \gamma_i \gamma_k, \\ \omega'_2 = \beta_{11}\pi_1\theta_1 + \beta_{12}\pi_1\theta_2 + \beta_{21}\pi_2\theta_1 + \beta_{22}\pi_2\theta_2 + \beta\pi_1\pi_2 \\ \quad + \pi_1 \sum b_i \gamma_i + \pi_2 \sum b'_i \gamma_i - \sum b_{ik} \gamma_i \gamma_k. \end{cases}$$

Si, enfin, les équations de E_1 sont

$$\pi_1 = \pi_2 = \gamma_1 = \dots = \gamma_{p-1} = \theta_1 = 0,$$

les deux expressions

$$\alpha_{11}\pi_1 + \alpha_{21}\pi_2, \quad \beta_{11}\pi_1 + \beta_{21}\pi_2$$

sont indépendantes, puisque, égalées à zéro, elles doivent donner Π_{p-2} .

Cela étant, on peut d'abord simplifier les formules (19). Désignons par $\bar{\omega}'_1$ et $\bar{\omega}'_2$ ce que deviennent les seconds membres quand on y annule tous les γ_i ; ce sont des expressions différentielles à quatre variables $\pi_1, \pi_2, \theta_1, \theta_2$ et elles ne se réduisent pas à trois, parce qu'alors le système admettrait un élément caractéristique à une dimension. Déterminons les coefficients u, v de manière que l'on ait

$$(20) \quad (u\bar{\omega}'_1 + v\bar{\omega}'_2)^2 = 0,$$

ce qui donne en $\frac{v}{u}$ une équation du second degré admettant au moins une racine.

Si l'équation (20) admet deux racines inégales, on peut toujours, par une substitution linéaire sur ω_1 et ω_2 , supposer

$$\bar{\omega}'_1^2 = \bar{\omega}'_2^2 = 0.$$

Alors $\bar{\omega}'_1$ est réductible à la forme $\Pi_1 \Pi_2$, soit

$$\bar{\omega}'_1 = (\lambda_1\pi_1 + \lambda_2\pi_2 + \mu_1\theta_1 + \mu_2\theta_2)(\lambda'_1\pi_1 + \lambda'_2\pi_2 + \mu'_1\theta_1 + \mu'_2\theta_2);$$

mais les formules (19) montrent que $\mu_1\mu'_2 - \mu_2\mu'_1$ est nul, et l'on peut, par suite, supposer e

$$\mu_1 = \mu_2 = 0;$$

nous pouvons alors prendre $\lambda_1\pi_1 + \lambda_2\pi_2$ comme nouvelle expression π_1 et $\lambda'_1\pi_1 + \lambda'_2\pi_2 + \mu'_1\theta_1 + \mu'_2\theta_2$ comme nouvelle expres-

sion θ_1 (car si μ'_1 et μ'_2 étaient nuls, il n'y aurait dans ω'_1 ni terme en θ_1 ni terme en θ_2 et α_{11} et α_{21} seraient nuls). Donc on peut supposer

$$\bar{\omega}'_1 = \pi_1 \theta_1;$$

de même

$$\bar{\omega}'_2 = \pi_2 \theta_2.$$

les quatre expressions $\pi_1, \pi_2, \theta_1, \theta_2$ étant nécessairement indépendantes.

Finalement, en prenant $\theta_1 + \sum a_i \gamma_i, \theta_2 + \sum b_i \gamma_i$ comme nouvelles expressions θ_1 et θ_2 , et changeant un peu les notations, il vient

$$(21) \quad \begin{cases} \omega'_1 = \pi_1 \theta_1 + \pi_2 \sum a_i \gamma_i + \sum a_{ik} \gamma_i \gamma_k \\ \omega'_2 = \pi_2 \theta_2 + \pi_1 \sum b_i \gamma_i + \sum b_{ik} \gamma_i \gamma_k \end{cases} \pmod{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s}.$$

Si maintenant l'équation (20) admet une racine double, on peut supposer que c'est $v = 0$; de sorte que l'on a

$$\bar{\omega}'_1{}^2 = \bar{\omega}'_1 \bar{\omega}'_2 = 0;$$

on peut alors, comme tout à l'heure, mettre $\bar{\omega}'_1$ sous la forme

$$\bar{\omega}'_1 = \pi_1 \theta_1,$$

et, par suite, comme on a

$$\bar{\omega}'_1 \bar{\omega}'_2 = \beta_{22} \pi_1 \theta_1 \pi_2 \theta_2 = 0,$$

β_{22} est nul, et l'on a

$$\bar{\omega}'_2 = \pi_1 (\beta_{11} \theta_1 + \beta_{12} \theta_2 + \beta \pi_2) + \beta_{21} \pi_2 \theta_1;$$

β_{21} n'est certainement pas nul, sinon $\bar{\omega}'_1$ et $\bar{\omega}'_2$ ne dépendraient que des trois expressions $\pi_1, \theta_1, \beta_{12} \theta_2 + \beta \pi_2$. En prenant alors $\beta_{21} \pi_2$ pour nouvelle expression π_2 et $\beta_{11} \theta_1 + \beta_{12} \theta_2 + \beta \pi_2$ pour nouvelle expression θ_2 , on arrive à

$$\bar{\omega}'_1 = \pi_1 \theta_1,$$

$$\bar{\omega}'_2 = \pi_1 \theta_2 + \pi_2 \theta_1$$

et, après des modifications évidentes, aux formules

$$(22) \quad \begin{cases} \omega'_1 = \pi_1 \theta_1 + \pi_2 \sum a_i \gamma_i + \sum a_{ik} \gamma_i \gamma_k \\ \omega'_2 = \pi_1 \theta_2 + \pi_2 \sum b_i \gamma_i + \sum b_{ik} \gamma_i \gamma_k \end{cases} \pmod{\omega_1, \dots, \omega_s}.$$

31. Dans les deux cas exprimés par les formules (21) et (22), les seconds membres où l'on fait $\pi_1 = \pi_2 = 0$ ne peuvent pas s'exprimer au moyen de moins de $\rho - 4$ variables; autrement dit, les équations

$$(23) \quad \begin{cases} \sum a_{1i} \gamma_i = \sum a_{2i} \gamma_i = \dots = \sum a_{\rho-4,i} \gamma_i = 0, \\ \sum b_{1i} \gamma_i = \sum b_{2i} \gamma_i = \dots = \sum b_{\rho-4,i} \gamma_i = 0, \end{cases}$$

entraînent

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_{\rho-4} = 0;$$

autrement dit les $2(\rho - 4)$ premiers membres des équations (23) sont liés par $\rho - 4$ relations linéaires.

Cela étant, examinons d'abord le *premier cas* où l'on a les formules (21). Nous allons prendre un élément linéaire intégral arbitraire E_1

$$\frac{\pi_1}{\pi_1^0} = \frac{\pi_2}{\pi_2^0} = \dots = \frac{\gamma_{\rho-4}}{\gamma_{\rho-4}^0} = \frac{\theta_1}{\theta_1^0} = \frac{\theta_2}{\theta_2^0},$$

et exprimer que pour l'élément $H_{\rho-2}$ correspondant il existe un élément caractéristique à deux dimensions.

Les équations de $H_{\rho-2}$ sont

$$(24) \quad \begin{cases} \pi_1^0 \theta_1 - \theta_1^0 \pi_1 - \sum a_i \gamma_i^0 \pi_2 + \pi_2^0 \sum a_i \gamma_i - \sum a_{ik} \gamma_i \gamma_k^0 = 0, \\ \pi_2^0 \theta_2 - \theta_2^0 \pi_2 - \sum b_i \gamma_i^0 \pi_1 + \pi_1^0 \sum b_i \gamma_i - \sum b_{ik} \gamma_i \gamma_k^0 = 0. \end{cases}$$

On peut tirer de ces équations θ_1 et θ_2 en fonction des π et des γ , et en portant alors dans ω'_1 et ω'_2 il vient

$$(25) \quad \begin{cases} \pi_1^0 \omega'_1 = \sum a_i \gamma_i^0 \pi_1 \pi_2 + (\pi_1^0 \pi_2 - \pi_2^0 \pi_1) \sum a_i \gamma_i + \pi_1 \sum a_{ik} \gamma_i \gamma_k^0 + \pi_1^0 \sum a_{ik} \gamma_i \gamma_k \\ \pi_2^0 \omega'_2 = \sum b_i \gamma_i^0 \pi_1 \pi_2 + (\pi_1^0 \pi_2 - \pi_2^0 \pi_1) \sum b_i \gamma_i + \pi_2 \sum b_{ik} \gamma_i \gamma_k^0 + \pi_2^0 \sum b_{ik} \gamma_i \gamma_k \end{cases}$$

On déduit de là les identités

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 \sum a_{1i} \gamma_i + \dots + \lambda_{p-1} \sum a_{p-1,i} \gamma_i = 0, \\ \mu_1 \sum b_{1i} \gamma_i + \dots + \mu_{p-1} \sum b_{p-1,i} \gamma_i = 0, \\ \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_{p-1} a_{p-1} = 0, \\ \mu_1 b_1 + \dots + \mu_{p-1} b_{p-1} = 0. \end{array} \right.$$

Ainsi chaque relation de la forme (27) entraîne les relations (29).

Il résulte de là que les $p - 1$ relations telles que (27) peuvent être partagées en deux groupes; pour celles du premier groupe, tous les μ sont nuls, et pour celles du second groupe, tous les λ sont nuls. On peut toujours, comme nous l'avons vu dans le Chapitre II, mettre l'expression $\sum a_{ik} \gamma_i \gamma_k$ sous la forme

$$\sum a_{ik} \gamma_i \gamma_k = \gamma_1 \gamma_2 + \gamma_3 \gamma_4 + \dots + \gamma_{2x-1} \gamma_{2x},$$

x pouvant d'ailleurs être nul, et de même

$$\sum b_{ik} \gamma_i \gamma_k = \gamma'_1 \gamma'_2 + \dots + \gamma'_{2\beta-1} \gamma'_{2\beta};$$

alors les relations du premier groupe sont au nombre de $p - 1 - 2x$, celles du second groupe au nombre de $p - 1 - 2\beta$ et, par suite,

$$p - 1 = (p - 1 - 2x) + (p - 1 - 2\beta)$$

ou

$$2x + 2\beta = p - 1;$$

il résulte de là que les $2x + 2\beta$ expressions γ_i, γ'_i sont indépendantes et, en tenant compte de (29), on a

$$\omega'_1 = \varpi_1 \theta_1 - \varpi_2 \sum a_{i,j} \gamma_i \gamma_j + \dots + \gamma_{2x-1} \gamma_{2x},$$

$$\omega'_2 = \varpi_2 \theta_2 - \varpi_1 \sum b_{i,j} \gamma'_i \gamma'_j + \dots + \gamma'_{2\beta-1} \gamma'_{2\beta};$$

enfin, en prenant pour nouvelles expressions $\gamma_1, \gamma_2, \dots$, les expressions

$$\gamma_1 + a_2 \varpi_2, \quad \gamma_2 + a_1 \varpi_2, \quad \dots, \quad \gamma_{2x} + a_{2x-1} \varpi_2$$

et de même pour les γ'_i et enfin en changeant les notations, il

vient les formules définitives

$$(30) \quad \begin{cases} \omega'_1 = \pi_1 \pi_2 + \pi_3 \pi_4 + \dots + \pi_{2h-1} \pi_{2h} \\ \omega'_2 = \gamma_1 \gamma_2 + \gamma_3 \gamma_4 + \dots + \gamma_{2h-1} \gamma_{2h} \end{cases} \pmod{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s},$$

où les π et les γ sont $\rho = 2h + 2k$ expressions indépendantes. De plus, on peut toujours s'arranger pour que les équations

$$\pi_1 = \gamma_1 = 0$$

soient les équations d'un élément $H_{\rho-2}$ arbitraire.

32. Examinons maintenant le *second cas* où l'on a les formules (22). En raisonnant comme dans le premier cas, on arrive à la conclusion suivante : *Toute relation de la forme (27)*

$$(27) \quad \begin{cases} \lambda_1 \sum a_{1i} \gamma_i + \dots + \lambda_{\rho-4} \sum a_{\rho-4,i} \gamma_i \\ \quad + \mu_1 \sum b_{1i} \gamma_i + \dots + \mu_{\rho-4} \sum b_{\rho-4,i} \gamma_i = 0 \end{cases}$$

entraîne les relations

$$(31) \quad \begin{cases} \mu_1 \sum a_{1i} \gamma_i + \dots + \mu_{\rho-4} \sum a_{\rho-4,i} \gamma_i = 0, \\ \mu_1 a_1 + \dots + \mu_{\rho-4} a_{\rho-4} = 0, \\ \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_{\rho-4} a_{\rho-4} + \mu_1 b_1 + \dots + \mu_{\rho-4} b_{\rho-4} = 0. \end{cases}$$

Cela étant, supposons que l'on ait

$$\sum a_{ik} \gamma_i \gamma_k = \gamma_1 \gamma_2 + \dots + \gamma_{2x-1} \gamma_{2x};$$

alors la première des équations (31) montre que l'on a

$$\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_{2x} = 0,$$

de sorte que, si l'on considère ces premières équations (31) elles sont au nombre de $\rho - 4 - 2x$ indépendantes *au plus*; elles sont aussi au nombre de $2x$ indépendantes *au moins*; car sinon, parmi les équations (27) il y en aurait *plus de* $\rho - 4 - 2x$ pour lesquelles tous les μ seraient nuls, ce qui est impossible, car pour ces équations on a nécessairement

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{2x} = 0.$$

On voit donc déjà que

$$0 - 4 - 2x \leq 2x, \quad \rho - 4 \geq 4x.$$

Il y a plus. Les expressions $\gamma_{2x+1}, \dots, \gamma_{p-1}$ ne pouvant figurer que dans

$$\sum b_{1i} \gamma_i, \quad \sum b_{2i} \gamma_i, \quad \dots, \quad \sum b_{p-1,i} \gamma_i,$$

ces $p-1$ expressions, lorsqu'on y fait

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_{2x} = 0,$$

sont au nombre de $p-1-2x$ indépendantes; par suite, si l'on ne considère que les $p-1-2x$ dernières, elles sont au nombre de $p-1-4x$ indépendantes *au moins*; par suite, dans les équations (27) il y en a *au plus*

$$p-1-2x-(p-1-4x)=2x$$

indépendantes par rapport aux γ_i , et comme nous avons vu tout à l'heure qu'il y en avait $2x$ indépendantes *au moins*, il en résulte que *parmi les premières équations (31) il y en a exactement $2x$ indépendantes*.

Les $2x$ équations (27) d'où elles résultent peuvent alors être supposées de la forme

$$\begin{aligned} \sum b_{2x+1,i} \gamma_i &= \gamma_1, \\ \sum b_{2x+2,i} \gamma_i &= \gamma_2, \\ &\dots\dots\dots \\ \sum b_{i,2x,i} \gamma_i &= f_{2x}. \end{aligned}$$

Si l'on forme alors

$$\gamma_1 \gamma_{2x+1} + \dots + f_{2x} f_{i,2x},$$

et qu'on retranche cette expression de ω'_2 , on obtient une expression ne dépendant plus que de $\gamma_1, \gamma_{2x}, \gamma_{2x+1}, \dots, \gamma_{p-1}$, et, en changeant au besoin $\gamma_{2x+1}, \dots, \gamma_{2x}$, on peut faire en sorte que l'on ait

$$\left\{ \begin{aligned} \omega'_1 &= m_1 \eta_1 + m_2 \sum a_i \gamma_i = f_1 / f_2 + \dots + \gamma_{2x-1} / f_{2x}, \\ \omega_2 &= m_1 \eta_2 + m_2 \eta_1 + m_2 \sum b_i \gamma_i = f_3 / f_{2x} + \dots + \gamma_{2x} / f_{2x} \\ &\quad + f_{i,2x+1} / f_{2x} + \dots + f_{i,2x} / f_{2x}. \end{aligned} \right.$$

De plus, les relations (31) montrent que l'on a

$$\begin{aligned} a_{2x+1} = a_{2x+2} = \dots = a_{ix} - a_{ix+1} = \dots = a_{p-1} = 0, \\ a_2 + b_{2x+1} = a_1 + b_{2x+2} = \dots = a_{2x} + b_{ix-1} = -a_{2x-1} + b_{ix} = 0; \end{aligned}$$

mais en changeant convenablement $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{2x}$ on peut faire en sorte que

$$b_{2x+1} = \dots = b_{ix} = 0$$

(il suffit de prendre $\gamma_1 + b_{2x+1}\varpi_2, \dots, \gamma_{2x} + b_{ix}\varpi_2$ pour nouvelles expressions γ_i); alors on voit que tous les a deviennent nuls; en changeant ensuite $\gamma_{2x+1}, \dots, \gamma_{p-1}$, on peut annuler tous les b , de sorte que, finalement et en changeant les notations, on arrive aux formules réduites suivantes :

$$(32) \quad \begin{cases} \omega'_1 = \varpi_1\varpi_2 + \dots + \varpi_{2h-1}\varpi_{2h}, \\ \omega'_2 = \varpi_1\gamma_1 + \varpi_2\gamma_2 + \dots + \varpi_{2h}\gamma_{2h} + \theta_1\theta_2 + \dots + \theta_{2h-1}\theta_{2h} \\ \qquad \qquad \qquad (\text{mod } \omega_1, \dots, \omega_s), \end{cases}$$

et l'on voit que l'on peut toujours supposer que les équations

$$\varpi_1 = \gamma_2 = 0$$

représentent l'élément H_{p-2} .

33. En résumé, si le système donné de caractère deux, sans élément caractéristique, est systatique, on se trouve dans l'un des deux cas suivants : ou bien on a

$$(30) \quad \begin{cases} \omega'_1 = \varpi_1\varpi_2 + \dots + \varpi_{2h-1}\varpi_{2h} \\ \omega'_2 = \gamma_1\gamma_2 + \dots + \gamma_{2h-1}\gamma_{2h} \end{cases} \quad (\text{mod } \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s),$$

ou bien on a

$$(32) \quad \begin{cases} \omega'_1 = \varpi_1\varpi_2 + \dots + \varpi_{2h-1}\varpi_{2h}, \\ \omega'_2 = \varpi_1\gamma_1 + \dots + \varpi_{2h}\gamma_{2h} + \theta_1\theta_2 + \dots + \theta_{2h-1}\theta_{2h} \\ \qquad \qquad \qquad (\text{mod } \omega_1, \dots, \omega_s). \end{cases}$$

La réciproque est vraie et je ne m'arrête pas à la démontrer.

34. Voyons maintenant quelles sont, dans chacun de ces deux cas, les valeurs des entiers $n, s_1, s_2, \dots, s_R$.

Prenons d'abord le premier cas (form. 30). Nous pouvons toujours supposer

$$h \leq k,$$

Alors, étant donné un élément linéaire intégral E_1 , le lieu des

éléments intégraux en involution avec E_1 est un élément H_{p-2} , dont les équations peuvent être supposées

$$\pi_1 = \chi_1 = 0.$$

Les conditions pour que deux éléments de H_{p-2} soient en involution sont alors fournies par les deux covariants

$$\bar{\omega}_1' = \pi_3 \pi_4 + \dots + \pi_{2h-1} \pi_{2h},$$

$$\bar{\omega}_2' = \chi_3 \chi_4 + \dots + \chi_{2h-1} \chi_{2h}.$$

Si h est égal à 1, le lieu des éléments de H_{p-2} en involution avec un élément linéaire arbitraire de H_{p-2} est un élément à $p-3$ dimensions, et l'on a, par suite,

$$s_2 = 1;$$

si, au contraire, h est supérieur à 1, ce lieu est à $p-4$ dimensions H_{p-4} , ce qui donne

$$s_2 = 2;$$

en continuant de proche en proche, on voit qu'on a

$$s_1 = s_2 = \dots = s_h = 2; \quad s_{h+1} = \dots = s_k = 1 \quad (\text{si } k > h),$$

et la formule

$$\zeta = s_1 + s_2 + \dots + s_n = n$$

nous donne ici

$$2h + 2k = h + k + n,$$

c'est-à-dire

$$(33) \quad n = h + k, \quad \zeta = 2n.$$

Donc on se trouve dans le cas où le nombre ζ est égal à $2n$, les h premiers caractères sont égaux à 2, les suivants jusqu'au $k^{\text{ième}}$ sont égaux à l'unité

$$n = h + k, \quad s_1 = \dots = s_h = 2, \quad s_{h+1} = \dots = s_k = 1, \quad s_{k+1} = \dots = s_n = 0.$$

Prenons maintenant le second cas, caractérisé par les formules (32); k étant un entier positif ou nul. On peut supposer que les équations de H_{p-2} sont

$$\pi_1 = \chi_2 = 0,$$

de sorte que, pour les éléments situés dans H_{p-2} , on a

$$\omega_1' = \pi_3 \pi_4 + \dots + \pi_{2h-1} \pi_{2h},$$

$$\omega_2' = \pi_1 \chi_3 + \dots + \pi_{2h} \chi_{2h+1} = \theta_1 \theta_2 + \dots + \theta_{2h-1} \theta_{2h};$$

on est ramené à des formules analogues, mais où h est diminué d'une unité. Si h est égal à 1, on a

$$s_1 = 2, \quad s_2 = \dots = s_{h+1} = 1;$$

si, au contraire, h est supérieur à 2, s_2 est égal à 2. D'une manière générale, on voit que l'on a

$$s_1 = s_2 = \dots = s_h = 2, \quad s_{h+1} = \dots = s_{h+k} = 1, \quad s_{h+k+1} = \dots = s_n = 0,$$

et la formule

$$\varphi = s_1 + \dots + s_n = n$$

donne ici

$$\frac{1}{2}h + 2k = 2h + k = n$$

ou

$$(34) \quad n = 2h + k, \quad \varphi = 2n.$$

On arrive donc au résultat suivant :

THÉORÈME. — *Si un système de Pfaff de caractère deux, n'admettant aucun élément caractéristique, est systatique, l'excès φ du nombre des variables sur le nombre des équations du système est égal au double $2n$ de la dimension de l'intégrale générale.*

La réciproque est d'ailleurs vraie, car, si φ est égal à $2n$, l'élément $H_{\varphi-2}$ admet un élément, caractéristique pour $H_{\varphi-2}$, à

$$2n - (\varphi - 2) = 2$$

dimensions au moins, et le système est systatique.

IX.

LES SYSTÈMES SINGULIERS DE CARACTÈRE deux.

35. En général, si les coefficients des équations d'un système de caractère deux ne sont pas particuliers, on a

$$s_1 = s_2 = \dots = s_{n-1} = 2;$$

quant à s_n , il est égal à zéro, un ou deux, suivant le reste de la division de φ par 3

$$\begin{array}{lll} s_n = 0 & \text{si} & \varphi = 3n - 2, \\ s_n = 1 & \text{si} & \varphi = 3n - 1, \\ s_n = 2 & \text{si} & \varphi = 3n; \end{array}$$

n se trouve être ainsi le quotient à une unité près par excès de la division de p par 3.

Nous dirons qu'un système de caractère deux est singulier si l'avant-dernier caractère est plus petit que deux. D'une manière générale, si nous désignons par h le nombre des caractères égaux à deux, ce nombre h est au plus égal à $n - 2$, si le système est singulier.

Nous ne nous occuperons plus maintenant que des systèmes singuliers sans caractéristiques.

Remarquons que, pour tout système singulier de caractère deux sans caractéristique, n est au moins égal à 3 et, par suite, p est au moins égal à 6.

Recherchons d'abord quels sont les systèmes systatiques singuliers. Si un système systatique n'est pas singulier, on a l'une des trois hypothèses

$$p = 3n - 2, \quad 3n - 1 \quad \text{ou} \quad 3n.$$

Comme d'autre part p est égal à $2n$, cela n'est possible que si n est égal à 2, et dans ce cas d'ailleurs le système n'est certainement pas singulier.

Donc tous les systèmes systatiques sont singuliers pour n au moins égal à 3.

En nous reportant aux formules (30) et (32), on voit que l'un des covariants $u\omega'_1 + v\omega'_2$ est de genre h (ω'_i avec les notations adoptées). On peut remarquer de plus que l'un des covariants $u\omega'_1 + v\omega'_2$ est de genre au moins égal à $h + 2$; il suffit de considérer $\omega'_1 + \omega'_2$ dans la formule (30), ω'_2 dans la formule (32); dans les deux cas le genre est n .

Ce sont ces propriétés que nous allons étendre aux systèmes singuliers non systatiques.

36. Faisons d'abord une remarque générale. Considérons un système non systatique, sans élément caractéristique, et prenons l'élément H_{p-2} lieu des éléments intégraux en involution avec un élément linéaire intégral arbitraire E_1 . Soient

$$\pi_1 = \pi, \quad \pi = 0$$

les équations de H_{p-2} et soient

$$\pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_p = 0$$

celles de E_1 ; soit enfin θ une expression de Pfaff indépendante de $\varpi_1, \varpi_2, \gamma_1, \dots, \gamma_{\rho-3}$ (et de $\omega_1, \dots, \omega_s$). On verra facilement par un raisonnement déjà fait que l'on peut écrire

$$(35) \quad \begin{cases} \omega'_1 \equiv \varpi_1 \theta + \varpi_1 \sum a_i \gamma_i + \varpi_2 \sum a'_i \gamma_i + \sum a_{ik} \gamma_i \gamma_k \\ \omega'_2 \equiv \varpi_2 \theta + \varpi_1 \sum b_i \gamma_i + \varpi_2 \sum b'_i \gamma_i + \sum b_{ik} \gamma_i \gamma_k \end{cases} \pmod{\omega_1, \dots, \omega_s}.$$

Nous désignerons par $\bar{\omega}'_1, \bar{\omega}'_2$ les seconds membres de ces congruences où l'on a fait $\varpi_1 = \varpi_2 = 0$. Les équations

$$\bar{\omega}'_1 = \bar{\omega}'_2 = 0$$

déterminent les éléments intégraux situés dans $H_{\rho-2}$; par hypothèse, ces deux covariants $\bar{\omega}'_1, \bar{\omega}'_2$ ne peuvent pas s'exprimer au moyen de $\rho - 4$ seulement des expressions γ . On peut encore les regarder comme définissant un système d'éléments intégraux dans un élément plan à $\rho - 3$ dimensions, avec

$$h' = h - 1, \quad n' = n - 1;$$

c'est donc encore un système *singulier* d'éléments intégraux.

37. Cela étant, considérons d'abord le cas où le seul caractère s_1 est égal à 2, ρ étant au moins égal à 6. Alors en appliquant les formules (35), les covariants $\bar{\omega}'_1, \bar{\omega}'_2$ définissent un système pour lequel h est nul; donc $\bar{\omega}'_1$, par exemple, est *identiquement nul*. De plus, le genre de $\bar{\omega}'_2$ est au moins égal à 2 (sans quoi $\rho - 3$ serait au plus égal à 2); par suite, le genre de ω'_2 est au moins égal à 3.

Si maintenant le genre de ω'_1 n'était pas égal à 1, il serait manifestement égal à 2, et tout covariant $u\omega'_1 + v\omega'_2$ voisin de ω'_1 serait de genre au moins égal à 3. Par suite, tout élément $H'_{\rho-2}$ voisin de $H_{\rho-2}$ ne pouvant diminuer que de deux unités au plus le genre d'un quelconque des covariants $u\omega'_1 + v\omega'_2$, diminuerait nécessairement de deux unités le genre de ω'_1 . Mais si alors, ce qu'on peut toujours supposer, on a

$$\omega'_1 \equiv \varpi_1 \theta + \varpi_2 \gamma_1 \pmod{\omega_1, \dots, \omega_s}$$

les deux équations de $H'_{\rho-2}$ ne devraient dépendre que de ϖ_1, ϖ_2 ,

$\theta, \gamma_1 \pmod{\omega_1, \dots, \omega_s}$; par suite, ω'_2 ne pourrait contenir que $\omega_1, \omega_2, \theta, \gamma_1$ ⁽¹⁾ et l'on aurait $\rho = 4$, contrairement à l'hypothèse.

Il résulte donc de là que le covariant ω'_1 est de genre 1, le covariant ω'_2 étant de genre au moins égal à 3.

38. Nous allons maintenant démontrer le théorème général suivant :

THÉORÈME. — *Si un système singulier de caractère deux, sans élément caractéristique, possède h caractères et h seulement égaux à 2 ($h \leq n - 2$), l'un des covariants $u\omega'_1 + v\omega'_2$, soit ω'_1 , est de genre h , tandis que pour des valeurs arbitraires de u et de v ce genre est au moins égal à $h + 2$.*

Ce théorème est vrai pour les systèmes systatiques, d'après une remarque faite plus haut. Il est vrai aussi pour les systèmes non systatiques, lorsque h est égal à 1. Supposons-le vrai pour une certaine valeur de h et démontrons-le pour la valeur suivante $h + 1$.

Conservons aux formules (35) leur signification de tout à l'heure; nous supposons, par hypothèse, que $\bar{\omega}'_1$ est de genre h et que $\bar{\omega}'_2$, par exemple, est de genre au moins égal à $h + 2$. Il résulte déjà de là que ω'_2 est de genre au moins égal à $h + 3$, ce qui démontre la dernière partie du théorème.

D'autre part, ω'_1 est de genre au moins égal à $h + 1$. Si ω'_1 était de genre $h + 2$, $\omega'_1 + v\omega'_2$ étant au moins de genre $h + 3$ pour des valeurs suffisamment petites de v et tout élément $H'_{\rho-2}$ suffisamment voisin de $H_{\rho-2}$ devant réduire à h le genre de l'un des covariants $\omega'_1 + v\omega'_2$, il en résulte que, pour un élément $H'_{\rho-2}$ arbitraire, c'est le genre de ω'_1 qui doit être réduit à h . Mais, d'après un raisonnement déjà fait pour $h = 1$, il en résulterait que ρ serait égal à $2h + 4$, ce qui est incompatible avec l'hypothèse faite sur le genre de ω'_2 .

Le théorème est donc démontré dans toute sa généralité.

On peut ajouter qu'il n'y a pas de covariant $u\omega'_1 + v\omega'_2$ dont le genre k soit inférieur à h , parce qu'alors, pour l'élément $H_{\rho-2}$

(1) Au covariant ω_2 correspond une des équations de H_2 ; et cette équation, si H_2 est arbitraire, contient nécessairement toutes les variables dont dépend ω'_1 .

lieu des éléments intégraux en involution avec un élément linéaire intégral arbitraire E_1 , le genre du covariant serait au plus $k - 1$; pour le lieu des éléments en involution avec un élément intégral arbitraire E_2 , il serait au plus égal à $k - 2$ et ainsi de suite, de sorte qu'au bout de k opérations il serait nul et l'on aurait

$$s_{k+1} = 0,$$

ce qui est impossible.

Cette remarque est d'ailleurs valable, que le système soit singulier ou non.

X.

DÉTERMINATION DES CARACTÈRES D'UN SYSTÈME SINGULIER.

39. Voici d'abord comment on peut procéder pour reconnaître si un système donné, n'admettant pas d'élément caractéristique, est singulier ou non.

On déterminera le genre minimum k du covariant $u\omega'_1 + v\omega'_2$, en recherchant successivement si l'un de ces covariants est de genre 1, 2, ... Pour exprimer que $u\omega'_1 + v\omega'_2$ est de genre 1,

$$(u\omega'_1 + v\omega'_2)^2 = 0 \quad (\text{mod } \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s),$$

il y a, par exemple, à écrire que les coefficients de tous les termes

$$\pi_1 \pi_2 \pi_i \pi_j \quad (i, j = 3, \dots, \rho)$$

sont nuls (en supposant que le terme en $\pi_1 \pi_2$ de $u\omega'_1 + v\omega'_2$ ne soit pas nul), ce qui fait $\frac{(\rho-2)(\rho-3)}{2}$ équations du second degré en $\frac{v}{u}$; ces équations devront avoir une racine commune si k est égal à 1; ce qui donne

$$\frac{(\rho-2)(\rho-3)}{2} - 1 = \frac{(\rho-1)(\rho-4)}{2}$$

équation de condition entre les coefficients de ω'_1 et ω'_2 . De même pour exprimer que k est égal à 2, il y a

$$\frac{(\rho-3)(\rho-6)}{2}$$

équation de condition, et ainsi de suite.

Une fois l'entier k trouvé, trois cas peuvent se présenter :

1^o $\rho \leq 3k + 1$; alors le système n'est certainement pas singulier,

car, s'il l'était, k serait égal à h , n serait au moins égal à $k + 2$ et ρ serait au moins égal à $2h + n$, c'est-à-dire à $3k + 2$;

2° $\rho \geq 3k + 3$; alors le système est certainement singulier, car, s'il ne l'était pas, h serait au plus égal à k , et n au plus égal à $h + 1$, de sorte que ρ serait au plus égal à $3k + 2$;

3° $\rho = 3k + 2$; dans ce cas le système peut être singulier, mais il peut aussi ne pas l'être; mais, dans tous les cas, h est égal à k , sinon ρ serait au plus égal à $3k - 1$. Nous verrons plus loin comment on distingue les deux cas l'un de l'autre.

40. La question qui se pose maintenant est la suivante :

Le système étant singulier et connaissant la valeur de k (c'est-à-dire de h), trouver la valeur de l'entier n . Il est clair que, si l'on connaît n , on en déduira les valeurs de tous les caractères; si, en effet, il y a l caractères égaux à l'unité, on aura

$$\rho = 2h + l - n,$$

c'est-à-dire

$$l = \rho - 2h - n.$$

Plus généralement, supposons que nous ayons un système pour lequel on connaît l'entier k et tel que ρ soit au moins égal à $3k$; alors on voit facilement que h est ici égal à k . Cherchons la valeur de n .

Nous supposons que le covariant ω'_1 de genre h puisse s'exprimer au moyen des $2h$ expressions $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{2h}$ indépendantes entre elles (et indépendantes de $\omega_1, \dots, \omega_s$). Considérons alors ω'_2 et supposons qu'en y faisant $\pi_1 = \dots = \pi_{2h} = 0$, le genre de ω'_2 se réduise à β , de sorte que ω'_2 peut alors s'exprimer au moyen de 2β expressions $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{2\beta}$ indépendantes de $\pi_1, \dots, \pi_{2h}$ (β pouvant d'ailleurs être nul). Enfin il se peut que ρ soit supérieur à $2h + 2\beta$, soit

$$\rho = 2h + 2\beta + \alpha;$$

nous désignerons alors par $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_\alpha$, α nouvelles expressions indépendantes des précédentes. Le covariant ω'_2 se présente alors sous la forme

$$\omega_2 = \sum b_{ij} \pi_i \pi_j + \sum c_{ij} \pi_i \theta_j + \sum d_{ij} \pi_i \gamma_j + \sum e_{ij} \pi_i \gamma_j \gamma_k + \dots + \sum f_{ij} \pi_i \gamma_j \gamma_k \gamma_l \gamma_m \dots$$

On peut maintenant s'arranger de manière que tous les d_{ij}

soient nuls en ajoutant à chacune des expressions γ_i une combinaison linéaire convenable des π . De plus, les α coefficients de $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_\alpha$ sont nécessairement des formes linéaires indépendantes de $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{2h}$, sinon ω'_2 ne dépendrait des θ que par l'intermédiaire de moins de α formes indépendantes et il y aurait des éléments caractéristiques. On peut donc supposer que les coefficients de $\theta_1, \dots, \theta_\alpha$ sont précisément $\pi_1, \dots, \pi_\alpha$. Enfin on peut supposer également que dans les coefficients b_{ij} les indices i et j ne prennent que les valeurs $\alpha+1, \dots, 2h$ (en ajoutant à chaque θ une combinaison linéaire convenable des π).

Finalement nous arrivons aux formules suivantes :

$$(36) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega'_1 = \sum_{i,j=1, \dots, 2h} a_{ij} \pi_i \pi_j, \\ \omega'_2 = \sum_{i,j=\alpha+1, \dots, 2h} b_{ij} \pi_i \pi_j + \pi_1 \theta_1 + \dots + \pi_\alpha \theta_\alpha \\ \qquad \qquad \qquad - \gamma_1 \gamma_2 - \dots - \gamma_{2\beta-1} \gamma_{2\beta}. \end{array} \right.$$

Les entiers α et β se trouvent immédiatement une fois qu'on connaît k ; par suite, la réduction (36) est toujours facile à effectuer.

Ces entiers α et β satisfont d'ailleurs aux inégalités

$$(37) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha \leq 2h, \\ \alpha + 2\beta \geq h. \end{array} \right.$$

la dernière résultant de l'hypothèse d'après laquelle ρ est au moins égal à $3h$.

41. Avant de passer à la détermination du nombre n , nous ferons la remarque suivante : Pour tout élément annulant ω'_1 , les $2h$ expressions $\pi_1, \dots, \pi_{2h}$ doivent être liées par *au moins* h relations; autrement dit, tout élément annulant ω'_1 est *au plus* à $\rho - h$ dimensions. De plus, si l'on considère h quelconques (ou un moindre nombre) des expressions $\pi_1, \dots, \pi_{2h}$, *ces h expressions restent indépendantes* pour un élément arbitraire $E_{\rho-h}$ annulant ω'_1 . C'est une proposition que je laisse au lecteur le soin de démontrer.

Cela étant, considérons d'abord le cas où α est inférieur à h . Il est clair que tout élément intégral E_n est contenu dans l'un des

éléments $E_{\rho-h}$ qui annulent ω'_1 . Cherchons d'abord la dimension maxima des éléments intégraux contenus dans un élément $E_{\rho-h}$ arbitraire.

On peut d'abord, d'après la remarque faite plus haut, supposer que les $\alpha < h$ expressions $\varpi_1, \varpi_2, \dots, \varpi_\alpha$ sont indépendantes pour l'élément considéré $E_{\rho-h}$, de sorte que cet élément sera, par exemple, défini en se donnant d'une manière convenable $\varpi_{h+1}, \dots, \varpi_{2h}$ en fonctions linéaires de $\varpi_1, \varpi_2, \dots, \varpi_h$. En substituant dans ω'_2 , on obtient une expression de la forme suivante :

$$(38) \quad \overline{\omega}'_2 = \sum_{i,j}^{\alpha+1, \dots, h} \vartheta_{ij} \varpi_i \varpi_j + \varpi_1 \theta'_1 + \dots + \varpi_\alpha \theta'_\alpha - \gamma_1 \gamma_1 + \dots + \gamma_{2\beta-1} \gamma_{2\beta},$$

où θ'_i se déduit de θ_i par addition d'une combinaison linéaire convenable de $\varpi_1, \dots, \varpi_h$. Soit alors σ le genre de l'expression

$$\sum_{i,j}^{\alpha+1, \dots, h} \vartheta_{ij} \varpi_i \varpi_j;$$

on peut remarquer que l'entier σ satisfait à l'inégalité

$$(39) \quad \sigma \leq \frac{h-\alpha}{2}$$

et aussi, en vertu de la deuxième inégalité (37), à

$$(40) \quad \sigma \leq \beta.$$

Cela étant, le genre de $\overline{\omega}'_2$ est égal à $\sigma + \alpha + \beta$, de sorte qu'il faut au moins $\sigma + \alpha + \beta$ relations entre les ϖ , les θ et les γ pour annuler $\overline{\omega}'_2$. Finalement la dimension maxima des éléments intégraux contenus dans $E_{\rho-h}$ est égale à

$$(41) \quad \rho - h - (\sigma + \alpha + \beta) = h - \beta - \sigma.$$

Je dis maintenant que ce nombre $h + \beta - \sigma$ est précisément égal à n . Remarquons, en effet, que pour un élément intégral arbitraire $E_{h+\beta-\sigma}$, contenu dans l'élément arbitraire $E_{\rho-h}$, les h expressions $\varpi_1, \varpi_2, \dots, \varpi_h$ sont indépendantes, car le nombre $\alpha + 2\sigma$ de celles de ces expressions dont dépend $\overline{\omega}'_2$ est au plus égal au genre $\alpha + \beta - \sigma$ de $\overline{\omega}'_2$, à cause de (40). Par suite, pour l'élément intégral $E_{h+\beta-\sigma}$ les $2h$ expressions $\varpi_1, \dots, \varpi_{2h}$ sont liées

exactement par les h relations qui définissent E_{p-h} . Autrement dit, $E_{h+\beta-\sigma}$ est contenu dans un seul élément E_{p-h} . Par suite, si n était supérieur à $h + \beta - \sigma$, par l'élément intégral $E_{h+\beta-\sigma}$ passerait au moins un élément intégral E_n , et cet élément devrait être contenu dans un élément à $p - h$ dimensions annulant ω'_1 et qui ne pourrait être, par suite, que l'élément donné E_{p-h} . Or, par hypothèse, cet élément E_{p-h} ne contient pas d'élément intégral à plus de $h + \beta - \sigma$ dimensions. On a donc nécessairement

$$(42) \quad n = h + \beta - \sigma.$$

avec les inégalités

$$(43) \quad \beta + \frac{h - \alpha}{2} \leq n \leq \beta + h$$

résultant de (39) et (40).

On a de plus le théorème :

Tout élément intégral E_n est contenu dans un et un seul des éléments E_{p-h} obtenus en annulant le covariant ω'_1 , et réciproquement chacun de ces éléments E_{p-h} contient une infinité d'éléments intégraux E_n , obtenus au moyen du covariant ω'_2 , réduit en tenant compte des relations qui définissent E_{p-h} .

Enfin, la relation fondamentale

$$p = s_1 + s_2 + \dots + s_n = n$$

donne les valeurs suivantes des caractères

$$(44) \quad \begin{cases} s_1 = \dots = s_h = 2, \\ s_{h+1} = \dots = s_{\alpha+\beta-\sigma} = 1, \\ s_{\alpha+\beta-\sigma+1} = \dots = s_{h+\beta-\sigma} = 0, \end{cases}$$

ce qui exige encore les inégalités

$$(45) \quad \sigma \geq h - \alpha - \beta, \quad n \leq \alpha + 2\beta.$$

42. Considérons maintenant le cas où α est supérieur ou égal à h . Le raisonnement est tout à fait analogue. Si l'on considère un élément arbitraire E_{p-h} annulant ω'_1 , on peut supposer que, pour cet élément, les h expressions $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_h$ sont indépendantes. En portant alors dans ω'_2 les valeurs de $\pi_{h+1}, \dots, \pi_{2h}$, il

vient une expression de la forme

$$\varpi'_2 = \varpi_1 \theta'_1 + \dots + \varpi_h \theta'_h + \gamma_1 \gamma_2 + \dots + \gamma_{2\beta-1} \gamma_{2\beta},$$

où θ'_i se déduit de θ_i par addition d'une combinaison linéaire convenable de $\theta_{h+1}, \dots, \theta_\alpha, \varpi_1, \dots, \varpi_h$. Le genre de $\overline{\omega}_2$ est alors égal à $h + \beta$, de sorte que tout élément intégral contenu dans $E_{\rho-h}$ est obtenu par $h + \beta$ relations au moins entre $\varpi_1, \dots, \varpi_h, \theta'_1, \dots, \theta'_h, \gamma_1, \dots, \gamma_{2\beta}$. La dimension maxima des éléments intégraux contenus dans $E_{\rho-h}$ est alors

$$\rho - h - (h + \beta) = \alpha - \beta,$$

et l'on démontre, comme dans le premier cas, que ce nombre représente la valeur de n . Le théorème énoncé dans ce premier cas est encore valable ici, et l'on a facilement les égalités

$$(46) \quad n = \alpha - \beta,$$

$$(47) \quad s_1 = \dots = s_h = 2, \quad s_{h+1} = \dots = s_{h+\beta} = 1, \quad s_{\beta+h+1} = \dots = s_{\beta+\alpha} = 0.$$

43. Ces résultats nous permettent de décider, dans le cas resté douteux où l'on a

$$\rho = 3h + 2$$

si le système est singulier ou non. Si d'abord α est inférieur à h , l'égalité

$$(48) \quad \alpha + 2\beta = h + 2$$

ou

$$h - \alpha = 2(\beta - 1)$$

donne pour σ les inégalités

$$\sigma \leq \beta - 1, \quad \sigma \leq \beta - 2;$$

il n'y a donc pour σ que les deux valeurs possibles $\beta - 2$ et $\beta - 1$; à la première correspond pour n la valeur $h + 2$, à la seconde la valeur $h + 1$. Pour que le système soit singulier, il faut donc que σ soit égal à $\beta - 2$, ce qui exige d'ailleurs $\beta \geq 2$.

Si, au contraire, α est supérieur ou égal à h , on doit avoir $n = h - 2$, c'est-à-dire

$$\alpha - \beta = h - 2,$$

ce qui, joint à (48), donne pour β la valeur zéro. Il faut donc et il suffit que β soit nul.

où les γ et les θ désignent des combinaisons linéaires de $\varpi_1, \dots, \varpi_p, \omega_1, \omega_2$.

Si nous dérivons les deux membres de la première des congruences (2), nous obtenons

$$\omega'_1 \gamma_3 + \omega'_2 \theta_3 - \omega_1 \gamma'_{3,3} - \omega_2 \theta'_{3,3} \equiv 0, \quad (\text{mod } \omega_1, \dots, \omega_s; \omega'_1, \dots, \omega'_s)$$

et, *a fortiori*,

$$(3) \quad \omega'_1 \gamma_3 + \omega'_2 \theta_3 \equiv 0 \quad (\text{mod } \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s).$$

Cela étant, d'abord γ_3 et θ_3 ne peuvent pas être indépendantes entre elles et indépendantes de ω_1, ω_2 ; car, s'il en était ainsi, on aurait en particulier (n° 14)

$$\omega'_2 \theta_3 \gamma_3 \equiv 0 \quad (\text{mod } \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s),$$

ce qui exigerait

$$\omega'_2 \theta_3 \equiv 0 \quad (\text{mod } \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s);$$

le genre de ω'_2 serait donc au plus égal à 2, ce qui est contraire à l'hypothèse d'après laquelle ce genre est au moins égal à $h + 2$.

Si maintenant il y a une relation et une seule entre $\gamma_3, \theta_3, \omega_1, \omega_2$, soit

$$\theta_3 \equiv l \gamma_3 \quad (\text{mod } \omega_1, \omega_2),$$

la congruence (3) entraîne

$$(\omega'_1 + l \omega'_2)^2 \equiv 0 \quad (\text{mod } \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s);$$

l'un au moins des covariants $u \omega'_1 + v \omega'_2$ est donc de genre 1; donc on a nécessairement

$$h = 1;$$

d'ailleurs ce covariant ne peut être que ω'_1 , car si un covariant différent de ω'_1 était aussi de genre 1, ϖ serait au plus égal à 4 et le système ne serait pas singulier. Donc la deuxième hypothèse considérée exige

$$h = 1, \quad l = 0;$$

autrement dit θ_3 dépend linéairement de ω_1 et ω_2 et on voit facilement qu'on peut le supposer nul en changeant au besoin γ_3 . Quant à γ_3 , c'est une combinaison linéaire de ω_2 et des deux expressions ϖ au moyen desquelles peut s'exprimer ω'_1 .

Enfin, supposons que γ_3 et θ_3 dépendent tous les deux de ω_1 et ω_2 et qu'il en soit de même pour $\gamma_4, \theta_4, \dots, \gamma_6, \theta_6$. Pour que

le système dérivé ne soit pas complètement intégrable, il faut que l'un des covariants, par exemple ω'_3 , soit de la forme

$$\omega'_3 = l\omega_1\omega_2 \pmod{\omega_3, \dots, \omega_s};$$

mais alors le système adjoint du système dérivé serait précisément le système donné, et ce système n'est pas complètement intégrable.

45. Nous arrivons donc au théorème suivant :

THÉORÈME. — *Si un système singulier de caractère deux, et sans élément caractéristique, admet un système dérivé non complètement intégrable, le deuxième caractère s_2 est inférieur à deux et l'un des covariants, par exemple ω'_1 , est réductible à la forme $\varpi_1\varpi_2$. De plus, on a des formules telles que*

$$(4) \quad \begin{cases} \omega'_3 = \omega_1\gamma_3 \\ \dots\dots\dots \\ \omega'_s = \omega_1\gamma_s \end{cases} \pmod{\omega_3, \dots, \omega_s},$$

les γ dépendant linéairement de $\varpi_1, \varpi_2, \omega_2$.

On peut ajouter que les équations du système adjoint du système dérivé n'entraînent pas l'équation

$$\omega_2 = 0,$$

car sinon l'on aurait

$$\omega'_2 = 0 \pmod{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s, \varpi_1, \varpi_2},$$

ce qui exigerait

$$\omega'^3_2 = 0 \pmod{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s},$$

contrairement à l'hypothèse, le genre de ω'_2 étant au moins égal à 3.

Par suite, on peut toujours choisir ϖ_1, ϖ_2 de manière que $\gamma_3, \dots, \gamma_s$ ne dépendent que de ϖ_1 et ϖ_2 .

46. Cela étant, remarquons que le système dérivé (1) du système donné est aussi le système dérivé du système

$$(5) \quad \omega_1 = \omega_3 = \dots = \omega_s = 0,$$

et ce dernier système est de caractère un. Il en résulte (n° 20)

que le covariant ω'_1 est de genre 1 (mod $\omega_1, \omega_3, \dots, \omega_s$), sinon le système dérivé serait complètement intégrable.

On a donc encore une congruence de la forme

$$(6) \quad \omega_1 \equiv \overline{m}_1 \overline{m}_2 \pmod{\omega_1, \omega_3, \dots, \omega_{s+1}};$$

il suffit, pour cela, conformément d'ailleurs à ce qui a été fait plus haut, de choisir $\overline{m}_1$ et $\overline{m}_2$ de manière que le système adjoint du système (5) soit

$$(7) \quad \omega_1 - \omega_3 = \dots = \omega_s \equiv \overline{m}_1 : \overline{m}_2 \equiv 0.$$

47. Finalement, si un système de Pfaff singulier de caractère deux, sans élément caractéristique, a un système dérivé non complètement intégrable, on peut trouver $s - 1$ équations du système formant un sous-système de caractère un et admettant des caractéristiques à $r - s - 1$ dimensions.

De plus, d'après les résultats du Chapitre III, tout élément intégral du système donné est situé dans un élément intégral arbitraire du sous-système. Par suite, pour avoir l'intégrale générale du système donné, on prendra une multiplicité intégrale arbitraire M_{r-s} du sous-système

$$(7) \quad \omega_1 = \omega_3 = \dots = \omega_s = 0,$$

et l'on cherchera les multiplicités intégrales de l'équation

$$\omega_2 = 0$$

contenues dans M_{r-s} . Ces multiplicités M_{r-s} dépendent d'une fonction arbitraire d'un argument et sont engendrées par des caractéristiques à $r - s - 1$ dimensions données par les équations complètement intégrables

$$(7) \quad \omega_1 - \omega_3 = \dots = \omega_s \equiv \overline{m}_1 \equiv \overline{m}_2 \equiv 0.$$

48. On peut préciser davantage les propriétés des multiplicités intégrales. Une discussion facile montre que trois cas peuvent se présenter relativement à la forme de ω'_2 ; ils sont caractérisés par les formules suivantes :

$$(8) \quad \begin{cases} \omega'_1 \equiv \overline{m}_1 \overline{m}_2 & \pmod{\omega_1, \omega_3, \dots, \omega_{s+1}} \\ \omega'_2 \equiv \overline{m}_3 \overline{m}_4 + \dots + \overline{m}_{2n-1} \overline{m}_{2n} & \pmod{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \overline{m}_s}, \end{cases}$$

$$(9) \quad \begin{cases} \omega'_1 \equiv \overline{m}_1 \overline{m}_2 & \pmod{\omega_1, \omega_3, \dots, \omega_{s+1}} \\ \omega'_2 \equiv \overline{m}_1 \overline{m}_4 + \overline{m}_2 \overline{m}_3 + \overline{m}_5 \overline{m}_6 + \dots + \overline{m}_{2n-1} \overline{m}_{2n} & \pmod{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{s+1}} \end{cases}$$

et

$$(10) \quad \begin{cases} \omega'_1 = \varpi_1 \varpi_2 & (\text{mod } \omega_1, \omega_3, \dots, \omega_s), \\ \omega'_2 = \varpi_1 \varpi_3 + \varpi_4 \varpi_5 + \dots + \varpi_{2n} \varpi_{2n+1} & (\text{mod } \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s). \end{cases}$$

Dans les trois cas, n désigne la dimension maxima de l'intégrale générale.

Dans le premier cas, la recherche des multiplicités intégrales contenues dans une multiplicité M_{r-s} exige l'intégration d'une équation de Pfaff qui admet des caractéristiques à une dimension

$$\omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = \dots = \omega_{2n} = 0;$$

dans le second cas, il en est de même; seulement, si la relation entre ϖ_1 et ϖ_2 qui caractérise M_{r-s} est

$$\varpi_2 = a \varpi_1,$$

les caractéristiques à une dimension de l'équation de Pfaff qui reste à intégrer sont

$$\omega_2 = \varpi_1 = \varpi_4 + a \varpi_3 = \varpi_5 = \dots = \varpi_{2n} = 0;$$

enfin, dans le troisième cas, l'équation de Pfaff à intégrer n'admet plus de caractéristique.

Les deux premiers cas correspondent à des systèmes systatiques

$$s_1 = 2, \quad s_2 = \dots = s_{n-1} = 1, \quad s_n = 0;$$

le troisième, à un système non systatique

$$s_1 = 2, \quad s_2 = \dots = s_{n-1} = s_n = 1.$$

49. Nous arrivons maintenant à une notion nouvelle : celle de *caractéristiques* d'une nouvelle nature, que nous désignerons sous le nom de *caractéristiques de Monge* pour les distinguer des caractéristiques considérées jusqu'à présent et que nous appellerons dorénavant *caractéristiques de Cauchy*. Ces dernières engendrent les multiplicités intégrales à n dimensions, et par chaque point de l'espace il en passe une, et une seule, de sorte que toutes les multiplicités intégrales M_n qui passent par un point donné ont en commun la caractéristique issue de ce point. *La première propriété seule, d'être des génératrices pour les multiplicités intégrales, se conserve pour les caractéristiques de Monge.*

Considérons une quelconque des multiplicités intégrales de l'un des systèmes dont nous nous occupons.

L'équation de Pfaff

$$(11) \quad \omega_1 = 0$$

est pour cette intégrale une équation aux différentielles totales par rapport aux n variables indépendantes choisies; mais on est sûr d'avance qu'elle entraîne les équations

$$\omega_1 = \omega_2 = \dots = \omega_s = \omega_1 = \omega_2 = 0;$$

or, le système

$$(7) \quad \omega_1 = \omega_2 = \dots = \omega_s = \omega_1 = \omega_2 = 0$$

est déjà par lui-même complètement intégrable quand les r variables primitives sont regardées comme indépendantes; donc, *a fortiori*, sur la multiplicité intégrale considérée M_n la seule équation (11) à laquelle ce système se réduit est-elle complètement intégrable. Par suite, elle définit sur M_n une famille de multiplicités à $n - 1$ dimensions dépendant de n paramètres arbitraires engendrant M_n , et telles que par chaque point de M_n il en passe une, et une seule. Ce sont des *caractéristiques de Monge*. Si l'on change la multiplicité intégrale M_n , ces caractéristiques à $n - 1$ dimensions satisfont toujours au système suivant :

$$(12) \quad \omega_1 = \omega_2 = \dots = \omega_s = \omega_1 = \omega_2 = 0;$$

c'est le système différentiel des caractéristiques. Remarquons que l'on a, pour ce système, suivant les cas,

$$(13) \quad \begin{cases} \omega'_1 \equiv \omega'_3 \equiv \dots \equiv \omega'_s \equiv \omega'_1 \equiv \omega'_2 \equiv 0 \\ \omega'_2 \equiv \omega_3 \omega_4 + \dots + \omega_{2n-1} \omega_{2n} \end{cases} \pmod{\omega_1, \dots, \omega_2},$$

$$(14) \quad \begin{cases} \omega'_1 \equiv \omega'_3 \equiv \dots \equiv \omega'_s \equiv \omega'_1 \equiv \omega'_2 \equiv 0 \\ \omega'_2 \equiv \omega_3 \omega_4 + \dots + \omega_{2n-1} \omega_{2n} \end{cases} \pmod{\omega_1, \dots, \omega_2},$$

$$(15) \quad \begin{cases} \omega'_1 \equiv \omega'_3 \equiv \dots \equiv \omega'_s \equiv \omega'_1 \equiv \omega'_2 \equiv 0 \\ \omega'_2 \equiv \omega_3 \omega_4 + \dots + \omega_{2n} \omega_{2n+1} \end{cases} \pmod{\omega_1, \dots, \omega_2}.$$

Elles sont données par l'intégration d'un système de caractère un . Dans le premier cas, elles dépendent d'une fonction arbitraire de $n - 1$ arguments; dans le second cas, ce sont toutes les multiplicités à $n - 1$ dimensions, situées dans des multiplicités à n dimensions dépendant d'une fonction arbitraire de $n - 2$ arguments et

engendrées par des multiplicités caractéristiques de Cauchy à deux dimensions, à savoir

$$(16) \quad \omega_1 = \omega_2 = \dots = \omega_s = \varpi_1 = \varpi_2 = \varpi_3 = \varpi_6 = \dots = \varpi_{2n} = 0;$$

dans le troisième cas, ce sont encore toutes les multiplicités à $n - 1$ dimensions, situées dans des multiplicités à n dimensions dépendant d'une fonction arbitraire de $n - 1$ arguments et engendrées par des multiplicités caractéristiques de Cauchy à une dimension, à savoir

$$(17) \quad \omega_1 = \omega_2 = \dots = \omega_s = \varpi_1 = \varpi_2 = \varpi_3 = \varpi_5 = \dots = \varpi_{2n+1} = 0.$$

Enfin, dans les trois cas, elles sont situées dans des multiplicités à $r - s - 1$ dimensions dépendant de $s + 1$ constantes arbitraires, à savoir

$$\omega_1 = \omega_3 = \dots = \omega_s = \varpi_1 = \varpi_2 = 0.$$

50. Enfin, dans les deux premiers cas ($\rho = 2n$), il existe aussi des *multiplicités caractéristiques de Monge à une dimension*. Dans le premier cas, défini par les formules (8), ces multiplicités caractéristiques sont définies par les équations

$$\omega_1 = \omega_2 = \dots = \omega_s = \varpi_3 = \varpi_4 = \dots = \varpi_{2n} = 0;$$

elles dépendent d'une fonction arbitraire d'un argument, car on a, par exemple,

$$\omega'_2 = \varpi_1 \varpi_2 \pmod{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s, \varpi_3, \dots, \varpi_{2n}};$$

par chaque point d'une multiplicité intégrale M_n il en passe une et une seule; elle n'est d'ailleurs pas contenue dans la multiplicité caractéristique à $n - 1$ dimensions qui passe par ce point.

Dans le second cas, défini par les formules (9), les caractéristiques à une dimension sont définies par les équations

$$(16) \quad \omega_1 = \omega_2 = \dots = \omega_s = \varpi_1 = \varpi_2 = \varpi_5 = \dots = \varpi_{2n} = 0;$$

elles sont contenues dans les multiplicités caractéristiques à $n - 1$ dimensions; ce sont d'ailleurs toutes les multiplicités à une dimension contenues dans les multiplicités à deux dimensions définies par le système complètement intégrable (16).

III.

LES SYSTÈMES SINGULIERS POUR LESQUELS LE SYSTÈME DÉRIVÉ
EST COMPLÈTEMENT INTÉGRABLE.

31. Si le système dérivé est complètement intégrable, nous pouvons le supposer intégré, de sorte que nous sommes ramenés au cas où le système ne contient que deux équations.

Si h désigne alors le nombre des caractères égaux à 2, on peut supposer que le covariant ω'_1 est de genre $h \pmod{\omega_1, \omega_2}$ avec

$$n = h - 2, \quad 2 \leq 3h + 2;$$

soit

$$(18) \quad \omega'_1 = \sum_{i,j=1, \dots, 2h} a_{ij} \pi_i \pi_j \pmod{\omega_1, \omega_2}.$$

Nous conserverons les notations du Chapitre III (form. 36) et nous supposons choisies les expressions $\pi_1, \dots, \pi_{2h}, \theta_1, \dots, \theta_2, \gamma_1, \dots, \gamma_{2h-1}$ de manière à avoir

$$(19) \quad \begin{cases} \omega'_1 = \sum_{i,j=1, \dots, 2h} a_{ij} \pi_i \pi_j \\ \omega'_2 = \sum_{i,j=1, \dots, 2h} b_{ij} \pi_i \pi_j + \pi_1 \theta_1 + \dots + \pi_{2h} \theta_{2h} \\ \quad + \gamma_1 \gamma_2 + \dots + \gamma_{2h-1} \gamma_{2h} \end{cases} \pmod{\omega_1, \omega_2}.$$

Nous allons d'abord examiner dans quel cas ω'_1 est de genre $h + 1 \pmod{\omega_1}$, c'est-à-dire dans quel cas on a une congruence de la forme

$$(20) \quad \omega'_1 = \sum_{i,j=1, \dots, 2h} a_{ij} \pi_i \pi_j + \omega_2 \psi \pmod{\omega_1},$$

ψ désignant une expression de Pfaff convenablement choisie, indépendante de $\omega_1, \omega_2, \pi_1, \dots, \pi_{2h}$.

Pour qu'une congruence telle que (20) soit possible, il faut d'abord que l'on ait

$$(21) \quad \omega'_2 = 0 \pmod{\omega_1, \omega_2, \pi_1, \dots, \pi_{2h}, \psi},$$

car le système adjoint de l'équation $\omega_1 = 0$ est

$$\omega_1 = \omega_2 = \pi_1 = \dots = \pi_{2h} = \psi = 0.$$

et ce système est complètement intégrable. Mais la congruence (21) n'est évidemment possible que si l'on a

$$\omega_2^2 \equiv 0 \pmod{\omega_1, \omega_2, \overline{m}_1, \dots, \overline{m}_{2h}},$$

c'est-à-dire si l'entier β est nul ou égal à l'unité.

52. 1^o $\beta = 0$. — Si β est nul, on peut évidemment supposer que ψ est une combinaison linéaire de $\theta_1, \dots, \theta_x$; de plus, α est un entier au moins égal à $h + 2$.

En raisonnant comme nous l'avons fait au Chapitre III pour établir les formules (38), nous verrons qu'on peut mettre ω'_1 sous la forme

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega'_1 = \overline{m}_1 \overline{m}_{\alpha+1} + \dots + \overline{m}_\gamma \overline{m}_{\alpha+\gamma} \\ \quad + \overline{m}_{\gamma+1} \overline{m}_{\gamma+2} + \dots + \overline{m}_{x-1} \overline{m}_x \\ \quad + \overline{m}_{x+\gamma-1} \overline{m}_{x+\gamma+2} + \dots + \overline{m}_{2h-1} \overline{m}_{2h} + \overline{m}_2 \psi \end{array} \right. \pmod{\omega_1},$$

en désignant par γ un entier qui peut être nul, mais au plus égal à α et, de plus, de même parité que α .

Cela étant, on aura, en prenant les dérivées des deux membres de la congruence (22),

$$\begin{aligned} \overline{m}'_1 \overline{m}_{\alpha+1} + \dots + \overline{m}'_\gamma \overline{m}_{\alpha+\gamma} - (\overline{m}_1 \overline{m}'_{\alpha+1} + \dots + \overline{m}_\gamma \overline{m}'_{\alpha+\gamma}) \\ + \overline{m}'_{\gamma+1} \overline{m}_{\gamma+2} + \overline{m}'_{\gamma+2} \overline{m}_{\gamma+1} + \dots + \overline{m}'_{x-1} \overline{m}_x + \overline{m}'_x \overline{m}_{x-1} \\ + \overline{m}'_{x+\gamma-1} \overline{m}_{x+\gamma+2} + \dots + \overline{m}'_{2h-1} \overline{m}_{2h} + \omega'_2 \psi' - \omega_2 \psi' \equiv 0 \pmod{\omega_1, \omega'_1}. \end{aligned}$$

Désignons par $\overline{m}'_1, \overline{m}'_2, \dots, \overline{m}'_{2h}$ ce que deviennent $\overline{m}'_1, \overline{m}'_2, \dots, \overline{m}'_{2h}$ lorsqu'on y fait

$$\omega_1 = \omega_2 = \overline{m}_1 = \dots = \overline{m}_{2h} = 0;$$

on a alors l'identité

$$\begin{aligned} \overline{m}'_1 \overline{m}_{\alpha+1} + \dots + \overline{m}'_\gamma \overline{m}_{\alpha+\gamma} - (\overline{m}_1 \overline{m}'_{\alpha+1} + \dots + \overline{m}_\gamma \overline{m}'_{\alpha+\gamma}) \\ + \overline{m}'_{\gamma+1} \overline{m}_{\gamma+2} + \overline{m}'_{\gamma+2} \overline{m}_{\gamma+1} + \dots + \overline{m}'_x \overline{m}_{x-1} \\ + \overline{m}'_{x+\gamma-1} \overline{m}_{x+\gamma+2} + \dots + \overline{m}'_{2h-1} \overline{m}_{2h} + (\overline{m}_1 \theta_1 + \dots + \overline{m}_x \theta_x) \psi = 0. \end{aligned}$$

Par suite, en égalant à zéro les coefficients de $\overline{m}_1, \dots, \overline{m}_{2h}$ dans le premier membre de cette identité, il vient

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} \overline{m}'_1 = \dots = \overline{m}'_\gamma = 0, \\ \overline{m}'_{\gamma+1} = -\theta_{\gamma+2} \psi, \quad \overline{m}'_{\gamma+2} = \theta_{\gamma+1} \psi, \quad \dots, \quad \overline{m}'_x = \theta_{x-1} \psi, \\ \overline{m}'_{x+1} = \theta_1 \psi, \quad \dots, \quad \overline{m}'_{x+\gamma} = \theta_\gamma \psi, \\ \overline{m}'_{x+\gamma+1} = \dots = \overline{m}'_{2h} = 0. \end{array} \right.$$

Enfin, en prenant les dérivées des deux membres de la deuxième congruence (19) et y faisant $\varpi_1 = \dots = \varpi_{2h} = 0$, il vient l'identité

$$(24) \quad -2(\theta_{\gamma+1}\theta_{\gamma+2} + \dots + \theta_{x-1}\theta_x)\psi = 0.$$

Cette identité exige que γ soit égal à $x-2$ ou à x . Mais, d'autre part, on a

$$\gamma \leq x, \quad \gamma = x-2h, \quad x+h+2,$$

et la deuxième de ces inégalités est incompatible avec la troisième si γ est égal à $x-2$ ou à x .

Donc le premier cas est impossible.

§3. 2^o $\beta = 1$. — Dans ce cas, $n = x+1$ est au moins égal à $h+2$. Donc x est au moins égal à $h+1$.

On a toujours la congruence (20), mais ici ψ dépend nécessairement de γ_1, γ_2 et, de plus, en prenant les dérivées des deux membres de cette congruence, on trouve facilement

$$\gamma_1\gamma_2\psi = 0 \pmod{\omega_1, \omega_2, \varpi_1, \dots, \varpi_{2h}},$$

ce qui permet de prendre $\psi = \gamma_1$.

Ici le système peut être mis sous une forme assez simple. Le covariant ω'_1 étant de genre $h+1 \pmod{\omega_1}$, la première équation du système peut toujours s'écrire

$$dz - p_1 dx_1 - p_2 dx_2 - \dots - p_{h+1} dx_{h+1} = 0;$$

de plus, le système adjoint de cette équation étant

$$\omega_1 = \omega_2 = \varpi_1 = \dots = \varpi_{2h} = \psi = 0,$$

le premier membre ω_2 de la seconde équation est une combinaison linéaire de $dz, dx_1, \dots, dp_{h+1}$; par suite, on peut supposer le système mis sous la forme

$$(25) \quad \begin{cases} dz - p_1 dx_1 - \dots - p_{h+1} dx_{h+1} = 0, \\ dp_{h+1} - u_1 dp_1 - \dots - u_h dp_h - v_1 dx_1 - \dots - v_{h+1} dx_{h+1} = 0, \end{cases}$$

et parmi les $2h+1$ fonctions u et v , il y en a $x+1$ indépendantes entre elles et indépendantes des x, z et p ; ou, si l'on préfère, il existe $2h-x$ relations indépendantes entre les $4h+4$ variables x, z, p, u, v .

Cela étant, il est facile de voir que pour toute multiplicité inté-

de ce système

$$\begin{aligned} \overline{m}_1 = \overline{m}_2 = \dots = \overline{m}_h = 0, \\ \theta_{h+1} = a_{h+1} \frac{1}{z}, \quad \dots, \quad \theta_2 = a_2 \frac{1}{z}. \end{aligned}$$

Ces intégrales dépendent de $z - h$ fonctions arbitraires d'un argument. De plus, les caractéristiques dans leur ensemble dépendent de $z + 1 = n$ fonctions arbitraires d'un argument.

Ainsi, les équations (28) définissent des caractéristiques à une dimension; mais, *tandis que les caractéristiques de Cauchy dépendent, dans leur ensemble, seulement de constantes arbitraires, tandis que les caractéristiques de Monge dépendent, dans leur ensemble, de fonctions arbitraires, celles d'entre elles qui sont situées sur une multiplicité intégrale ne dépendant néanmoins que de constantes arbitraires, ici les caractéristiques définies par (28) ne jouissent même plus de cette dernière propriété, celles de ces caractéristiques qui sont situées sur une multiplicité intégrale donnée dépendant de fonctions arbitraires.*

Le système étant mis sous la forme (25), les équations différentielles des caractéristiques sont d'ailleurs

$$(29) \left\{ \begin{aligned} \frac{dx_1}{u_1} &= \frac{dx_2}{u_2} = \dots = \frac{dx_h}{u_h} = \frac{dx_{h+1}}{1} \\ &= \frac{dp_1}{v_1} = \dots = \frac{dp_h}{v_h} = \frac{dp_{h+1}}{v_{h+1}} = \frac{dz}{p_{h+1} + u_1 p_1 + \dots + u_h p_h}; \end{aligned} \right.$$

il suffit, pour s'en rendre compte, de remarquer que l'on a

$$\begin{aligned} \omega'_1 &= (dx_1 - u_1 dx_{h+1})(dp_1 - v_1 dx_{h+1}) + \dots \\ &= (dx_h - u_h dx_{h+1})(dp_h - v_h dx_{h+1}) \pmod{\omega_1, \omega_2}, \end{aligned}$$

§§. Il ne reste plus maintenant qu'à examiner le cas où ω'_1 est de genre $h \pmod{\omega_1}$. Alors, d'après ce qui a été montré au Chapitre III, pour avoir l'intégrale générale il suffira de chercher l'intégrale générale de l'équation

$$\omega_1 = 0,$$

ce qui donne une multiplicité à $r - h - 1$ dimensions et, en portant dans la deuxième équation du système, de chercher l'intégrale la plus générale contenue dans cette multiplicité. *On est ainsi ramené à l'intégration successive de deux équations de Pfaff.*

Il y a ici des caractéristiques de Monge à $n - h$ dimensions.

définies par les équations

$$(28) \quad \omega_1 = \omega_2 = \varpi_1 = \dots = \varpi_{2h} = 0,$$

mais ici l'on a évidemment [d'après (19)]

$$(30) \quad \begin{cases} \omega'_1 = \varpi'_1 = \dots = \varpi'_{2h} = 0 \\ \omega'_2 = \gamma_1 \gamma_2 + \dots + \gamma_{2\beta-1} \gamma_{2\beta} \end{cases} \pmod{\omega_1, \omega_2, \varpi_1, \dots, \varpi_{2h}};$$

ce sont toutes les multiplicités à $n - h$ dimensions contenues dans des multiplicités à $\alpha + \beta$ dimensions, engendrées par des caractéristiques de Cauchy à α dimensions et dépendant d'une fonction arbitraire de β arguments. Sur chaque multiplicité intégrale il y en a une infinité dépendant de h constantes arbitraires.

Dans certains cas il peut y avoir naturellement d'autres caractéristiques que les précédentes; par exemple, sous certaines conditions, le système

$$\omega_1 = \omega_2 = \varpi_1 = \dots = \varpi_{\alpha} = \gamma_1 = \dots = \gamma_{2\beta} = 0$$

peut aussi définir des caractéristiques; mais je laisse de côté ce sujet, qu'il n'est pas dans mon intention de traiter.

§6. En résumé, nous voyons que *les systèmes singuliers de caractère deux n'admettant pas de caractéristiques de Cauchy jouissent tous de la propriété très remarquable que leur intégrale générale peut être obtenue par l'intégration de systèmes d'équations différentielles ordinaires*. Cela ne veut pas dire, bien entendu, que pour ces systèmes le problème de Cauchy puisse être résolu au moyen d'équations différentielles ordinaires; *cette conclusion est néanmoins exacte pour les systèmes singuliers dont le système dérivé n'est pas complètement intégrable*; car, en conservant les notations employées dans l'étude de ce cas, la connaissance d'une multiplicité intégrale à une dimension par laquelle doit passer la multiplicité intégrale cherchée permet de déterminer la fonction arbitraire dont dépend la multiplicité $M_{r-\alpha}$; cette multiplicité étant connue, on est ramené à résoudre le problème de Cauchy pour une seule équation de Pfaff.

REMARQUE SUR LES ZÉROS DES SÉRIES DE TAYLOR;

Par M. MICHEL PETROVITCH.

1. En cherchant une limite supérieure du module d'un déterminant quelconque, dont on connaît des limites supérieures des modules des éléments, M. Hadamard ⁽¹⁾ est arrivé au théorème suivant :

Etant donné le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

si l'on désigne par s_h la somme des carrés des modules des éléments

$$a_{h,1}, a_{h,2}, \dots, a_{h,n}$$

appartenant à la ligne horizontale du rang h , le carré du module de Δ ne saurait jamais surpasser la valeur du produit

$$s_1 s_2 s_3 \dots s_n.$$

Le théorème, convenablement appliqué, conduit à quelques résultats relatifs aux séries de Taylor, que nous allons indiquer.

2. Considérons la série

$$(1) \quad f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

où les coefficients $a_0, a_1, a_2, \dots$ peuvent être réels ou imaginaires, z représentant une variable complexe. Le coefficient a_0 peut toujours être supposé différent de zéro; s'il n'en était pas ainsi, on envisagerait la série obtenue en divisant (1) par z^p , où p est l'ordre du zéro $z = 0$.

⁽¹⁾ Bulletin des Sciences mathématiques, t. XVII, p. 179-182 (1894).

dont les coefficients sont donnés par

$$(12) \quad z_n = \left| \frac{1}{b_n} \right|^{n-1} \sqrt{s_1 s_2 \dots s_{n-1} P_n}.$$

D'après l'inégalité

$$|c_n| = z_n,$$

la série (6) convergera pour toute valeur de y pour laquelle converge la série (11). Or comme on a, pour $n \rightarrow \infty$,

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{z_n}{z_{n+1}} = \frac{|b_n|}{\sqrt{s_n}} \sqrt{\frac{P_n}{P_{n+1}}}, \\ \lim s_n = \sum_0^\infty |b_n|^2 = \sum_0^\infty |a_n t^n|^2, \\ \lim \frac{P_n}{P_{n+1}} = \lim \frac{|b_1|^2 + |b_2|^2 + \dots + |b_n|^2}{|b_1|^2 + |b_2|^2 + \dots + |b_{n+1}|^2} = 1, \end{array} \right.$$

en posant

$$\rho = \lim \frac{z_n}{z_{n+1}},$$

on aura

$$(14) \quad \rho = \frac{|a_0|}{\sqrt{\pi(t)}},$$

avec

$$(15) \quad \pi(t) = \sum_0^\infty |a_n t^n|^2,$$

et la série (15) sera convergente d'après l'inégalité $t < r$. La valeur ρ sera donc différente de zéro, et comme elle représente le rayon de convergence de la série (11), la série (6) convergera aussi dans un cercle de rayon au moins égal à ρ . La fonction $\varphi(y)$ ne saurait donc avoir aucun zéro de module inférieur à ρ . Et comme on a

$$z = ty,$$

la fonction $f(z)$ ne saurait avoir aucun zéro de module inférieur à

$$(16) \quad \lambda = \frac{|a_0 t|}{\sqrt{\pi(t)}},$$

quelle que soit la valeur réelle de t comprise entre 0 et r .

On en tire le résultat suivant :

Si l'on désigne par λ , le plus petit module des zéros de la série

$$(17) \quad a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

et si l'on forme la fonction

$$(18) \quad u(z) = \left| \frac{1}{z^2} \right| \sum_0^{\infty} |a_n| z^{n-2},$$

on aura

$$(19) \quad \lambda = \frac{|a_0|}{\sqrt{u(z)}},$$

quelle que soit la valeur de la variable complexe z à l'intérieur du cercle de convergence de la série (17).

3. Le résultat précédent offre le moyen de calculer des limites inférieures des modules des valeurs annulant une série de Taylor donnée, lorsqu'on se donne la loi des coefficients ou, du moins, les valeurs numériques d'un nombre suffisant de ces coefficients.

A cet effet on donnera à z une valeur quelconque de module inférieur à r et on la remplacera dans le second membre de (19); dans le cas particulier où les coefficients $a_0, a_1, a_2, \dots$ sont tous réels, on prendra pour z une valeur réelle quelconque comprise entre 0 et r . Chacune de ces valeurs, remplacée dans l'expression

$$u = \frac{|a_0|}{\sqrt{u(z)}}$$

conduirait à une limite inférieure des modules des zéros de la série considérée. L'évaluation d'une telle limite se trouve ainsi ramenée au calcul exact ou approché de la somme de la série (18) sous la forme fixée. On peut alors procéder comme ceci :

1° Ou bien calculer la valeur approchée de $u(z)$ et une limite supérieure de l'erreur commise;

2° Ou bien, ce qui est préférable, substituer aux coefficients $|a_n|^2$ de la série (18) d'autres coefficients c_n , choisis de manière qu'on ait

$$c_n = |a_n|^2$$

et que l'on sache calculer la somme de la nouvelle série

$$\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{2n}$$

ainsi obtenue. Il est manifeste, d'après ce qui précède, que si l'on pose

$$\frac{\Phi(z)}{z^2} = v(z)$$

et que l'on attribue à z une valeur réelle quelconque comprise entre 0 et r , la valeur correspondante

$$\mu = \sqrt{\frac{c_0}{v(z)}} = z \sqrt{\frac{c_0}{\Phi(z)}}$$

serait une limite inférieure cherchée.

En attribuant à z diverses valeurs réelles et positives inférieures à r , on aurait diverses valeurs de la limite inférieure μ . Pour qu'une telle limite soit la plus élevée possible, il faut que la valeur correspondante de $v(z)$ soit la plus petite possible. Examinons donc la manière dont variera cette dernière fonction lorsque z croît de 0 jusqu'à r .

Si, pour abréger l'écriture, on entend par z le module de z , on aura

$$\begin{aligned} v(z) &= \frac{c_0}{z^2} + c_1 + \sum_{n=2}^{\infty} c_n z^{2n-2}, \\ \frac{dv}{dz} &= -\frac{2c_0}{z^3} + 2 \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) c_n z^{2n-3}, \\ \frac{d^2v}{dz^2} &= \frac{6c_0}{z^4} + 2 \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)(n-2) c_n z^{2n-4}. \end{aligned}$$

Pour z positif et très petit la dérivée $\frac{dv}{dz}$ sera négative; lorsque z commence à croître à partir de $z=0$, les deux cas suivants peuvent se présenter :

1° Ou bien cette dérivée restera constamment négative dans l'intervalle de $z=0$ à $z=r$ (on reconnaîtra ce cas à ce qu'elle est négative pour $z=r$);

2° Ou bien elle s'annule dans cet intervalle (on le reconnaîtra à ce qu'elle est positive pour $z = r$). L'équation

$$\frac{dv}{dz} = 0$$

ne saurait d'ailleurs avoir plus d'une racine réelle et positive, puisque la dérivée $\frac{d^2v}{dz^2}$ est positive pour une valeur réelle et positive quelconque de z .

Dans le premier cas, la fonction $v(z)$ décroîtra constamment pendant que z varie de 0 à r ; la meilleure valeur à prendre pour z serait donc $z = r$.

Dans le second cas (qui se présentera toujours lorsque r est suffisamment grand) $v(z)$ présente un minimum pour une certaine valeur, $z = \alpha$, comprise entre 0 et r et ce minimum est alors unique. La meilleure valeur à prendre pour z serait, dans ce cas, $z = \alpha$.

Par suite, la plus grande valeur de ρ , donnée par la proposition précédente, sera

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{\frac{c_0}{v(r)}} = r \sqrt{\frac{c_0}{\Phi(r)}}, & \text{si } \left[\frac{dv}{dz} \right]_{z=r} < 0; \\ \rho &= \sqrt{\frac{c_0}{v(\alpha)}} = \alpha \sqrt{\frac{c_0}{\Phi(\alpha)}}, & \text{si } \left[\frac{dv}{dz} \right]_{z=r} > 0. \end{aligned}$$

Une telle limite est toujours inférieure au rayon de convergence r , puisqu'on a $\alpha < r$ et

$$\frac{c_0}{\Phi(\alpha)} < 1$$

pour toute valeur réelle et positive de z .

4. Appliquons ceci à quelques cas spéciaux.

Premier exemple. — Considérons la série

$$a + \frac{z}{\sqrt{1}} + \frac{z^2}{\sqrt{2}} + \frac{z^3}{\sqrt{3}} + \dots$$

(où a est une constante réelle et positive quelconque), ayant $r = 1$

comme rayon de convergence. En faisant

$$c_n = \frac{1}{n}, \quad c_0 = a,$$

on aura

$$v(z) = \frac{1}{z^2} \left(a^2 + \frac{z^2}{1} + \frac{z^4}{2} + \frac{z^6}{3} + \dots \right) = \frac{1}{z^2} [a^2 - \log(1 + z^2)]$$

L'équation $\frac{dv}{dz} = 0$ est ici

$$\frac{z^2}{1 + z^2} + \log(1 + z^2) - a^2 = 0;$$

elle admet une racine $z = \alpha$ comprise entre 0 et 1, et cette racine est unique pour cet intervalle. Une limite inférieure des modules des zéros de la série considérée, comprise dans l'intervalle (0, 1), sera par conséquent donnée par

$$\alpha = \frac{a\alpha}{\sqrt{a^2 - \log(1 + \alpha^2)}}.$$

Remarquons aussi que la valeur

$$z = \sqrt{1 + \frac{1}{a^2}} = 0,795\dots$$

étant comprise à l'intérieur du cercle de convergence de la série donnée, en la remplaçant dans $v(z)$ on trouve que la série ne saurait s'annuler pour aucune valeur de z de module inférieur à

$$0,795 \frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}}.$$

Deuxième exemple. — Considérons la série

$$a + \frac{z}{\sqrt{1}} + \frac{z^2}{\sqrt{1,2}} + \frac{z^3}{\sqrt{1,2,3}} + \dots,$$

convergente dans tout le plan. En faisant

$$c_n = \frac{1}{1,2,\dots,n}, \quad c_0 = a^2,$$

on aura

$$v(z) = \frac{1}{z^2} \left(a^2 + \frac{z^2}{1} + \frac{z^4}{1.2} + \frac{z^6}{1.2.3} + \dots \right) - \frac{1}{z^2} (a^2 - 1 + e^{z^2}).$$

L'équation

$$\frac{dv}{dz} = 0$$

est ici

$$(z^2 - 1)e^{z^2} - a^2 + 1 = 0,$$

et aura une seule racine positive comprise

$$\begin{aligned} &\text{entre } 1 \text{ et } \sqrt{1 + \frac{a^2 - 1}{e}}, \quad \text{si } a > 1; \\ &\text{entre } 0 \text{ et } 1, \quad \text{si } 0 < a < 1. \end{aligned}$$

En désignant cette racine par z , une limite inférieure des modules des zéros de la série (25) sera

$$\frac{az}{\sqrt{a^2 - 1 + e^{z^2}}}.$$

Troisième exemple. — Pour la série

$$a + \frac{z}{\sqrt{1}} + \frac{z^3}{\sqrt{3}} + \frac{z^5}{\sqrt{5}} + \dots,$$

on aura

$$v(z) = \frac{1}{z^2} \left(a^2 + \frac{z^2}{1} + \frac{z^6}{3} + \frac{z^{10}}{5} + \dots \right) = \frac{1}{z^2} \left[a^2 + \frac{1}{2} \log \frac{1 - z^2}{1 - z^2} \right].$$

En faisant par exemple $z = \frac{1}{2}$, laquelle valeur est comprise à l'intérieur du cercle de convergence de la série, on trouve que la valeur

$$\frac{a}{2\sqrt{a^2 + k}},$$

avec

$$k = \frac{1}{2} \log \frac{5}{3} = 0,11092,$$

représente une limite inférieure cherchée.

Quatrième exemple. — Pour la série

$$a + \frac{z^2}{\sqrt{1.2}} + \frac{z^4}{\sqrt{1.2.3.4}} + \frac{z^6}{\sqrt{1.2.3.4.5.6}} + \dots,$$

une telle limite serait représentée par

$$\sqrt{\frac{a^2}{a^2 - \frac{1}{2}(e^{2z} - e^{-2z})}},$$

où z désigne la racine réelle et positive unique de l'équation transcendante

$$z^2(e^{z^2} - e^{-z^2}) - e^{z^2} - e^{-z^2} - 2a^2 = 0.$$

§. J'ajouterai, en terminant, une proposition simple qui résulte immédiatement des résultats du n° 2.

De l'inégalité

$$\sum |a_n z^n|^2 < \left[\sum |a_n z^n| \right]^2,$$

en posant

$$w(z) = \frac{1}{z^2} \sum |a_n z^n|^2,$$

on tire

$$w(z) < \frac{1}{z^2} \left[\sum |a_n z^n| \right]^2.$$

D'autre part, d'après ce qui précède, une limite inférieure des modules des zéros de la série

$$\sum a_n z^n$$

sera donnée par

$$\varrho = \frac{|a_0|}{\sqrt{w(z)}}.$$

Par suite, en posant

$$\theta(z) = \frac{\sum |a_n z^n|}{|z|},$$

on aura

$$\varrho > \frac{|a_0|}{\theta(z)},$$

et cela quelle que soit la valeur de z à l'intérieur du cercle de convergence de la série considérée.

Il s'ensuit la proposition suivante :

Une fonction $f(z)$ holomorphe dans une circonférence C , décrite autour de l'origine comme centre, ne s'annulant pas

à l'origine, ne saurait avoir de zéro de module inférieur à l'expression

$$\frac{|f(0)|}{M},$$

où M désigne la plus grande valeur que prend le module du rapport de la fonction majorante de $f(z)$ à la variable z pour les valeurs de z comprises à l'intérieur de la circonférence C .

Dans le cas particulier où les valeurs de la fonction $f(z)$ et de ses dérivées successives pour $z = 0$ sont toutes réelles et positives, et si l'on désigne par λ le plus petit parmi les modules des singularités de la fonction, celle-ci ne saurait s'annuler pour aucune valeur réelle ou imaginaire de z dont le module serait inférieur à la plus grande valeur que puisse prendre la fonction

$$\frac{f(0)z}{f(z)},$$

pour les valeurs réelles et positives de z , comprises entre 0 et λ .

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 6 NOVEMBRE 1901.

PRÉSIDENCE DE M. D'OCAGNE.

Communications :

M. André : *Sur les permutations alternées et leurs relations avec les développements en série de $\sec x$ et de $\tanh x$.*

M. Andoyer : *Sur les courbes paraboliques des surfaces algébriques et certaines singularités de ces surfaces.*

M. DE SÉGUIER adresse la Note suivante :

Courbe remplissant un cube à n dimensions.

Considérons l'ensemble V des points $(x_1, \dots, x_n)^{(1)}$ ($n \geq 2$) défini

(1) MM. PEANO (J. A. I. XXVI), HILBERT (M. A. I. XXXVIII), MOORE (*Transactions of the American Society*, 1900) ont étudié le cas où $n = 2$. Voir aussi E. PICARD, *Traité d'Analyse*, 2^e édition, Ch. I. Ce qui suit n'est qu'une généralisation de l'exemple donné par M. Hilbert.

par $0 \leq x_i < 1$ et l'ensemble L des points (x) défini par $0 \leq x < 1$, puis les variétés

$$x = \frac{\xi}{2^{nk}} (\xi = 0, 1, \dots, 2^{nk} - 1), \quad x_i = \frac{\xi_i}{2^k} (\xi_i = 0, \dots, 2^k - 1),$$

qui partagent L et V en 2^{kn} parties, $L_{\xi}^k V_{\xi_1 \dots \xi_n}^k$, définies

$$L_{\xi}^k \frac{\xi}{2^{nk}} \leq x < \frac{\xi + 1}{2^{nk}}, \quad V_{\xi_1 \dots \xi_n}^k \quad \xi_n$$

par

$$\frac{\xi_i}{2^k} \leq x_i < \frac{\xi_i + 1}{2^k},$$

[j'appellerai $\frac{\xi}{2^{nk}}$ le point initial de L_{ξ}^k et $(\frac{\xi_1}{2^k}, \dots, \frac{\xi_n}{2^k})$ le point initial de $V_{\xi_1 \dots \xi_n}^k$].

Supposons d'abord $k = 1$ et cherchons à ranger les $V_{\xi_1 \dots \xi_n}^1$ dans un ordre tel que chacun se déduise du précédent par une translation égale à $\frac{1}{2}$ et parallèle à un des axes, c'est-à-dire que si l'un d'eux est défini par $\frac{\xi_i}{2} \leq x_i < \frac{\xi_i + 1}{2}$, le suivant le sera par les mêmes inégalités où *un* et *un seul* des ξ_i sera augmenté ou diminué de 1. Soit S_n la suite ainsi formée. L'ordre des termes sera déterminé par la suite s_n des systèmes $\xi_1 \dots \xi_n$ qui y figurent. Supposons s_n formée pour $n = \nu$, le premier système étant 0, 0, ..., 0, le dernier répondant à ξ_h *seul* $\neq 0$, l'avant dernier à ξ_h et ξ_i *seuls* $\neq 0$. Pour former $s_{\nu+1}$ on peut procéder ainsi. Entre le $i^{\text{ème}}$ élément et le suivant (le premier étant regardé comme succédant au dernier) de chaque système de s_{ν} écrivons un 0 qui sera le $i + 1$ élément, le rang de chacun des éléments suivants jusqu'au dernier se trouvant ainsi accru de 1. Soit $s_{\nu,0}$ la suite ainsi formée. Formons une suite analogue $s_{\nu,1}$ en insérant entre le $i^{\text{ème}}$ et le $(i + 1)^{\text{ème}}$ élément de s_{ν} un 1 au lieu d'un 0. Écrivons alors tous les termes de $s_{\nu,0}$, sauf le dernier, dans l'ordre où ils se présentent, puis tous les termes de $s_{\nu,1}$, sauf le dernier, dans l'ordre inverse en commençant par l'avant-dernier, puis le dernier terme de $s_{\nu,1}$, puis le dernier terme de $s_{\nu,0}$. La suite ainsi formée sera une suite $s_{\nu+1}$: nous dirons qu'elle *conduit* du point (0, 0, ..., 0) au point

$$(x_1 = x_2 = \dots = x_{h-1} = x_{h+1} = \dots x_{\nu+1} = 0, \quad x_h = 1.)$$

Pour obtenir une suite s_{v+1} conduisant du point $(0, \dots, 0)$ au point $x_1 = \dots = x_v = 0, x_{v+1} = 1$, on écrirait $s_{v,0}$ puis $s_{v,1}$ dans l'ordre inverse.

Cela posé, désignons les termes de s_n par $V_0, \dots, V_{2^n-1}^1$ et faisons correspondre V_ξ^1 à L_ξ^1 , les points initiaux se correspondant. Pour $k=2$ on peut réaliser une correspondance analogue entre les $V_{\xi_1 \dots \xi_n}^2$ contenus dans V_μ^1 et les L_ξ^2 contenus dans L_μ^1 , en ayant soin que la suite des $V_{\xi_1 \dots \xi_n}^2$ conduise du point initial de V_μ^1 au point initial de $V_{\mu+1}^1$. Soit V_ξ^2 le $V_{\xi_1 \dots \xi_n}^2$ répondant à L_ξ^2 .

On pourra de même faire correspondre à L_ξ^k un $V_{\xi_1 \dots \xi_n}^k$ que j'appellerai V_ξ^k . Quand k croît indéfiniment, un point $(x_1, \dots, x_n)$ dont les coordonnées ne sont pas toutes de la forme $\frac{\alpha}{2^p}$ (α impair) sera intérieur à toute une série de $V_{\xi_1 \dots \xi_n}^k$ où chacun contient tous les suivants; cette série définit $(x_1, \dots, x_n)$. La série des L_ξ^k correspondants définit un point x correspondant à $(x_1, \dots, x_n)$. Ainsi on a réalisé une correspondance *biunivoque* entre les points de V et ceux de L qui peut être représentée par $x_i = f_i(\xi)$ ($i=1, \dots, n$). Entre deux points $(a_1, \dots, a_n)$, $(b_1, \dots, b_n)$ quelconques, l'arc de la courbe $x_i = f_i(\xi)$ qui remplit V est toujours infini, car, pour k assez grand, $(a_1, \dots)$ et $(b_1, \dots)$ sont dans deux $V_{\xi_1 \dots \xi_n}^k$ non adjacents et la courbe remplit chaque $V_{\xi_1 \dots \xi_n}^k$ au point initial duquel elle passe. Plus précisément, la variation de x_i étant $> \frac{1}{2^{k+N}}$ dans $V_{\xi_1 \dots \xi_n}^{k+N}$ et, par suite, $> \frac{1}{2^k}$ dans une file de $2^N V_{\xi_1 \dots \xi_n}^{k+N}$ intérieurs à $V_{\xi_1 \dots \xi_n}^k$ dont chacun se déduit du précédent par une translation de $\frac{1}{2^{k+N}}$ parallèle aux x_i sera $> 2^{N-1} 2^{-k}$ dans $V_{\xi_1 \dots \xi_n}^k$; donc la variation de $f_i(\xi)$ ne peut être bornée dans aucun $V_{\xi_1 \dots \xi_n}^k$, si petit soit-il.

M. COMBEBIAC adresse la Note suivante :

Sur la force vive utilisable.

Le *Bulletin* a publié dans son dernier fascicule une Note de M. Lecornu sur la *Dynamique des corps déformables*.

Il ne paraît pas sans intérêt de compléter cette Note par la proposition suivante :

Dans le cas où les forces extérieures se font équilibre, la force vive *utilisable* est uniquement fonction de la position du système.

Je rappelle que M. Lecornu appelle *force vive utilisable* la force vive que prendrait le corps si, à l'instant considéré, il venait à se solidifier.

Nous considérerons, comme M. Lecornu, le mouvement par rapport à un point fixe. Il est clair que la proposition est également vraie pour le mouvement autour du centre de gravité et, par suite, pour le mouvement général du système.

Soit γ le vecteur représentatif du moment résultant des quantités de mouvement de tous les points du système.

Soit ε le vecteur représentatif de l'axe instantané de rotation du mouvement que prendrait le système, s'il était brusquement solidifié.

On sait que la force vive de rotation du système solidifié a pour expression

$$T = (\varepsilon) (\gamma) \cos \theta,$$

où (ε) et (γ) sont les grandeurs respectives des vecteurs ε et γ et θ l'angle que ces vecteurs forment entre eux.

On sait également que, dans un corps solide, le vecteur γ est une fonction du vecteur ε déterminée par la position des axes principaux d'inertie et par les valeurs des moments principaux d'inertie.

Réciproquement, ε est une fonction analogue de γ , et, θ ne dépendant que de ε et de γ , il en résulte que T ne dépend que de γ et des positions des différents points du système.

Dans le cas où les forces extérieures se font équilibre (au sens qu'à ce mot dans la Mécanique des systèmes indéformables), le vecteur γ est constant en grandeur et en direction, et l'expression T n'est fonction que de la position du système, c. q. f. d.

Il résulte en outre de la démonstration que l'expression T prendra la même valeur, non seulement quand le système passera par la même position, mais encore quand il passera par des positions présentant la même forme, au point de vue de la répartition de la masse par rapport au vecteur constant γ .

On voit que, pour toute autre position, la force vive utilisable

est forcément comprise entre certaines limites, comme l'a indiqué M. Lecornu.

Si les forces intérieures n'équilibrent pas l'action des forces centrifuges, le système se dilatera et la force vive utilisable diminuera en même temps que (ε) .

Si, au contraire, les forces intérieures centripètes ont la prépondérance sur les forces centrifuges, le système se condensera et la force vive utilisable augmentera, puisque, (γ) restant constant, (ε) croîtra pendant que les moments d'inertie diminueront. Si le mouvement de condensation se produit suffisamment lentement, le travail des forces internes sera presque entièrement employé à accroître la force vive utilisable.

Dans le cas, cité par M. Lecornu, du système formé par l'écureuil et sa cage, la force vive utilisable serait constante, si l'écureuil n'était pas soumis à la pesanteur, et, à défaut d'impulsion primitive, le système s'arrêterait chaque fois que l'écureuil se fixerait à la cage.

Dans la réalité, le moment du poids de l'écureuil par rapport à l'axe fixe n'est équilibré que par des forces d'inertie, et c'est ce moment qui accroît la valeur de (ε) , le moment d'inertie restant ici constant.

Il y a lieu d'observer que la considération de la force vive utilisable correspond à une décomposition remarquable du mouvement.

Soient p, q, r les composantes de l'axe instantané de rotation ε suivant les directions des axes principaux d'inertie à l'instant considéré, et A, B, C les valeurs des moments d'inertie principaux; soient x, y, z les coordonnées d'un point du système par rapport aux axes principaux d'inertie, et soient x', y', z' les composantes suivant ces axes de la vitesse absolue de ce point.

On a, d'après la définition de ε ,

$$Ap = \Sigma m (yz' - zy'), \quad Bq = \Sigma m (zx' - xz'), \quad Cr = \Sigma m (xy' - yx').$$

Décomposons le mouvement en deux autres, dont l'un serait le mouvement de rotation sans déformation déterminé par l'axe instantané ε , c'est-à-dire posons

$$x' = qz - ry = u, \quad y' = rx - pz = v, \quad z' = py - qx = w.$$

On a

$$T = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + \Sigma m(u^2 + v^2 + w^2) \\ + 2\Sigma m[u(qz - ry) + v(rx - pz) + w(py - qx)].$$

Or le troisième terme est nul (et c'est ce qui constitue l'intérêt de cette décomposition).

Ce troisième terme peut en effet s'écrire, en remplaçant u , v et w par leurs valeurs,

$$\Sigma m[x'(qz - ry) + y'(rx - pz) + z'(py - qx)] = (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2)$$

ou

$$p\Sigma m(yz' - zy') + q\Sigma m(zx' - xz') + r\Sigma m(xy' - yx') = (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2),$$

quantité nulle, d'après la définition de p , q , r .

On a donc

$$T = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + \Sigma m(u^2 + v^2 + w^2).$$

Observons, en terminant, que les lettres p , q , r n'ont pas la même signification que dans la Note de M. Lecornu, pas plus que les lettres x' , y' , z' .

M. L. RIBERT fait la Communication suivante :

Sur trois propriétés de six points d'une conique.

I. — Le théorème de la droite de Simson du point M d'un cercle (ABC), étant une propriété de six points (A, B, C, M, I, J) du cercle, a cette conséquence projective :

Soient A, B, C, D, E, F six points d'une conique ; A₁, B₁, C₁ les points où BC, CA, AB coupent EF ; A₂, B₂, C₂ leurs points conjugués sur EF. Les droites DA₂, DB₂, DC₂ rencontrent les droites BC, CA, AB en des points situés sur une droite d.

Au triangle ABC, en permutant circulairement les points D, E, F, correspondent trois droites d , e , f . Or, il y a vingt triangles

$$ABC(1), ABD(2), \dots, CEF(19), DEF(20).$$

Donc, à six points données sur une conique correspondent

soixante droites, essentiellement distinctes des Pascals, et que l'on peut nommer *Simsons*.

Le calcul montre que le triangle DEF et le triangle formé par les droites d, e, f sont homologiques. En désignant par K_1 et k_1 le centre et l'axe d'homologie, on voit que, *aux soixante Simsons correspondent vingt points K et vingt droites k*.

Si l'on opère sur DEF par rapport à (A, B, C) comme on a opéré sur ABC par rapport à (D, E, F) on obtient K_{20} et une droite k_{20} . Si les six points donnés sont tels que les triangles ABC et DEF soient homologiques, la droite $K_1 K_{20}$ passe par le centre d'homologie et les droites k_1 et k_{20} se coupent sur l'axe d'homologie.

II. — Une autre propriété des six points se déduit du lemme suivant:

Soient A, B, C, E, F cinq points d'une hyperbole équilatère. Les perpendiculaires abaissées du point F sur les droites AE, BE, CE coupent les droites BC, CA, AB en des points situés sur une droite Δ qui est perpendiculaire à EF.

En effet, le triangle ABC étant de référence, soient $\alpha, \beta, \gamma; \alpha', \beta', \gamma'$, les coordonnées barycentriques de E et F. Si l'on pose

$$b^2 + c^2 - a^2 = a, \quad c^2 + a^2 - b^2 = b, \quad a^2 + b^2 - c^2 = c,$$

on trouve que le pied L de la perpendiculaire abaissée de F sur AE a pour coordonnées

$$0, \quad \beta'(b\beta - c\gamma) - \alpha'(2b^2\gamma + a\beta), \quad \gamma'(b\beta - c\gamma) + \alpha(2c^2\beta + a\gamma).$$

En formant la condition pour que le point L et les deux points M et N que l'on obtient par permutation circulaire soient collinéaires, on trouve

$$\sum \frac{\alpha(b\beta - c\gamma)}{\alpha'} = 0.$$

C'est la condition qui exprime que la conique ABCEF passe par l'orthocentre D de ABC, c'est-à-dire est hyperbole équilatère; elle est remplie par hypothèse. On vérifie d'ailleurs que les coordonnées des droites EF et LMN (ou Δ) satisfont à la condition de perpendicularité.

Or, l'orthocentre D d'un triangle ABC est le point du plan tel que les côtés AD et BC, BD et CA, CD et AB du quadrangle ABCD soient conjugués par rapport au cercle des neuf points de ce quadrangle, défini projectivement par les milieux des six côtés et les trois points d'intersection des côtés conjugués.

Si l'on remplace l'orthocentre de ABC par un point arbitraire D du plan, on sait que le quadrangle ABCD conserve une conique Ω des neuf points, de même définition projective.

D'où cette conséquence :

Soient A, B, C, D, E, F six points d'une conique. Les conjuguées menées par F des droites AE, BE, CE par rapport à la conique Ω du quadrangle ABCD coupent les droites BC, CA, AB en des points situés sur une droite Δ , qui est conjuguée de EF par rapport à Ω .

Aux six points donnés correspondent cent vingt droites Δ , car, les trois points D, E, F ayant dans la propriété des rôles distincts, à chacun des vingt triangles ABC correspondent six droites. Les cent vingt droites se répartissent en quinze faisceaux de huit droites parallèles, respectivement conjuguées des droites AB, AC, ...DF, EF par rapport aux coniques Ω des quadrangles CDEF, ...ABCD.

Il est aisé de généraliser ce théorème de manière à faire correspondre à six points d'une conique quinze faisceaux de huit droites concourant en quinze points situés sur une droite arbitrairement donnée.

III. — Le théorème suivant est dû à M. Lemoine (*M.*, 1901, p. 240) :

Soient M un point du cercle circonscrit à un triangle ABC; A', B', C' les pieds des hauteurs. On porte sur AA', BB', CC' les longueurs MA, MB, MC en AA₁, BB₁, CC₁ dans le sens AA', BB', CC', ou dans le sens opposé suivant que MA, MB, MC coupent BC, CA, AB sur les côtés du triangle ou sur leurs prolongements. Les quatre points M, A₁, B₁, C₁ sont sur une droite δ_4 .

On peut remarquer que : 1° si l'on désigne par A_2 le second

point d'intersection de AA' et du cercle de centre A et de rayon AM , et de même, B_2 et C_2 , les points M , A_2 , B_2 , C_2 sont sur une droite δ_2 , perpendiculaire à δ_1 ; 2° les droites B_1C_2 et C_1B_2 , C_1A_2 et A_1B_2 , A_1B_2 et B_1A_2 se coupent en des points A_3 , B_3 , C_3 situés sur une droite δ_3 passant par M ; 3° les droites A_1A_3 , B_1B_3 , C_1C_3 concourent en un point P_1 et les droites A_2A_3 , B_2B_3 , C_2C_3 en un point P_2 . D'où cette conséquence :

Soient A, B, C, D, E, F six points d'une conique; AA', BB', CC' les droites menées par A, B, C et qui coupent EF aux points conjugués des intersections de cette droite avec BC, CA, AB . Considérons les trois coniques passant par D, E, F et ayant A, B, C pour pôles respectifs de EF ; soient A_1 et A_2 , B_1 et B_2 , C_1 et C_2 les points où ces coniques coupent AA', BB', CC' . Trois de ces points (A_1, B_1, C_1) sont sur une droite δ_1 passant par D ; les trois autres, sur une droite δ_2 passant par D et conjuguée de δ_1 par rapport à EF . Les droites B_1C_2 et C_1B_2 , ..., etc.

On voit aisément que, aux six points donnés correspondent cent quatre-vingts droites δ , réparties en six faisceaux de trente droites chacun, ayant respectivement les points $A, \dots, F$ pour sommets et soixante couples de points P .

Remarques. — Tous les théorèmes précédents ont des corrélatifs.

Les figures formées par les soixante droites du n° 1, les cent vingt droites du n° 2, les cent quatre-vingts droites du n° 3 ont d'autres propriétés; ce sont des questions qui restent à étudier.

M. PELLET adresse la Note suivante :

Sur la méthode d'approximation de Newton.

1. Il est aisé de démontrer que l'équation

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots = 0$$

n'a qu'une racine de module inférieur à la plus petite racine positive ξ de l'équation majorante

$$x_0 + x_1\xi + x_2\xi^2 + \dots + x_n\xi^n + \dots = 0.$$

$x_n > |a_n|$ pour $n = 0, 2, \dots$, et $x_1 a_1 = |a_1|$. x_1, x_2 étant ces deux racines, on en déduirait

$$a_1 - a_2 \frac{x_2^2 - x_1^2}{x_2 - x_1} - \dots - a_n \frac{x_2^n - x_1^n}{x_2 - x_1} - \dots = 0;$$

d'où

$$x_1 < 2x_2^{\frac{2}{3}} + \dots + nx_n^{\frac{2}{3}n-1} + \dots$$

Or x_1 est supérieur au second membre de cette inégalité lorsque la racine ξ est simple, et lui est seulement égal lorsque ξ est racine double.

On peut même déduire de la méthode une démonstration du théorème fondamental de la théorie des fonctions implicites. Si les coefficients a sont des séries holomorphes en t , a_0 s'annulant avec t et non a_1 , prenons pour x_n une fonction majorante de $\frac{a_n}{a_1}$ ($n = 0, 2, \dots$) et $x_1 = 1$.

On pourra assigner deux nombres positifs, τ et Ξ , tels que t étant inférieur à τ , l'équation en ξ ait une seule racine positive inférieure à Ξ . Cette racine pourra se développer suivant les puissances croissantes de t , et il en sera *a fortiori* de même de la racine de plus petit module de l'équation en x .

2. La méthode comporte des simplifications dans certains cas. Ainsi, soit l'équation

$$f(u) = u - e \sin(b + u) - a = 0.$$

a, b, e étant des quantités réelles, la dernière e plus petite que 1 en valeur absolue, elle a une seule racine réelle comprise entre $-(|b| + |e|)$ et $|b| + |e|$. Posons

$$u_1 = \frac{e \sin b + a}{1 - e \cos b};$$

il vient

$$\frac{f(u_1)}{f'(u_1)} = \left(\frac{u_1^2}{2} - \frac{e \sin(b + \theta u_1)}{1 - e \cos(b + u_1)} \right), \quad 0 < \theta < 1.$$

Or

$$\left| \frac{e \sin(b + \theta u_1)}{2[1 - e \cos(b + u_1)]} \right| < \frac{\varepsilon}{2(1 - \varepsilon)} < 1,$$

si ε module de e est $< \frac{2}{3}$. La méthode de Newton répétée conduira

donc à une suite de termes $u_2, u_3, \dots, u_k, \dots$, tendant vers 0 et tels que $|u_k| < |u_{k-1}|^2$, si u_1 a un module inférieur à 1.

SÉANCE DU 20 NOVEMBRE 1901.

PRÉSIDENCE DE M. D'OCAGNE.

Élections :

M. Clairin, présenté par MM. Bioche et Borel, et M. Vessiot, présenté par MM. Painlevé et Borel, sont élus membres de la Société à l'unanimité des membres présents.

Communications :

M. Andoyer : *Sur l'équation de Kepler.*

M. Servant : *Sur la déformation des surfaces du second ordre.*

M. d'Ocagne : *Sur les courbes de raccordement des chemins de fer.*

FIN DU TOME XXIX.

ERRATA.

P. 172, lignes 6 et 7 (en remontant), lire :

$$\begin{aligned} & 6 \quad \frac{2}{5} \arcsin \frac{(\sqrt{51}-7) t^3 - (3\sqrt{51}-19) t^2 - (3\sqrt{51}+19) t + \sqrt{51}-7}{192\sqrt{3}t^2} \sqrt{T_1} \\ & \dots \frac{2}{5} \arcsin \frac{(\sqrt{51}-17) t^3 - (3\sqrt{51}-19) t^2 - (3\sqrt{51}-19) t - \sqrt{51}-7}{192\sqrt{3}t^2} \sqrt{T_2}. \end{aligned}$$

P. 175, ligne 15, lire : Armstrong.

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME XXIX.

(Les lettres et numéros qui précèdent les titres indiquent les classifications du *Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques*).

	Pages.
État de la Société mathématique au commencement de 1901.....	V
Liste des Présidents de la Société depuis sa fondation.....	XIV
Liste des Sociétés scientifiques et des recueils périodiques avec lesquels la Société échange son <i>Bulletin</i>	XV

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

[H 9 d]	D'Adhémar. — Sur une intégration par approximations successives.....	190
[B 12 a]	Autonne. — Sur une manière de représenter géométriquement un système de trois variables complexes.....	95
[A 6 f]	Bricard. — Sur les systèmes réciproques de points.....	130
[H 6 a]	Cartan. — Sur quelques quadratures dont l'élément différentiel contient des fonctions arbitraires.....	118
[H 6 a]	Cartan. — Sur l'intégration de certains systèmes de Pfaff de caractère deux.....	233
[X 8]	Greenhill. — Appareil stéréoscopique pour mettre en relief les figures géométriques se rapportant aux fonctions elliptiques.....	172
[R 8 h]	Lecornu. — Sur la dynamique des corps déformables..	176
[D 3b α]	Petrovitch. — Remarques sur les zéros des séries de Taylor.....	303
[G 1 e]	Poincaré. — Sur les surfaces de translation et les fonctions abéliennes.....	61
[H 8]	Saltykow. — Sur les intégrales des équations aux dérivées partielles du premier ordre d'une seule fonction.	86
[X 7]	Torrès. — Sur les rapports entre le calcul mécanique et le calcul graphique.....	161
[X 8]	Torrès. — Sur l'utilité des exemples cinématiques dans l'exposition des théories mathématiques.....	167
[L 17 d]	Weill. — Sur une classe de polygones de Poncelet....	109

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

[S 2 c]	Comptes rendus des Séances.....	1, 139, 209, 312
	Appell. — Déformation spéciale d'un milieu continu, tourbillons de divers ordres.....	16

		Pages
[O 5 f]	Borel. — Sur les formules d'Ollinde Rodrigues.....	22
[C 1 f]	Borel. — Sur les ordres d'infinitude	154
[R 1 c]	Bricard. — Sur une propriété du cylindroïde.....	18
[R 8 h]	Combebiac. — Sur la force vive utilisable.....	314
[O 4 h β]	Demoulin. — Sur le cylindroïde et sur la théorie des faisceaux de complexes linéaires.....	30
[R 1 c]	Duporcq. — Sur un déplacement remarquable à deux paramètres.....	1
[K 16 f]	Duporcq. — Sur une extension à l'espace du théorème de Simson.....	29
[R 1 h]	Hadamard. — Sur la propagation des ondes.....	50
[H 11 d]	Hadamard. — Sur l'itération et les solutions asymptotiques des équations différentielles.....	224
[H 12 d]	Laisant. — Sur certaines suites récurrentes.....	145
[R 1 f α]	Lecornu. — Sur la vis sans fin.....	149
[L' 3 a]	Lemoine. — Détermination simple de la direction des axes d'une conique.....	217
[D 2 a γ , D 4]	Lindelöf. — Sur le prolongement analytique.....	156
[H 9 h α]	Maillet. — Sur les systèmes complets d'équations aux dérivées partielles.....	209
[O 8 c, O 8 d]	Maillet. — Sur certains théorèmes de Géométrie cinématique.....	221
[A 3 g]	Pellet. — Sur la formule d'approximation de Newton... ..	139
[A 3 g]	Pellet. — Sur la méthode d'approximation de Newton..	228
[A 3 g]	Pellet. — Sur la méthode d'approximation de Newton..	326
[L' 1 c]	Ripert. — Sur trois propriétés de six points d'une conique.....	317
[H 9 e]	Rivereau. — Invariants des équations aux dérivées partielles du second ordre linéaires et homogènes.....	7
[O 5 e]	Servant. — Sur les formules de Gauss.....	142
[O 6 k]	Servant. — Sur la déformation des quadriques.....	231
[J 5]	de Séguier. — Courbe remplissant un cube à n dimensions.....	
[F 8 h]	de Sparre. — Sur une application des fonctions elliptiques à l'étude du mouvement des projectiles.....	30
[S 2]	Touche. — Sur une question posée par d'Alembert....	4
[M' 1 d]	Weill. — Sur les points de base d'un faisceau linéaire de courbes algébriques.....	6
Table des matières du Tome XXIX.....		323

BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE FRANCE.

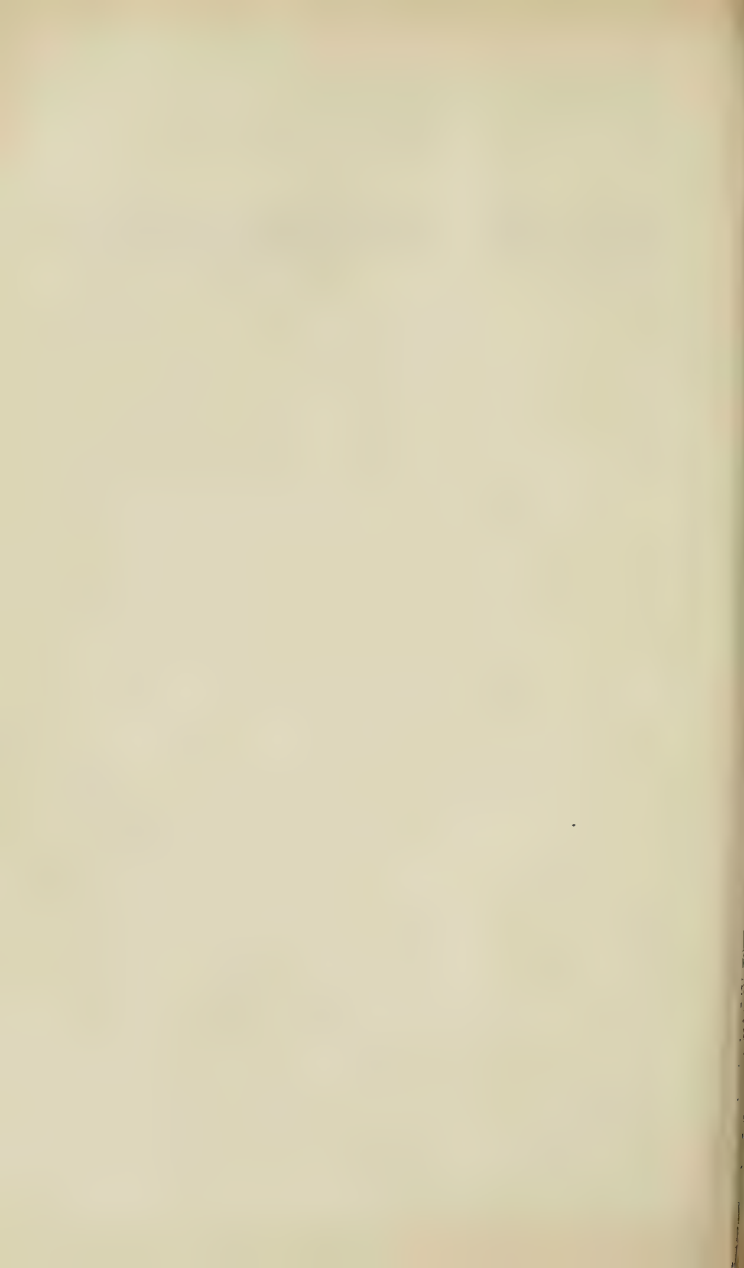
BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE FRANCE,

PUBLIÉ
PAR LES SECRÉTAIRES.

TOME TRENTIÈME. — ANNÉE 1902.

PARIS,
AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ,
A LA SORBONNE.

1902



ÉTAT

DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

AU COMMENCEMENT DE L'ANNÉE 1902 ⁽¹⁾.

Membres honoraires du Bureau....	} MM. APPELL. CREMONA. DARBOUX. HATON DE LA GOUPILLIÈRE. HUMBERT. JORDAN. PICARD. POINCARÉ.
----------------------------------	--

Président.....	MM. RAFFY.
Vice-Présidents	} BLUTEL. BOREL. CARVALLO. PAINLEVÉ.
Secrétaires	} BRICARD. DUPORCQ.
Vice-Secrétaires.....	} GRÉVY. SERVANT.
Archiviste.....	BIOCHE.
Trésorier.....	CLAUDE-LAFONTAINE.
Membres du Conseil ⁽²⁾	} ANDOYER, 1903. ANDRÉ, 1903. BOURLET, 1904. FOURET, 1903. GOURSAT, 1905. GUIYOU, 1903. HADAMARD, 1904. LAISANT, 1905. LEVY (L.), 1905. MAILLET, 1904. NIEWENGLOWSKI, 1904. D'OCAGNE, 1905.

(¹) MM. les Membres de la Société sont instamment priés d'adresser au Secretariat les rectifications qu'il y aurait lieu de faire à cette liste.

(²) La date qui suit le nom d'un membre du Conseil indique l'année au commencement de laquelle expire le mandat de ce membre.

Date de l'admission	
1872.	ACHARD, ancien directeur de la Compagnie d'assurances sur la vie <i>la Foncière</i> , rue de la Terrasse, 6 <i>bis</i> , à Paris (17 ^e).
1900.	ACKERMANN-TEUBNER, éditeur, à Leipzig.
1893.	ADAM (Paul), ingénieur des ponts et chaussées, docteur ès sciences mathématiques, boulevard des Invalides, 40, à Paris (7 ^e).
1900.	ADHEMAR (vicomte Robert d'), professeur suppléant à la Faculté libre des Sciences, 121, boulevard de la Liberté, à Lille (Nord).
1896.	ANDOYER, professeur adjoint à la Faculté des Sciences, rue du Val-de-Grâce, 1, à Paris (5 ^e).
1894.	ANDRADE, maître de conférences à la Faculté des Sciences, à Besançon.
1872.	ANDRÉ (Désiré), docteur ès sciences mathématiques, rue Bonaparte, 70 <i>bis</i> , à Paris (6 ^e).
1901.	ANGIBOUST, rue d'Assas, 104, à Paris (6 ^e).
1890.	ANTOMARI, docteur ès sciences, professeur au lycée Carnot, rue Daubigny, 11 <i>bis</i> , à Paris (17 ^e).
1879.	APPELL, membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences et à l'École Centrale des Arts et Manufactures, rue Bonaparte, 17, à Paris (6 ^e).
1881.	ASTOR, professeur à la Faculté des Sciences, place Vaucanson, 4, à Grenoble (Isère).
1900.	AURIC, ingénieur des ponts et chaussées, à Valence (Drôme).
1882.	AUTONNE, ingénieur des ponts et chaussées, rue Mont-Bernard, 9, à Lyon (Rhône).
1900.	BAIRE, docteur ès sciences, maître de conférences à la Faculté des Sciences de Montpellier (Hérault).
1896.	BAKER, professeur à l'Université, Toronto (Canada).
1894.	BALITRAND, ingénieur à Metlavin (Tunisie).
1889.	BEGHIN, ancien élève de l'École Polytechnique, rue du Champ-de-Mars, 22, à Paris (7 ^e).
1875.	BERDELLE, ancien garde général des forêts, à Rioz (Haute-Saône).
1872.	BIENAYMÉ (Arthur), inspecteur général du génie maritime en retraite, rue Revel, 14, à Toulon (Var).
1888.	BIOCHE, professeur au lycée Louis-le-Grand, rue Notre-Dame-des-Champs, 56, à Paris (6 ^e).
1875.	BISCHOFFSHEIM, membre de l'Institut, rue Taitbout, 3, à Paris (9 ^e).
1898.	BLAKE (Edwin-M.), 1910, Addison street, à Berkeley, Californie (U. S. A.).
1900.	BLUMENTHAL (Otto), docteur en philosophie, Herzberger chaussee, 49, à Göttingen.
1891.	BLUTEL, professeur au lycée Saint-Louis, maître de conférences à la Sorbonne, rue Denfert-Rochereau, 110, à Paris (14 ^e).
1892.	BONAPARTE (prince Roland), avenue d'Iéna, 10, à Paris (16 ^e).
1895.	BOREL, maître de conférences à l'École Normale supérieure, 30, boulevard Saint-Germain, à Paris (5 ^e).
1896.	BOLLANGER, maître de conférences à l'Université, rue Caumartin, 80, à Lille (Nord).
1896.	BOURGET (Henry), maître de conférences à la Faculté des Sciences, rue Saint-Jacques, 20, à Toulouse (Haute-Garonne).
1896.	BOURLET, professeur à l'École des Beaux-Arts et au lycée Saint-Louis, avenue de l'Observatoire, 22, à Paris (14 ^e).
1886.	BRAULT DE BOURNONVILLE, avenue de la Grande-Armée, 79, à Paris (16 ^e).
1900.	BREITLING, proviseur du lycée Saint-Louis, boulevard Saint-Michel, 44 (6 ^e).
1897.	BRICARD, ingénieur des manufactures de l'État, répétiteur à l'École Polytechnique, 6, rue Monge, à Paris (5 ^e).
1873.	BROCARD, chef de bataillon du génie en retraite, Ville-Haute, 75, à Bar-le-Duc.

Date
de
l'admission.

1891. **BLHL** (Adolphe), docteur ès sciences, rue de la Tombe-Issoire, 37, à Paris (14^e).
1893. **BURKHARDT**, professeur à l'Université, Kreuzplatz, 1, à Zürich (Suisse).
1897. **CABREIRA**, membre de l'Académie royale des Sciences, rua da Alegria, 32, à Lisbonne.
1894. **CAHEN**, professeur au collège Rollin, 32, rue de la Pompe, à Paris (16^e).
1893. **CALDAPERA**, professeur à l'Université, palazzo Giampaolo, via della Libertà, à Palerme.
1888. **CAVET** (Gustave), ingénieur civil, directeur de l'Artillerie de MM. Schneider et C^{ie}, boulevard Malesherbes, 1, à Paris (8^e).
1885. **CARON**, professeur de géométrie descriptive, rue Claude-Bernard, 71, à Paris (5^e).
1892. **CARONNET**, docteur ès sciences mathématiques, rue Demours, 62 bis, à Paris (17^e).
1896. **CARTAN**, maître de conférences à la Faculté des Sciences, rue Suchet, 38, à Lyon.
1887. **CARVALLO**, examinateur de sortie à l'École Polytechnique, rue Clovis, 1, à Paris (5^e).
1890. **CEDERCREITZ** (baronne Nanny, née de Lagerborg), Georgsgatan, 22, à Helsingfors.
1892. **CELLÉRIER** (Gustave), quai des Eaux-Vives, 34, à Genève (Suisse).
1896. **CELS**, professeur au lycée Condorcet, 6, square du Roule, à Paris (8^e).
1887. **CERRUTI**, professeur à l'Université, rue delle Sette Sale, 16, à Rome (Italie).
1888. **CHAILAN** (Édouard), rue Berthollet, 16, à Paris (5^e).
1893. **CHARLIAT**, ingénieur des arts et manufactures, rue de Paradis, 46, à Paris (10^e).
1896. **CHARVE**, professeur à la Faculté des Sciences, cours Pierre-Puget, 60, à Marseille.
1881. **CHEMIN**, ingénieur en chef des ponts et chaussées, avenue Montaigne, 33, à Paris (8^e).
1884. **CHRYSTAL**, professeur à l'Université, à Édimbourg (Écosse).
1901. **CLAIRIX**, docteur ès sciences, agrège préparateur à l'École Normale supérieure, rue d'Ulm, 45, à Paris (5^e).
1875. **CLAUDE-LAFONTAINE**, banquier, rue de Trévise, 32, à Paris (9^e).
1890. **COLOT**, château du Seuil, à Cérons (Gironde).
1898. **COMBEBIAC**, capitaine du génie, à Limoges.
1900. **CONTE** (Firmin), ingénieur des ponts et chaussées en congé, à Bar-le-Duc.
1896. **COSSERAT** (E.), professeur à la Faculté des Sciences, rue de Metz, 1, à Toulouse.
1896. **COSSERAT** (F.), ingénieur en chef des ponts et chaussées, rue d'Alsace, 23, à Paris (10^e).
1900. **COTTON** (Émile), maître de conférences à l'Université de Grenoble.
1896. **COURTIN**, chef de bataillon du génie en retraite, rue Monge, 21, à Paris (5^e).
1877. **CREMONA**, sénateur, directeur de l'École des Ingénieurs, à Rome (Italie).
1872. **DARBOIX**, secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, doyen de la Faculté des Sciences, rue Gay-Lussac, 36, à Paris (5^e).
1885. **DAUTHVILLE**, professeur à la Faculté des Sciences, à Montpellier (Hérault).
1901. **DAVIDOGLOU**, à Berlad (Roumanie).
1881. **DEFFORGES**, colonel au 36^e d'infanterie, à Caen (Calvados).
1882. **DELANVOY**, sous-intendant militaire en retraite, à Guéret (Creuse).
1901. **DELAUSSUS**, chargé de cours à la Faculté des Sciences, avenue Alsace-Lorraine, 44, à Grenoble (Isère).
1895. **DELAUNAY** (N.), professeur à l'Institut Polytechnique Empereur Nicolas II, à Varsovie.
1899. **DELENER**, ingénieur des ponts et chaussées, à Aubenas (Ardèche).
1885. **DEMARTRES**, doyen de la Faculté des Sciences, à Lille (Nord).
1892. **DEMOILLIN** (Alp.), professeur à l'Université, rue du Bas-Polder, 20, à Gand (Belgique).
1897. **DEMS** (Henry), élève libre à l'École d'application du Génie maritime, rue de Fleury, 23, à Paris (6^e).

Date
de
l'admission.

1883. DERUYS, professeur à l'Université, rue des Augustins, 35, à Liege (Belgique).
1894. DESAINT, docteur ès sciences, boulevard Gouvion-Saint-Cyr, 47, à Paris (17^e).
1900. DICKSTEIN, 117, Marszatkowska, Varsovie.
1899. DRACH (Jules), maître de conférences à la Faculté des Sciences, boulevard des Écoles, 31, à Lille (Nord).
1896. DUMAS (G.), licencié ès sciences, à Gland, canton de Vaud (Suisse).
1897. DUMONT, professeur au lycée, rue Royale, 10, à Annecy (Haute-Savoie).
1886. DUNCAN, Consulting Engineer, Empire Building, Broadway, 71, New-York City.
1895. DUPORCQ (Ernest), ingénieur des télégraphes, boulevard Pereire, 162, à Paris (17^e).
1896. DUPORT (Henry), professeur à l'Université, rue Colonel-de-Grancey, 1, à Dijon.
1897. DURAN-LORIGA, command. d'artillerie, 20, plaza de Maria Pita, à la Corogne (Espagne).
1885. DYCK (Walther), Technische Hochschule, à Munich (Bavière).
1901. EMELEN (van) (Léopold), boulevard du Château, 491, à Gand (Belgique).
1900. ESTAVAVE, docteur ès sciences, à la Sorbonne, à Paris (5^e).
1900. ESTIENNE, capitaine au 19^e régiment d'artillerie, à Nice.
1896. EUVERTE, ancien élève de l'École Polytechnique, ancien capitaine d'artillerie, ingénieur à Denain (Nord).
1888. FABRY, professeur à la Faculté des Sciences, à Montpellier (Hérault).
1891. FAULEMBERGUE, professeur au lycée, à Mont-de-Marsan (Landes).
1898. FERBER, capitaine d'artillerie, à Nice.
1892. FEHR (Henri), professeur à l'Université, rue Gevray, 19, à Genève (Suisse).
1885. FIELDS (John), professeur de mathématiques, 21, Liberty Str., à Hamilton (Canada).
1881. FLOQUET, professeur à la Faculté des Sciences, rue Saint-Lambert, 17, à Nancy.
1872. FLYE SAINTE-MARIE, chef d'escadron d'artillerie en retraite, ancien répétiteur à l'École Polytechnique, place Royer-Collard, à Vitry-le-François (Marne).
1896. FONTAINEAU, ancien officier de marine, cours Bugeaud, 8, à Limoges (Haute-Vienne).
1897. FONTENÉ, professeur au collège Rollin, boulevard de Clichy, 6, à Paris (18^e).
1895. FONTÈS, ingénieur en chef des ponts et chaussées, rue Romiguières, 3, à Toulouse.
1891. FOXFVOLIANT (DE), profes. à l'École Centrale, rue d'Eranger, 29, Paris-Auteuil (16^e).
1889. FOUCHE, professeur de mathématiques, rue Soufflot, 5, à Paris (5^e).
1872. FOURET, examinateur d'admission à l'École Polytechnique, avenue Carnot, 4, à Paris (17^e).
1892. FROLOV (le général), quai des Eaux-Vives, 36, à Genève (Suisse).
1900. GALDEANO (Z.-S. DE), professeur à l'Université, corso 99, 3, à Saragosse.
1872. GARNIEL, ingénieur en chef des ponts et chaussées, professeur à la Faculté de Médecine, rue Édouard-Detaille, 6, à Paris (17^e).
1896. GAUTHIER-VILLARS, ancien élève de l'École Polytechnique, éditeur, quai des Grands-Augustins, 55, à Paris (6^e).
1890. GEBBIA, professeur libre à l'Université, à Palerme (Italie).
1872. GENTY (E.), ingénieur en chef des ponts et chaussées, avenue Rapp, 20, à Paris (7^e).
1890. GENTY (Max), lieutenant de vaisseau, directeur du Parc d'aérostation de Lagoubran, villa Emeriau, à Toulon.
1890. GERBALDI, professeur à l'Université, via Daita, 11, à Palerme (Italie).
1897. GERBRAS, professeur à Worcester College, Saint-John Street, 20, à Oxford (Grande-Bretagne).

Date
de
l'admission.

1896. GIRARDVILLE, capitaine d'artillerie, avenue Marigny, 133, à Montreuil-sous-Bois (Seine).
1881. GOURSAT, professeur à la Faculté des Sciences, répétiteur à l'École Polytechnique, boulevard Raspail, 270, à Paris (14^e).
1896. GREENHILL, professeur à l'École d'artillerie, à Woolwich (Grande-Bretagne).
1896. GRÉVY, professeur au lycée Saint-Louis, boulevard Saint-Germain, 13, à Paris (5^e).
1899. GAUDET, ancien élève de l'École Polytechnique, boulevard Saint-Germain, 240 bis, à Paris (7^e).
1880. GUCCIA (Jean), professeur à l'Université, via Ruggiero Settimo, 30, à Palerme (Italie).
1900. GUICHARD, professeur à l'Université de Clermont-Ferrand.
1891. GUINARDES, officier du génie, à l'Académie des Sciences, rue Nova da Piedade, 55, à Lisbonne (Portugal).
1881. GUNTHER (Dr Sigismond), professeur à l'École Polytechnique, à Munich (Bavière).
1885. GUYOU, membre de l'Institut, capitaine de fregate, rue de l'Université, 13, à Paris (7^e).
1873. HAAG, ingénieur en chef des ponts et chaussées, professeur à l'École Polytechnique, rue Chardin, 11 bis, à Paris (16^e).
1882. HABICH, directeur de l'École des Ingénieurs, à Lima (Pérou).
1896. HADAMARD, professeur adjoint à la Faculté des Sciences, professeur suppléant au Collège de France, rue Humboldt, 25, à Paris (14^e).
1894. HALSTED, professeur à l'Université du Texas, Guadalupe Street, 2407, à Austin (Texas).
1901. HANCOCK (Harris), professeur à l'Université de Cincinnati, Auburn Hotel (Ohio, Etats-Unis).
1900. HARDEL, élève ingénieur à l'École des Ponts et Chaussées, 22, place Malesherbes, à Paris (17^e).
1872. HATON DE LA GOUPILLIÈRE, membre de l'Institut, inspecteur général des mines, directeur honoraire de l'École des mines, rue de Vaugirard, 56, à Paris (6^e).
1892. HERMANN, libraire-éditeur, rue de la Sorbonne, 8, à Paris (5^e).
1893. HOUX, professeur en retraite, rue des Fossés-Saint-Jacques, 16, à Paris (5^e).
1900. HOFFBAUER, ancien lieutenant d'artillerie, rue du Faubourg-du-Temple, 54, à Paris (11^e).
1879. HOLST (Elling), professeur à l'École Polytechnique, à Høvik, près Christiania (Norvège).
1895. HOTT (Stanislas), professeur à l'École St^e-Geneviève, rue Bausset, 4, à Paris (15^e).
1872. HOUBIGANT, chef de bataillon du génie en retraite, rue Lecourbe, 88, à Paris (15^e).
1880. HUMBERT, membre de l'Institut, ingénieur en chef des mines, professeur à l'École Polytechnique, rue Daubigny, 10, à Paris (17^e).
1881. IMBER, directeur des études à l'École Centrale, rue Montgolfier, 1, à Paris (3^e).
1896. JACQUET (E.), professeur au Prytanée militaire, rue Couchot, 8, à la Flèche.
1898. JAHNKE, privat docent à l'École Polytechnique de Charlottenburg, Pariserstrasse, 55, à Berlin W¹⁵ (Allemagne).
1898. JARRY (N.), ingénieur civil, rue Michel-Bizot, 187, à Paris (12^e).
1872. JAVARY, chef de bataillon du génie en retraite, chef des travaux graphiques à l'École Polytechnique, rue du Cardinal-Lemoine, 1, à Paris (5^e).
1872. JORDAN, membre de l'Institut, professeur à l'École Polytechnique et au Collège de France, rue de Varenne, 48, à Paris (7^e).
1872. JOUFFRET, lieutenant-colonel d'artillerie, rue de l'Estrapade, 20, à Paris (5^e).
1875. JUNG, professeur à l'Institut technique supérieur, via Borgonuovo, 9, à Milan (Italie).
1890. KÖBE (Gustaf), maître de conférences à l'Université, à Stockholm (Suède).
1892. KOEN (H. von), maître de conférences à l'Université, à Djursholm-Stockholm, (Suède).
1880. KÖNIGS, professeur à la Faculté des Sciences de Paris, répétiteur à l'École Polytechnique, boulevard Arago, 101, à Paris (14^e).

Date
de
l'admission

1897. **LACAUCHE**, ingénieur civil, chef du laboratoire de la Compagnie générale des Omnibus, rue de Douai, 48, à Paris (9^e).
1873. **LAISANT**, docteur ès sciences, répétiteur à l'École Polytechnique, avenue Victor-Hugo, 162, à Paris (16^e).
1893. **LANCELIN**, astronome adjoint de l'Observatoire, rue Boissonnade, 3, à Paris (14^e).
1899. **LANDAU** (Edmond), privat docent à l'Université, Dorotheenstrasse, 7, Berlin, N. W.
1896. **LAROSE**, ingénieur des télégraphes, à Lyon (Rhône).
1896. **LAUGEL**, ancien attaché d'ambassade, villa des Bruyères, au Golfe Juan (Alpes-Maritimes).
1873. **LAUTH**, manufacturier, à Thann (Alsace).
1896. **LEAU**, professeur au collège Stanislas, rue Vavin, 6, à Paris (6^e).
1880. **LÉAUTÉ**, membre de l'Institut, boulevard de Courcelles, 18, à Paris (17^e).
1896. **LEBEL**, professeur au lycée de Montpellier, villa Mont-Carmel, avenue Bonisson-Bertrand, à Montpellier.
1893. **LECORNU**, ingénieur en chef des mines, répétiteur à l'École Polytechnique, rue Gay-Lussac, 3, à Paris (5^e).
1895. **LEMERAY**, licencié ès sciences, ingénieur civil du génie maritime, rue Ville-ès-Martin, 109 bis, à Saint-Nazaire (Loire-Inférieure).
1872. **LEMOINE** (Émile), ancien élève de l'École Polytechnique, boulevard de Vaugirard, 4, à Paris (15^e).
1879. **LE PAIGE**, professeur à l'Université, à l'observatoire de Cointe, à Liège (Belgique).
1895. **LE ROUX**, maître de conférences à la Faculté des Sciences, faubourg de Fougères, 41, à Rennes (Ille-et-Vilaine).
1898. **LE ROY**, docteur ès sciences, rue de l'Abbé-de-l'Épée, 8, à Paris (5^e).
1891. **LERVY**, agent voyer d'arrondissement, à Pontoise (Seine-et-Oise).
1872. **LESPIAULT**, doyen honoraire de la Faculté des Sciences de Bordeaux, à Nérac (Lot-et-Garonne).
1900. **LEVI CIVITA** (T.), professeur à l'Université, via San Gaetano, 3394, à Padoue (Italie).
1882. **LÉVY** (Lucien), répétiteur et examinateur d'admission à l'École Polytechnique, rue du Regard, 12, à Paris (6^e).
1872. **LÉVY** (Maurice), membre de l'Institut, inspecteur général des ponts et chaussées, professeur au Collège de France, avenue du Trocadero, 15, à Paris (16^e).
1875. **LEZ** (Henri), à Lorrez-le-Bocage (Seine-et-Marne).
1898. **LINDELÖF** (Ernst), professeur à l'Université, Nylandsgatan, 15, à Helsingfors.
1877. **LINDEMANN**, professeur à l'Université, Franz-Josephstrasse, 12, à Munich (Bavière).
1886. **LIOTVILLE**, ingénieur des poudres, examinateur des élèves à l'École Polytechnique, quai Henri IV, 12, à Paris (4^e).
1900. **LOVETT** (E.-O.), professeur à Princeton University, New-Jersey (États-Unis).
1888. **LUCAS** (Félix), ingénieur en chef des ponts et chaussées, rue Boissière, 30, à Paris (16^e).
1886. **LION**, docteur ès sciences mathématiques, chemin de la Roseraie, 26, à Genève (Suisse).
1882. **MACÉ DE LÉPINAY**, professeur de mathématiques spéciales au lycée Henri IV, rue Claude-Bernard, 79, à Paris (5^e).
1895. **MAILLET**, docteur ès sciences, ingénieur des ponts et chaussées, rue de Fontenay, 11, à Bourg-la-Reine (Seine).
1872. **MANNHEIM**, colonel d'artillerie en retraite, professeur honoraire à l'École Polytechnique, boulevard Beauséjour, 1, à Paris (16^e).
1884. **MARTIN** (Artemas), Columbia street, 1534, N. W., à Washington D. C. (États-Unis d'Amérique).
1889. **MARTIN** (Émile), ancien élève de l'École Polytechnique, professeur de mathématiques, rue de l'Estrapade, 17, à Paris (5^e).

- Date
de
l'admission.
1901. MASSAU (J.), professeur à l'Université, rue Maruix, 22, à Gand (Belgique).
1894. MAUPIN, professeur au collège, boulevard de la Mauldière, 19, à Issoire (Puy-de-Dôme).
1897. MEHNKE, professeur à l'École technique supérieure, Weisseinburgstrasse, 29, à Stuttgart (Wurtemberg).
1889. MEYDIZABAL TAMBOREL (DE), membre de la Société de Géographie de Mexico, calle de Jesus, 13, à Mexico (Mexique).
1884. MERCEREAU, licencié ès sciences, rue de l'Université, 193, à Paris (7^e).
1893. MICHEL (François), chef de parcours de la Compagnie des chemins de fer du Nord, rue Perdonnet, 12, à Paris (10^e).
1899. MILLER (Dr G.-A.), professeur à Stanford University, Californie (États-Unis).
1873. MITTAG-LEFFLER, professeur à l'Université, à Stockholm (Suède).
1897. MONTCHEUL (l'abbé DE), école de l'Immaculée-Conception Sainte-Marie (Caousou), à Toulouse.
1898. MONTESSUS DE BALLORE (R. DE), rue de Meaux, 17, à Senlis (Oise).
1898. NAUD (C.), éditeur, rue Racine, 3, à Paris (6^e).
1885. NEUBERG, professeur à l'Université, rue Sclessin, 6, à Liège (Belgique).
1897. NICOLLIER, professeur, à Montreux (Suisse).
1900. NIEWENGLOWSKI, docteur ès sciences, inspecteur de l'Académie de Paris, rue de l'Arbalète, 35 (5^e).
1882. OCAGNE (M. N'), ingénieur des ponts et chaussées, professeur à l'École des Ponts et Chaussées, répétiteur à l'École Polytechnique, rue La Boétie, 30, à Paris (8^e).
1873. OVIDIO (Enrico D'), professeur à l'Université, Corso-Oporto, 30, à Turin (Italie).
1901. PADÉ (H.), chargé de cours à l'Université, route de Bordeaux, 26, à Poitiers.
1893. PAINLEVÉ, membre de l'Institut, maître de conférences à l'École Normale supérieure, répétiteur à l'École Polytechnique, cité Vaneau, 9, à Paris (7^e).
1888. PAPELIER (Georges), professeur de mathématiques spéciales au lycée, rue de Recouvrance, 20, à Orléans (Loiret).
1884. PARAF, maître de conférences à la Faculté des Sciences, à Toulouse.
1872. PARMENTIER, général du génie en retraite, rue du Cirque, 5, à Paris (8^e).
1872. PARRAN, ingénieur en chef des mines, rue des Saints-Pères, 56, à Paris (7^e).
1881. PELLET, doyen de la Faculté des Sciences, rue Pascal, 30, à Clermont-Ferrand.
1883. PELLETREAU, ing. en chef des chemins de fer éthiopiens, rue Scribe, 5, à Paris (9^e).
1898. PELLETREAU (Georges), sous-inspecteur de l'exploitation des chemins de fer du Nord, 31, rue Baudin, à Paris (9^e).
1900. PERCHOT, astronome adjoint à l'Observatoire de Paris, 7, rue Scheffer (10^e).
1874. PERCIN, général de brigade, chef du cabinet du ministre de la guerre.
1881. PEROTT (Joseph), Université Clark, à Worcester (Massachusetts).
1873. PERRIN, ingénieur en chef des mines, avenue d'Eylau, 9, à Paris (16^e).
1892. PERRIN (Élie), professeur de mathématiques, rue Lamande, 7, à Paris (17^e).
1896. PETROVITCH, professeur à l'Université, Kossantch-Venac, 24, à Belgrade (Serbie).
1887. PEZZO (DEL), professeur à l'Université, via Gennaro Serra, 75, à Naples (Italie).
1879. PICARD (Émile), membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences et à l'École Centrale des Arts et Manufactures, rue Soufflot, 13, à Paris (5^e).
1872. PIQUET, chef de bataillon du génie, examinateur d'admission à l'École Polytechnique, rue Monsieur-le-Prince, 4, à Paris (10^e).
1896. PIERON, inspecteur général de l'Instruction publique, rue d'Assas, 50, à Paris (6^e).
1899. PIERPONT (James), prof. de l'Université Yale, 47, Mansfield st., New Haven, Connecticut (États-Unis).
1882. POINCARÉ, membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes, ingénieur en chef des mines, professeur à la Faculté des Sciences, rue Claude Bernard, 63 (5^e).

Date
de
l'admission.

1872. **POLIGNAC** (prince C. DE), villa Jessie, à Cannes (Alpes-Maritimes).
1899. **PRINGSHEIM**, professeur à l'Université de Munich, 12, Arcisstrasse.
1896. **PRUVOST**, inspecteur général de l'Instruction publique, 11, rue de la Tour, à Paris (16^e).
1872. **PUTZ**, général d'artillerie en retraite, rue Saint-Merry, 98, à Fontainebleau.
1896. **QUIQUET**, actuaire de la Compagnie *la Nationale*, rue de Grammont, 13, à Paris (2^e).
1898. **RABUT** (Charles), ingénieur en chef des ponts et chaussées, rue Duplessis, 77, à Versailles (Seine-et-Oise).
1872. **RADAU**, membre de l'Institut, rue de Tournon, 12, à Paris (6^e).
1883. **RAFFY**, professeur-adjoint à la Faculté des Sciences, maître de conférences à l'École Normale supérieure, rue Nicole, 7, à Paris (5^e).
1900. **RENARD**, rue de la Tour, 7, à Paris (16^e).
1898. **RIPERT**, commandant du génie en retraite, à Poix (Somme).
1893. **RIVIEREAU** (l'abbé), professeur à l'Institut catholique, à Angers (Maine-et-Loire).
1872. **ROUART**, ingénieur civil, rue de Lisbonne, 34, à Paris (8^e).
1872. **ROICHÉ**, de l'Institut, professeur au Conservatoire des arts et métiers, examinateur des élèves à l'École Polytechnique, boulevard S^t-Germain, 213, à Paris (7^e).
1896. **ROUGIER**, docteur ès sciences, professeur au lycée, à Toulon (Var).
1885. **ROUQUET** (V.), professeur honoraire de mathématiques spéciales, à Belpech (Aude).
1900. **SALTYKOW**, maître ès sciences mathématiques, professeur à l'Institut Polytechnique, à Tomsk (Russie).
1896. **SANCHEZ**, directeur de l'observatoire, à San Salvador (République de San Salvador).
1872. **SARRAU**, membre de l'Institut, ingénieur en chef des poudres, professeur à l'École Polytechnique, avenue Daumesnil, 9 *bis*, à Saint-Mandé (Seine).
1872. **SARTIAUX**, ingénieur en chef des ponts et chaussées, chef de l'exploitation à la Compagnie du chemin de fer du Nord, à Paris.
1885. **SAUVAGE**, professeur à la Faculté des Sciences, à Marseille (Bouches-du-Rhône).
1881. **SCHLEGEL**, professeur à l'École technique, Volmestrasse, 62, à Hagen (Allemagne).
1897. **SCHOU** (Erik), Gl. Antvorskov, à Slagelse (Danemark).
1881. **SCHOUTE**, professeur à l'Université, à Groningue (Hollande).
1901. **SEE** (Thomas-J.-J.), profess. à la United States Navy, à Washington (États-Unis).
1896. **SÉGUIER** (J.-A. DE), docteur ès sciences, rue des Saints-Fères, 56, à Paris (7^e).
1882. **SÉLIVANOFF** (Démétrius), attaché à l'Université, Fontanka, 116, log. 16, à Saint-Petersbourg (Russie).
1900. **SERVANT**, docteur ès sciences, Grande-Rue, 75, à Bourg-la-Reine (Seine).
1900. **SPARRE** (comte Magnus DE), château de Vallière, à S^t-Georges-de-Reneins (Rhône).
1881. **STARKOFF**, Maximilianovskiy pereonlok, 19, log. 12, à Saint-Petersbourg (Russie).
1879. **STEPHANOS** (D^r Cyparissos), professeur à l'Université, à Athènes (Grèce).
1901. **STEIISON** (Orlando), à Franklin (Massachusetts).
1898. **STÖRMER** (Carl), chargé de cours à l'Université, Holtegaden, 14, à Christiania.
1873. **STUDNICKA**, professeur à l'Université, à Prague (Bohême).
1872. **SYLOW**, professeur à l'Université, à Frederikshald (Norvège).
1899. **SYRIEIX**, boulevard Beausejour, 23, à Paris (16^e).
1896. **TANNENBERG** (DE), professeur à la Faculté des Sciences, à Bordeaux (Gironde).
1872. **TANNERY** (Paul), directeur des manufactures de l'État, à Pantin (Seine).
1875. **TANNERY** (Jules), sous-directeur à l'École Normale supérieure, rue d'Ulm, 15, à Paris (5^e).
1882. **TARRY** (Gaston), rue d'Isly, 19, à Alger (Algérie).
1897. **TARRY** (Harold), inspecteur des finances en retraite, à Kouba (Algérie).
1872. **TERRIER**, professeur au collège Chaptal, avenue Léonie, à Saint-Cloud.

Date
de
l'admission

1899. **THYBAUT** (Alexandre), docteur ès sciences, professeur au lycée Carnot, rue du Rocher, 101, à Paris (8^e).
1873. **TISSOT**, ancien examinateur d'admission à l'École Polytechnique, à Voreppe (Isère).
1896. **TISSOT**, enseigne de vaisseau, professeur au *Borda*, à Brest (Finistère).
1896. **TORRES**, membre de l'Académie des Sciences, Valgame Dios, 3, à Madrid (Espagne).
1893. **TOUCHE**, lieutenant-colonel d'artillerie territoriale, rue Truffault, 23, à Paris (17^e).
1872. **TRESCA**, ingénieur en chef des ponts et chaussées en retraite, château de Courtozé, par Vendôme (Loir-et-Cher).
1896. **TRESSE**, doct. ès sciences, prof. au collège Rollin, rue Caulincourt, 20, à Paris (18^e).
1893. **VALLÉE-POUSSIN** (Ch.-J. de la), professeur à l'Université, rue de Namur, 190, à Louvain (Belgique).
1880. **VANECEK** (J.-S.), professeur au lycée, à Jicin (Bohème).
1897. **VASSILAS-VITALIS** (J.), docteur de l'Université, rue Polyclete, 5, à Athènes (Grèce).
1898. **VASSILIEF**, président de la Société physico-mathématique, à Kasan (Russie).
1901. **VESSIOT**, professeur à la Faculté des Sciences, boulevard du Nord, 92, à Lyon (Rhône).
1888. **VOLTERRA** (Vito), professeur à l'Université de Rome.
1900. **VUIBERT**, éditeur, 63, boulevard Saint-Germain (5^e).
1893. **WAGNER**, professeur à l'École J.-B. Say, rue Spontini, 13, à Paris (16^e).
1880. **WALCKENAER**, ingénieur en chef des mines, boulevard St-Germain, 218, à Paris (7^e).
1879. **WEILL**, directeur du collège Chaptal, boulevard des Batignolles, 45, à Paris (8^e).
1873. **WEYR** (Dr Edouard), professeur à l'École Polytechnique, à Prague (Bohème).
1878. **WORMS DE ROMILLY**, ingénieur en chef des mines, rue Balzac, 7, à Paris (8^e).
1882. **ZABOUDSKI**, membre du Comité d'artillerie et professeur à l'Académie d'Artillerie, rue Znamenskaja, 22, à Saint-Petersbourg (Russie).
1890. **ZAREMBA**, docteur ès sciences, professeur à l'Université de Cracovie (Autriche).
1881. **ZEUTHEN**, professeur à l'Université, Rosenvonget, Saint-Kanntkestræde, 11, à Copenhague (Danemark).
1898. **ZIWET**, South Ingalls street, 644, Ann Arbor (Michigan) (Etats Unis).

SOCIÉTAIRES PERPÉTUELS.

ACKERMANN-TEUBNER, à Leipzig. — **BENOIST** (décédé). — **BERDELLE**, à Rioz. — **BIENVENÙ** (décédé). — **BIOCHE**, à Paris. — **BISCHOFFSHEIM**, à Paris. — **BORCHARDT** (décédé). — **BOREL**, à Paris. — **BROCARD**, à Bar-le-Duc. — **CANET**, à Paris. — **CARVALLO**, à Paris. — **CHASLES** (décédé). — **CLAUDE-LAFONTAINE**, à Paris. — **COTTON**, à Grenoble. — **FOUREL**, à Paris. — **GAUTHIER-VILLARS** (décédé). — **GOURSAT**, à Paris. — **HALPHEN** (décédé). — **HALSTED**, à Austin. — **HADAMARD**, à Paris. — **HATON DE LA GUEPILLIÈRE**, à Paris. — **HERMITE** (décédé). — **HIRST** (décédé). — **HOTT**, à Paris. — **JORDAN**, à Paris. — **LAFFON DE LADÉBAT** (décédé). — **LÉAUTÉ**, à Paris. — **MAILLET**, à Bourg-la-Reine. — **WANNHEIM**, à Paris. — **DE MENDIZABAL TAMBOREL**, à Mexico. — **MERCEREAU**, à Paris. — **D'OCAGNE**, à Paris. — **PEROTT**, à Worcester. — **PEBRIN**, au Mans. — **POINCARÉ**, à Paris. — **POLIGNAC** (prince C. de), à Cannes. — **RAFFY**, à Paris. — **SALTYKOW**, à Tomsk. — **SELIVANOFF**, à Saint-Petersbourg. — **SPARRE** (comte M. de), à Saint-Georges-de-Reneins. — **SALOW**, à Frederikshald. — **TANNERY** (Paul), à Paris. — **TARRY** (G.), à Alger. — **ICHERICHEF** (décédé). — **YIELLARD** (décédé).

LISTE

DES

PRESIDENTS DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

DEPUIS SA FONDATION.

MM		MM.	
1873	CHASLIS.	1888	LAISANT.
1874	LAFFON DE LADERAT.	1889	ANDRÉ (DÉSIRÉ).
1875	BIENAYMÉ	1890	HATON DE LA GOUPIILLIÈRE.
1876	DE LA GOURNERIE.	1891	COLLIGNON.
1877	MANNHEIM.	1892	VICAIRE.
1878	DARBOUX.	1893	HUMBERT.
1879	O. BONNET.	1894	PICQUET.
1880	JORDAN.	1895	GOURSAT.
1881	LAGUERRE.	1896	KÖNIGS.
1882	HALPHEN	1897	PICARD.
1883	ROUCHE.	1898	LECORNU.
1884	PICARD.	1899	GUYOU.
1885	APPELL.	1900	POINCARÉ.
1886	POINCARÉ.	1901	D'OCAGNE.
1887	FOIRET.	1902	RAFFY.

Liste des Sociétés scientifiques et des Recueils périodiques avec lesquels
la Société mathématique de France échange son Bulletin.

Amsterdam.....	Académie Royale des Sciences d'Amsterdam.	Hollande.
Amsterdam.....	Société mathématique d'Amsterdam.	Hollande.
Amsterdam.....	<i>Revue semestrielle des publications mathématiques.</i>	Hollande.
Baltimore.....	Johns Hopkins University.	États-Unis.
Berlin.....	Académie des Sciences de Berlin.	Allemagne.
Berlin.....	<i>Archiv für Mathematik und Physik.</i>	Allemagne.
Berlin.....	<i>Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik.</i>	Allemagne.
Berlin.....	<i>Journal für die reine und angewandte Mathematik.</i>	Allemagne.
Bologne.....	Académie des Sciences de l'Institut de Bologne.	Italie.
Bordeaux.....	Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux.	France.
Bruxelles.....	Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique.	Belgique.
Bruxelles.....	Société scientifique de Bruxelles.	Belgique.
Cambridge.....	Société philosophique de Cambridge.	Grande-Bretagne.
Christiania.....	<i>Archiv for Mathematik og Naturvidenskab.</i>	Norvège.
Coïmbre.....	<i>Jornal de Sciencias mathematicas e astronomicas.</i>	Portugal.
Copenhague.....	<i>Nyt Tidsskrift for Mathematik.</i>	Danemark.
Cracovie.....	Académie des Sciences de Cracovie.	Autriche.
Edimbourg.....	Société Royale d'Édimbourg.	Grande-Bretagne.
Edimbourg.....	Société mathématique d'Édimbourg.	Grande-Bretagne.
Gand.....	<i>Mathesis.</i>	Belgique.
Göttingen.....	Société Royale des Sciences de Göttingen.	Allemagne.
Göttingen.....	<i>Mathematische Annalen.</i>	Allemagne.
Hambourg.....	Société mathématique de Hambourg.	Allemagne.
Harlem.....	Société hollandaise des Sciences.	Hollande.
Helsingfors.....	Société des Sciences de Finlande.	Finlande.
Kasan.....	Société physico-mathématique.	Russie.
Kharkov.....	Annales de l'Université.	Russie.
Kharkov.....	Société mathématique de Kharkov.	Russie.
Leipzig.....	Société Royale des Sciences de Saxe.	Allemagne.
Liege.....	Société Royale des Sciences, à l'Université.	Belgique.
Livourne.....	<i>Periodico di Matematica.</i>	Italie.
Londres.....	Société astronomique de Londres.	Grande-Bretagne.
Londres.....	Société mathématique de Londres.	Grande-Bretagne.
Londres.....	Société Royale de Londres.	Grande-Bretagne.
Luxembourg.....	Institut Royal de Luxembourg.	Luxembourg.
Marseille.....	<i>Annales de la Faculté des Sciences de Marseille.</i>	France.
Mexico.....	Sociedad científica Antonio Alatorre.	Mexique.

Milan	Institut Royal lombard des Sciences et Lettres.	Italie.
Moscou	Société mathématique de Moscou.	Russie.
Munich	Académie des Sciences de Munich.	Bavière.
Naples	Académie Royale des Sciences physiques et mathématiques de Naples.	Italie.
New-Haven	Académie des Sciences et Arts du Connecticut.	États-Unis.
New-York	<i>American mathematical Society.</i>	États-Unis.
Odessa	Société mathématique d'Odessa.	Russie.
Palerme	<i>Rendiconti del Circolo matematico.</i>	Italie.
Paris	Académie des Sciences de Paris.	France.
Paris	Association française pour l'avancement des Sciences.	France.
Paris	Société philomathique de Paris.	France.
Paris	<i>Bulletin des Sciences mathématiques.</i>	France.
Paris	<i>Journal de l'École Polytechnique.</i>	France.
Paris	Institut des Actuaire français.	France.
Paris	Bibliothèque de la Sorbonne.	France.
Pise	École Royale Normale supérieure de Pise.	Italie.
Pise	Université Royale de Pise.	Italie.
Pise	<i>Il Nuovo Cimento.</i>	Italie.
Prague	Académie des Sciences de Prague.	Autriche.
Prague	<i>Casopis pro pěstování matematiky a fysiky.</i>	Autriche.
Prague	Société mathématique de Prague.	Autriche.
Rome	Académie Royale des <i>Lincei</i> .	Italie.
Saint-Petersbourg .	Académie Impériale des Sciences.	Russie.
Stockholm	<i>Acta Mathematica.</i>	Suède.
Stockholm	<i>Bibliotheca Mathematica.</i>	Suède.
Toulouse	<i>Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse.</i>	France.
Turin	Académie des Sciences.	Italie.
Upsal	Société Royale des Sciences d'Upsal.	Suède.
Venise	Institut Royal vénitien des Sciences, Lettres et Arts.	Italie.
Vienne	Académie Impériale des Sciences de Vienne.	Autriche.
Vienne	<i>Monatshefte für Mathematik und Physik.</i>	Autriche.
Zurich	Société des Sciences naturelles de Zurich.	Suisse.

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

MÉMOIRES.

SUR UN SYSTÈME NUMÉRIQUE COMPLEXE REPRÉSENTANT LE GROUPE DES TRANSFORMATIONS CONFORMES DE L'ESPACE;

Par M. COMBEBIAC.

I.

TRANSFORMATIONS CONFORMES ET GÉOMÉTRIE DES SPHÈRES.

On sait que les transformations conformes de l'espace, c'est-à-dire les transformations ponctuelles par lesquelles une figure infinitésimale est transformée en une figure infinitésimale semblable, peuvent être caractérisées par la propriété de transformer les sphères de rayon nul en d'autres sphères de rayon nul, puisque les transformations conformes peuvent être définies *celles qui conservent le complexe des droites isotropes*.

Une transformation conforme transforme aussi toute sphère en une autre sphère, car la sphère est la seule surface qui présente deux séries de génératrices isotropes.

Les transformations conformes sont susceptibles d'être représentées d'une manière très simple, quand on prend pour élément de l'espace la sphère.

Considérons l'équation d'une sphère sous la forme

$$(1) \quad x_0(x^2 + y^2 + z^2) + 2x_1x + 2x_2y + 2x_3z - \delta = 0$$

et prenons les quantités $x_0, x_1, x_2, x_3, \delta$ pour coordonnées homogènes de la sphère.

Nous pouvons représenter une transformation conforme de l'espace par une transformation linéaire homogène en $x_0, x_1, x_2, x_3, \delta$, laissant invariante l'expression quadratique

$$(2) \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_0 \delta.$$

C'est ce groupe de transformations dont nous allons établir la représentation au moyen d'un système numérique complexe.

Auparavant, nous ferons remarquer quelques propriétés de ce groupe.

Ce groupe conserve la variété constituée par les sphères de rayon nul et représentée par l'équation quadratique

$$(3) \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_0 \delta = 0.$$

Il conserve également l'orthogonalité des sphères, qui s'écrit

$$2(x_1 x'_1 + x_2 x'_2 + x_3 x'_3) - x_0 \delta - x'_0 \delta' = 0.$$

En particulier, les sphères de rayon nul ayant leurs centres sur une sphère S sont transformées en sphères de rayon nul ayant leurs centres sur la transformée S' de S .

Ce groupe constitue le groupe fondamental de la Géométrie des sphères, comme le groupe des déplacements sans déformation constitue le groupe fondamental de la Géométrie ponctuelle.

Remarquons enfin que les plans forment, dans le domaine des sphères, une variété qui est caractérisée par l'équation linéaire

$$x_0 = 0$$

et qui est tangente à la quadrique (3), l'élément de contact étant le plan de l'infini.

Le plan de l'infini doit donc aussi être considéré comme une sphère de rayon nul.

II.

SYSTÈMES NUMÉRIQUES DE LIPCHITZ.

Lipchitz (1) a résolu le problème consistant dans la détermination d'un système numérique complexe susceptible de repré-

(1) LIPCHITZ, *Ueber die Summen von Quadraten*. Bonn, Cohen und Sohn, 1886.

des règles de multiplication que l'on peut représenter d'une manière simple en posant

$$i_{ab} = k_a k_b, \quad i_{ba} = k_b k_a, \quad i_{abcd} = k_a k_b k_c k_d, \quad \dots$$

où $k_1, k_2, \dots, k_n$ sont n unités primitives soumises aux règles de multiplication suivantes :

$$k_a k_b = -k_b k_a, \quad k_a^2 = -1.$$

Les expressions Λ forment un système numérique complexe à 2^{n-1} unités indépendantes $s, i_{12}, \dots, i_{1234}, \dots$.

Ces expressions jouissent des propriétés suivantes :

Si les coefficients λ sont soumis aux relations (5), à chaque transformation (4) correspond une expression Λ .

Le produit de deux telles expressions est une expression dans laquelle les coefficients satisfont encore aux relations (5).

Ce produit représente précisément la transformation résultant de la succession des deux premières.

Enfin, si l'on pose

$$\begin{aligned} X &= k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots + k_n x_n, \\ X' &= k_1 x'_1 + k_2 x'_2 + \dots + k_n x'_n, \end{aligned}$$

la transformation (4) peut être représentée symboliquement par l'équation complexe

$$\Lambda X' = X \Lambda.$$

Tels sont les résultats dus à Lipchitz, que nous allons d'abord appliquer directement au cas de cinq variables.

La quantité complexe Λ est alors de la forme

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} \Lambda &= \lambda_0 + \lambda_{23} k_2 k_3 + \lambda_{31} k_3 k_1 + \lambda_{12} k_1 k_2 + \lambda_{14} k_1 k_4 + \lambda_{24} k_2 k_4 \\ &\quad + \lambda_{34} k_3 k_4 + \lambda_{15} k_1 k_5 + \lambda_{25} k_2 k_5 + \lambda_{35} k_3 k_5 + \lambda_{45} k_4 k_5 \\ &\quad + \lambda_{4523} k_4 k_5 k_2 k_3 + \lambda_{4531} k_4 k_5 k_3 k_1 + \lambda_{4512} k_4 k_5 k_1 k_2 \\ &\quad + \lambda_{1234} k_1 k_2 k_3 k_4 + \lambda_{1235} k_1 k_2 k_3 k_5. \end{aligned} \right.$$

Nous grouperons les seize unités du système de la manière suivante :

$$1, \quad i = k_2 k_3, \quad j = k_3 k_1, \quad k = k_1 k_2,$$

$$k_4 k_5, \quad k_4 k_5 i = k_4 k_5 k_2 k_3, \quad k_4 k_5 j = k_4 k_5 k_3 k_1, \quad k_4 k_5 k = k_4 k_5 k_1 k_2,$$

$$k_1 k_2 k_3 k_4, \quad (k_1 k_2 k_3 k_4) i = -k_1 k_4, \quad (k_1 k_2 k_3 k_4) j = -k_2 k_4, \quad (k_1 k_2 k_3 k_4) k = -k_3 k_4,$$

$$k_1 k_2 k_3 k_5, \quad (k_1 k_2 k_3 k_5) i = -k_1 k_5, \quad (k_1 k_2 k_3 k_5) j = -k_2 k_5, \quad (k_1 k_2 k_3 k_5) k = -k_3 k_5.$$

On vérifie d'abord que i, j, k sont les unités quaternioniennes satisfaisant aux règles de multiplication

$$\begin{aligned} i^2 &= -1, & j^2 &= -1, & k^2 &= -1, \\ ij &= -ji = k, & jk &= -kj = i, & ki &= -ik = j. \end{aligned}$$

On voit donc que les seize unités du système numérique complexe considéré sont les produits des quatre unités quaternioniennes

$$1, \quad i, \quad j, \quad k$$

par les quatre unités

$$1, \quad h_1 k_3, \quad h_1 k_2 k_3 k_4, \quad h_1 k_2 k_3 h_5,$$

commutatives avec les premières.

On vérifie également que ces quatre dernières unités forment un système numérique complexe dont les règles de multiplication sont les suivantes :

$$\begin{aligned} (h_1 k_3)^2 &= -1, & (h_1 h_2 k_3 h_4)^2 &= 1, & (h_1 k_2 k_3 h_5)^2 &= 1, \\ (h_1 k_3)(h_1 h_2 k_3 h_4) &= -(h_1 h_2 k_3 h_4)(h_1 k_3) = -h_1 h_2 h_3 h_5, \\ (h_1 k_3)(h_1 h_2 k_3 h_5) &= -(h_1 h_2 k_3 h_5)(h_1 k_3) = -h_1 h_2 h_3 h_4, \\ (h_1 h_2 k_3 h_4)(h_1 h_2 k_3 h_5) &= -(h_1 h_2 k_3 h_5)(h_1 h_2 k_3 h_4) = -h_1 h_5. \end{aligned}$$

Enfin l'expression Λ peut s'écrire

$$(\text{Gibbs}) \quad \Lambda = \lambda_0 - \lambda_{23}i + \lambda_{31}j - \lambda_{12}k \\ \left\{ \begin{aligned} &- h_1 k_3 (\lambda_{45} - \lambda_{1523}i + \lambda_{1531}j - \lambda_{1512}k) \\ &- h_1 h_2 h_3 h_4 (\lambda_{1234} - \lambda_{14}i - \lambda_{24}j - \lambda_{34}k) \\ &- h_1 h_2 k_3 h_5 (\lambda_{1245} - \lambda_{15}i - \lambda_{25}j - \lambda_{35}k). \end{aligned} \right.$$

III.

SYSTÈME NUMÉRIQUE DES QUADRIQUATERNIONS.

Nous allons maintenant remplacer les coefficients λ et les unités du système numérique par d'autres coefficients et d'autres unités susceptibles d'une interprétation géométrique plus directe.

Dans le système d'équations (4) appliqué au cas de cinq variables, opérons le changement de variables

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1, & x_2 &= x_2, & x_3 &= x_3, \\ 2x_4 &= (x_0 - \hat{c})\sqrt{-1}, & 2x_5 &= (x_0 + \hat{c}) \end{aligned}$$

ainsi que le changement correspondant sur variables accentuées.
On a

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 - x_1'^2 - x_2'^2 - x_3'^2 - x_0 \delta.$$

et les équations (4) représenteront alors une transformation linéaire homogène en $x_0, x_1, x_2, x_3, \delta$ laissant invariante l'expression quadratique (2).

Le système d'équations ainsi obtenu prendra, après combinaison convenable des deux dernières, la forme

$$(7) \left\{ \begin{aligned} & \lambda_0 \alpha_1' + \lambda_{21} \alpha_2' + \lambda_{31} \alpha_3' + \frac{\lambda_{45} \sqrt{-1} + \lambda_{51}}{2} \alpha_0' + \frac{\lambda_{41} \sqrt{-1} - \lambda_{51}}{2} \delta, \\ & = \lambda_0 \alpha_1 + \lambda_{12} \alpha_2 + \lambda_{13} \alpha_3 + \frac{\lambda_{14} \sqrt{-1} + \lambda_{15}}{2} \alpha_0 + \frac{\lambda_{14} \sqrt{-1} - \lambda_{15}}{2} \delta, \\ & \lambda_{12} \alpha_1' + \lambda_0 \alpha_2' + \lambda_{32} \alpha_3' + \frac{\lambda_{42} \sqrt{-1} - \lambda_{52}}{2} \alpha_0' - \frac{\lambda_{41} \sqrt{-1} - \lambda_{51}}{2} \delta, \\ & = \lambda_{21} \alpha_1 + \lambda_0 \alpha_2 + \lambda_{23} \alpha_3 + \frac{\lambda_{24} \sqrt{-1} + \lambda_{25}}{2} \alpha_0 + \frac{\lambda_{25} \sqrt{-1} - \lambda_{25}}{2} \delta, \\ & \lambda_{13} \alpha_1' + \lambda_{21} \alpha_2' + \lambda_0 \alpha_3' - \frac{\lambda_{43} \sqrt{-1} + \lambda_{53}}{2} \alpha_0' + \frac{\lambda_{43} \sqrt{-1} - \lambda_{53}}{2} \delta, \\ & = \lambda_{31} \alpha_1 + \lambda_{32} \alpha_2 + \lambda_0 \alpha_3 + \frac{\lambda_{34} \sqrt{-1} + \lambda_{35}}{2} \alpha_0 + \frac{\lambda_{34} \sqrt{-1} - \lambda_{45}}{2} \delta, \\ & \frac{\lambda_{14} \sqrt{-1} + \lambda_{15}}{2} \alpha_1' + \frac{\lambda_{24} \sqrt{-1} - \lambda_{25}}{2} \alpha_2' + \frac{\lambda_{34} \sqrt{-1} + \lambda_{35}}{2} \alpha_3' - (\lambda_0 - \lambda_{54} \sqrt{-1}) \delta, \\ & = \frac{\lambda_{41} \sqrt{-1} + \lambda_{51}}{2} \alpha_1 + \frac{\lambda_{42} \sqrt{-1} + \lambda_{52}}{2} \alpha_2 + \frac{\lambda_{43} \sqrt{-1} + \lambda_{53}}{2} \alpha_3 - (\lambda_0 - \lambda_{45} \sqrt{-1}) \delta, \\ & \frac{\lambda_{14} \sqrt{-1} - \lambda_{15}}{2} \alpha_1' + \frac{\lambda_{24} \sqrt{-1} - \lambda_{25}}{2} \alpha_2' + \frac{\lambda_{34} \sqrt{-1} - \lambda_{35}}{2} \alpha_3' - (\lambda_0 - \lambda_{45} \sqrt{-1}) \alpha_0, \\ & = \frac{\lambda_{41} \sqrt{-1} - \lambda_{51}}{2} \alpha_1 + \frac{\lambda_{42} \sqrt{-1} - \lambda_{52}}{2} \alpha_2 + \frac{\lambda_{43} \sqrt{-1} - \lambda_{53}}{2} \alpha_3 - (\lambda_0 - \lambda_{54} \sqrt{-1}) \alpha_0. \end{aligned} \right.$$

Pour mettre les nouveaux coefficients en évidence dans l'expression de Λ , il suffit de prendre, au lieu des unités $k_4 k_5, k_1 k_2 k_3 k_4, k_1 k_2 k_3 k_5$, d'autres unités μ, ω, ω' définies par les relations

$$k_4 k_5 = \mu \sqrt{-1}, \quad k_1 k_2 k_3 k_4 = -\sqrt{-1} \frac{\omega - \omega'}{2}, \quad k_1 k_2 k_3 k_5 = \frac{\omega' - \omega}{2}.$$

L'expression de Λ devient alors

$$\begin{aligned} \Lambda = & \lambda_0 + \lambda_{23}i + \lambda_{31}j + \lambda_{12}k + \mu(\lambda_{15}\sqrt{-1} + \lambda_{4523}\sqrt{-1}i + \lambda_{4531}\sqrt{-1}j + \lambda_{4512}\sqrt{-1}k) \\ & + \omega \left(-\frac{\lambda_{1234}\sqrt{-1} + \lambda_{1235}}{2} + \frac{\lambda_{15}\sqrt{-1} + \lambda_{155}}{2}i - \frac{\lambda_{25}\sqrt{-1} + \lambda_{255}}{2}j + \frac{\lambda_{35}\sqrt{-1} + \lambda_{355}}{2}k \right) \\ & - \omega' \left(-\frac{\lambda_{1235}\sqrt{-1} + \lambda_{1234}}{2} + \frac{\lambda_{15}\sqrt{-1} + \lambda_{155}}{2}i + \frac{\lambda_{25}\sqrt{-1} + \lambda_{255}}{2}j + \frac{\lambda_{35}\sqrt{-1} + \lambda_{355}}{2}k \right), \end{aligned}$$

ou

$$(6^{ter}) \quad \Lambda = q + \mu q_1 + \omega q_2 + \omega' q_3,$$

en désignant par q, q_1, q_2 et q_3 des quaternions que nous écrirons dorénavant

$$\begin{aligned} q &= w + ix + jy + kz, \\ q_1 &= w_1 + ix_1 + jy_1 + kz_1, \\ q_2 &= w_2 + ix_2 + jy_2 + kz_2, \\ q_3 &= w_3 + ix_3 + jy_3 + kz_3, \end{aligned}$$

où x, x_1, x_2, x_3 n'ont aucun rapport de signification avec les variables du paragraphe II.

Les équations (7) de la transformation deviennent, par l'introduction des nouveaux coefficients,

$$(7^{bis}) \quad \left\{ \begin{aligned} w\alpha'_1 - x\alpha'_2 + y\alpha'_3 - x_2\alpha'_0 - x_3\delta' &= w\alpha_1 + x\alpha_2 - y\alpha_3 + x_2\alpha_0 + x_3\delta, \\ z\alpha'_1 - w\alpha'_2 - x\alpha'_3 - y_2\alpha'_0 - y_3\delta' &= z\alpha_1 + w\alpha_2 + x\alpha_3 + y_2\alpha_0 + y_3\delta, \\ -y\alpha'_1 + x\alpha'_2 + w\alpha'_3 - z_2\alpha'_0 - z_3\delta' &= y\alpha_1 - x\alpha_2 + w\alpha_3 + z_2\alpha_0 + z_3\delta, \\ x_2\alpha'_1 + y_2\alpha'_2 + z_2\alpha'_3 - (w - w_1)\delta' &= -x_2\alpha_1 - y_2\alpha_2 - z_2\alpha_3 - (w - w_1)\delta, \\ x_3\alpha'_1 + y_3\alpha'_2 + z_3\alpha'_3 - (w + w_1)\alpha'_0 &= -x_3\alpha_1 - y_3\alpha_2 - z_3\alpha_3 - (w - w_1)\alpha_0. \end{aligned} \right.$$

Ces équations ne contiennent que onze paramètres. Les cinq autres, x_1, y_1, z_1, w_2 et w_3 , sont donnés par les relations (5), qui deviennent

$$(7^{bis}) \quad \left\{ \begin{aligned} wx_1 &= w_1x + 2(y_2z_3 - z_2y_3), \\ wy_1 &= w_1y + 2(z_2x_3 - x_2z_3), \\ wz_1 &= w_1z + 2(x_2y_3 - y_2x_3), \\ ww_2 - xx_2 + yy_2 + zz_2 &= 0, \\ ww_3 + xx_3 + yy_3 + zz_3 &= 0. \end{aligned} \right.$$

Enfin, les règles de multiplication du système se changent en

les suivantes :

$$\begin{aligned} \mu^2 &= 1, & \omega^2 &= 0, & \omega'^2 &= 0, \\ \omega\mu &= -\mu\omega = \omega, & \omega'\mu &= -\mu\omega' = -\omega', \\ \omega\omega' &= 2(\mu - 1), & \omega'\omega &= -2(\mu + 1). \end{aligned}$$

Nous sommes donc en possession d'un système numérique complexe à seize unités, que nous appellerons *système des quadriquaternions*, comprenant des quantités [celles qui satisfont aux relations (*5^{bis}*)] susceptibles de représenter les transformations conformes de l'espace.

IV.

CALCUL GÉOMÉTRIQUE.

Nous allons maintenant donner au calcul des quadriquaternions une forme qui le rende apte à des applications géométriques.

Remarquons d'abord que, si le quaternion q_3 est nul, Λ se réduit à un *triquaternion*

$$\Lambda = q + \mu q_1 + \omega q_2.$$

Nous avons montré que le *calcul des triquaternions* constitue une analyse géométrique (¹).

Le calcul des quadriquaternions n'en est que le prolongement, comme nous allons le montrer.

Un triquaternion satisfaisant aux conditions (*5^{bis}*) (qui se simplifient pour un triquaternion) représente une transformation par similitude, et, en effet, si l'on fait dans les équations

$$x_3 = y_3 = z_3 = 0,$$

on voit que pour $x = 0$ on a $x'_0 = 0$, c'est-à-dire que les plans se transforment en plans, et par suite que la transformation conforme se réduit à une transformation par similitude (succession d'une homothétie et d'une rotation).

Un triquaternion peut s'écrire

$$w + l + p,$$

(¹) COMBEBIAC, *Calcul des triquaternions* (Bulletin de la Société mathématique de France, t. XXII; 1899).

où w est une quantité vulgaire et où l représente ce que nous avons appelé, dans le Mémoire ci-dessus mentionné, un élément linéaire, et p un plan.

L'élément linéaire s'écrit

$$ix + jy + kz + \mu w_1 + \omega (iv_2 + jy_2 + kz_2)$$

et peut se mettre d'une infinité de manières sous la forme de la somme d'un point et d'une droite, et d'une seule manière sous la forme de la somme d'un point et d'une droite passant par ce point.

Enfin un plan s'écrit

$$\mu (ix_1 + jy_1 + kz_1) + \omega w_2.$$

Dans cette interprétation, un point est représenté par la transformation par symétrie qu'il détermine, la droite par la rotation de 180° dont elle est l'axe, et le plan également par la transformation par symétrie qu'il détermine.

Nous allons étendre ce mode d'interprétation aux quadriquaternions. Il convient tout d'abord d'avoir une représentation de la sphère, que nous avons introduite comme élément de l'espace. Il est naturel de représenter une sphère par l'inversion (transformations par rayons vecteurs réciproques) dans laquelle elle reste invariante.

A la vérité, les équations (γ^{bis}) sont inaptes à représenter une inversion, et, en particulier, une symétrie par rapport à un plan. Pour avoir les équations d'une inversion, il faut introduire à la place des coefficients w, x, y, z, w_1 les coefficients x_1, y_1, z_1, w_2, w_3 au moyen des relations (δ^{bis}) et annuler ensuite $x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3$.

On verra ainsi facilement qu'une sphère est représentée par un quadriquaternion de la forme

$$\mu (ix_1 + jy_1 + kz_1) + \omega w_2 + \omega' w_3.$$

On parvient au même résultat en partant de l'expression par laquelle nous avons déjà représenté la sphère considérée comme l'élément sur lequel s'opèrent les transformations étudiées.

Cette expression s'écrit en effet

$$(8) \quad \sqrt{k_1 z_1 + k_2 z_2 + k_3 z_3 + k_4 \frac{z_0 - \hat{z}}{r}} \sqrt{-1} \cdot k_4 \frac{z_0 - \hat{z}}{r}.$$

D'autre part, on vérifie que l'on peut poser

$$k_1 k_2 k_3 k_4 k_5 = \sqrt{-1},$$

sans contredire en rien les relations fondamentales

$$k_a^2 = -1, \quad k_a k_b = -k_b k_a,$$

d'où se déduisent toutes les règles de multiplication du système numérique.

On aura alors

$$\begin{aligned} k_1 k_2 k_4 k_5 &= k_3 \sqrt{-1}, & k_1 k_2 k_4 k_5 &= -k_3 \sqrt{-1}, \\ k_4 k_5 k_2 k_3 &= k_1 \sqrt{-1}, & k_4 k_5 k_3 k_1 &= k_2 \sqrt{-1}, & k_4 k_5 k_1 k_2 &= k_3 \sqrt{-1}, \end{aligned}$$

et l'expression (8) devient

$$\begin{aligned} s &= -k_4 k_5 \sqrt{-1} (k_2 k_3 x_1 + k_3 k_1 x_2 + k_1 k_2 x_3) \\ &\quad - \left(\frac{k_1 k_2 k_3 k_4 \sqrt{-1} - k_1 k_2 k_3 k_5}{2} \right) x_0 + \frac{k_1 k_2 k_3 k_4 \sqrt{-1}}{2} x_1 - \frac{k_1 k_2 k_3 k_5}{2} x_2 \\ &\quad + (i x_1 - j x_2 + k x_3) = \omega' x_0 + \omega \hat{\sigma}. \end{aligned}$$

Le centre de la sphère a pour coordonnées

$$\frac{x_1}{x_0}, \quad \frac{x_2}{x_0}, \quad \frac{x_3}{x_0},$$

et le carré du rayon a pour valeur

$$\frac{\hat{\sigma}^2}{x_0^2} + \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{x_0^2}.$$

On vérifiera qu'un quadriquaternion peut, d'une manière indépendante du système de coordonnées, se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} r &= w + l + p, \\ &= Gr + Lr + Pr, \end{aligned}$$

où w (ou Gr) est une quantité scalaire, p (ou Pr) une sphère (pouvant devenir un plan), et l (ou Lr) une expression de la forme

$$ix + jy + kz + iw_1 - \omega (ix_2 + jy_2 + kz_2) + \omega (ix_3 + jy_3 + kz_3).$$

Une telle expression est caractéristique d'une transformation conforme infinitésimale, ou plutôt du groupe à un paramètre engendré par cette transformation.

En effet, une transformation infinitésimale peut s'écrire

$$1 + ldt,$$

dt étant une quantité scalaire infinitésimale; car tous les autres termes du quadriquaternion sont déterminés par les relations ($\S^{bis}$) et sont des infiniment petits du second ordre.

Dans le cas où la transformation infinitésimale est une transformation par similitude, l se réduit à ce que nous avons appelé un *élément linéaire*.

Les règles de la multiplication sont les mêmes que dans le calcul des triquaternions, savoir :

$$\begin{aligned} G.H' &= G'.H, & L.H' &= -L'.H, & P.H' &= P'.H, \\ G.lp &= 0, & L.lp &= L'.p, & P.lp &= P'.p, \\ G.pp' &= G'.p'p, & L.pp' &= -L'.p'p, & P.pp' &= 0. \end{aligned}$$

Le calcul des triquaternions, comme analyse géométrique, présente la grave défectuosité de ne pas donner directement l'expression d'une droite joignant deux points donnés et celle d'un plan passant par une droite et un point donné.

Le calcul des quadriquaternions ne présente pas cette lacune.

En effet, soient M et M' deux sphères de rayon nul, m et m' les centres de ces sphères; on a

$$LmM' = Lm'M = \text{droite } mm'.$$

De même, si d est une droite, PmM' représente le plan déterminé par le point m et la droite d .

Il est à remarquer que PmM' , qui représente la sphère décrite sur mm' comme diamètre, est ce que Grassmann a appelé le *produit intérieur de deux points*. C'est ainsi que Grassmann a été amené à introduire la sphère comme élément dans son calcul géométrique.

Il nous faudrait beaucoup trop allonger cette Note pour exposer méthodiquement l'emploi du calcul des quadriquaternions comme procédé d'analyse géométrique.

Il nous suffit d'avoir montré que ce système numérique constitue :

1° Une représentation du groupe géométrique des transformations conformes, le plus important après celui des transformations par similitude;

2^e Une analyse géométrique comprenant celle que nous avons déjà exposée ici sous le nom de *calcul des triquaternions* et qui se complète ainsi d'une manière heureuse.

SUR UN PROBLÈME RELATIF AUX LIGNES ASYMPTOTIQUES:

Par M. E. GOURSAT.

1. On connaît un certain nombre de surfaces dont les lignes asymptotiques de l'un des systèmes sont des courbes égales. Ce sont les surfaces réglées, les surfaces de révolution et les surfaces hélicoïdes; il m'a paru intéressant de rechercher si l'on avait ainsi toutes les surfaces jouissant de cette curieuse propriété (¹).

Le problème peut se formuler ainsi : *Trouver une courbe gauche Γ , telle qu'on puisse lui imprimer un mouvement continu, dans lequel elle reste constamment ligne asymptotique de la surface S qu'elle engendre.* Considérons la courbe mobile dans une de ses positions; soient M un point de cette courbe, Mt la tangente à la courbe en ce point, Mc la direction de la vitesse du point M à l'instant considéré, et MN la normale à la surface. Cette droite MN est normale à la vitesse d'un de ses points, le point M lui-même, et, d'autre part, elle est la binormale de la courbe Γ , puisqu'on suppose que Γ est une ligne asymptotique de S . Mais on sait que, dans un corps solide en mouvement, les droites qui, à un moment donné, sont normales à la vitesse d'un de leurs points appartiennent à un complexe linéaire ayant pour axe l'axe du mouvement hélicoïdal tangent. *Les courbes gauches Γ répondant à la question sont donc les courbes dont les binormales appartiennent à un complexe linéaire.*

Soit Γ une courbe gauche possédant cette propriété. Deux cas peuvent se présenter. Si les binormales appartiennent à *un seul* complexe linéaire, l'axe du mouvement hélicoïdal tangent coïncide à chaque instant avec l'axe du complexe, et le pas de la vis instan-

(¹) Cette Note était déjà rédigée quand j'ai appris, par une obligeante communication de M. Bricard, que M. Hazzidakis s'était occupé de cette question et de questions analogues (*Journal de Crelle*, t. 95, p. 120; t. 98, p. 49). Cependant, la solution que j'indique me paraît plus intuitive et plus affranchie de calcul; d'un autre côté, M. Hazzidakis n'a pas cherché à ramener à la forme la plus simple l'équation différentielle du second ordre dont dépend le problème.

tanée est constant aussi. Cet axe est donc fixe par rapport à la courbe mobile Γ et, par suite, il est fixe aussi dans l'espace. Le mouvement de la courbe Γ se réduit donc à un mouvement hélicoïdal, et la surface engendrée S est une surface hélicoïde. Si le pas de la vis instantanée est nul, le mouvement se réduit à une rotation, et les binormales à la courbe Γ rencontrent l'axe.

2. Pour obtenir d'autres solutions du problème, il faut donc que les binormales de la courbe Γ fassent partie d'une infinité de complexes linéaires et, par conséquent, appartiennent à une congruence linéaire. Supposons que nous ayons obtenu une courbe gauche Γ possédant cette propriété; les binormales appartiennent à une infinité de complexes linéaires dont les axes engendrent un conoïde de Plücker, et chaque génératrice de ce conoïde est l'axe d'un complexe linéaire déterminé qui renferme toutes les binormales de la courbe Γ . On connaîtra donc le lieu des axes des mouvements hélicoïdaux tangents dans le corps solide, que l'on peut supposer représenté par un trièdre trirectangle invariablement lié à la courbe Γ ; de plus, on connaîtra aussi le pas de la vis instantanée correspondant à chacun de ces axes. Le problème se décompose donc de lui-même en deux problèmes distincts :

1° *Trouver les courbes gauches dont les binormales font partie d'une congruence linéaire;*

2° *Étant donnée une surface réglée (Σ), invariablement liée à un corps solide, trouver les mouvements de ce corps solide pour lesquels la surface (Σ) est le lieu des axes centraux, le pas de la vis instantanée étant donné pour chacune des génératrices de (Σ).*

3. Je m'occuperai d'abord de ce dernier problème. Dans le cas dont il s'agit, la surface réglée (Σ) est un conoïde de Plücker, mais la solution peut être présentée sous forme générale. Le corps solide en mouvement étant supposé réduit à un trièdre trirectangle, et les lettres $p, q, r, \xi, \eta, \zeta$ ayant la signification habituelle ⁽¹⁾, on sait que l'axe central du mouvement à l'instant t

(1) DARBOUX, *Théorie des surfaces*, t. I, Chap. I^{er}.

est représenté par les équations

$$(1) \quad \frac{\xi + qz - rz}{p} = \frac{\gamma + rx - pz}{q} = \frac{z + py - qr}{r},$$

tandis que le pas de la vis instantanée a pour expression (1)

$$(2) \quad \frac{\xi p + \gamma q - z r}{p^2 + q^2 + r^2}.$$

Soient

$$\begin{cases} x = ar + m, \\ y = br + n \end{cases}$$

les équations d'une génératrice G de la surface (Σ), a , b , m , n étant des fonctions d'une variable indépendante t , que l'on peut toujours regarder comme représentant le temps.

En écrivant que la génératrice coïncide avec l'axe central (1) à l'instant t et que l'expression (2) est une fonction connue de t , on établit *cinq* relations entre p , q , r , ξ , γ , z et la variable t . On peut donc prendre arbitrairement une de ces six fonctions de t , et le mouvement le plus général répondant à la question dépend d'une fonction arbitraire. La détermination effective de ces mouvements se ramène, comme on le sait, à l'intégration du système

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{dz}{dt} = \beta r - \gamma q, \\ \frac{d\beta}{dt} = \gamma p - z r, \\ \frac{d\gamma}{dt} = z q - \beta p \end{cases}$$

et à des quadratures. L'intégration du système (3) se ramène lui-même à l'intégration de l'équation de Riccati

$$(4) \quad \frac{d\sigma}{dt} = -ir\sigma + \frac{q-ip}{2} + \frac{q+ip}{2}\sigma^2.$$

Cette équation s'intégrera par des quadratures dès qu'on en connaîtra une solution particulière. Or, si l'on écrit qu'elle admet pour solution une fonction donnée $\sigma = f(t)$, on établit entre

(1) KOENIGS, *Leçons de Cinématique*, p. 105.

p, q, r et t une nouvelle relation qui permettra de déterminer $\xi, \eta, \zeta, p, q, r$ en fonction de t . En définitive, si l'on connaît une courbe gauche Γ dont les binormales appartiennent à une congruence linéaire, on obtiendra par des quadratures tous les mouvements à un paramètre dans lesquels cette courbe Γ engendre une surface S dont elle reste ligne asymptotique dans toutes ses positions. Ces mouvements dépendent d'une fonction arbitraire d'une variable indépendante.

4. Pour avoir des surfaces répondant à la question, il suffirait donc de connaître des courbes gauches Γ dont les binormales appartiennent à une congruence linéaire. La recherche de ces courbes conduit à une équation différentielle du second ordre qui ne paraît pas intégrable. Je développerai seulement les calculs en supposant que les droites focales de la congruence sont rectangulaires. Prenons pour axe des x la perpendiculaire commune à ces deux droites, pour origine le point à égale distance des deux droites, et pour axes Oz et Oy des parallèles à ces droites. Elles seront représentées respectivement, dans ce système d'axes, par les équations

$$\Delta \begin{cases} z = 0, \\ x = h, \end{cases} \quad \Delta' \begin{cases} y = 0, \\ x = -h; \end{cases}$$

toute droite D de la congruence sera représentée par des équations de la forme

$$(5) \quad y = \lambda(x + h), \quad z = \mu(x - h),$$

λ et μ étant deux paramètres variables. Lorsque l'on établit une relation arbitraire entre λ et μ , cette droite engendre une surface réglée dont les droites Δ et Δ' sont deux directrices rectilignes. Nous allons chercher quelle relation on doit établir entre λ et μ pour que les droites D ainsi obtenues soient les binormales d'une courbe gauche Γ . Soient x, y, z les coordonnées du point où la courbe Γ admet la droite D pour binormale; ces coordonnées vérifient les relations (5), et l'on doit avoir en outre

$$(6) \quad dx - \lambda dy + \mu dz = 0,$$

$$(7) \quad d^2x + \lambda d^2y + \mu d^2z = 0.$$

La dernière de ces conditions peut être remplacée, comme on le sait, par la suivante

$$(8) \quad d\lambda \, dy + d\mu \, dz = 0$$

obtenue en différentiant la première (6), et le problème revient à trouver cinq fonctions x, y, z, λ, μ d'une variable indépendante vérifiant les quatre équations (5), (6) et (8).

Des relations (5) on tire

$$dy = (x + h) d\lambda + \lambda \, dx, \quad dz = (x - h) d\mu + \mu \, dx,$$

et, en portant ces expressions de dy et dz dans (6) et (8), il vient

$$(9) \quad (1 + \lambda^2 + \mu^2) dx - x(\lambda \, d\lambda + \mu \, d\mu) - h(\lambda \, d\lambda - \mu \, d\mu) = 0,$$

$$(10) \quad (\lambda \, d\lambda - \mu \, d\mu) dx + x(d\lambda^2 + d\mu^2) - h(d\lambda^2 - d\mu^2) = 0.$$

On tire de ces équations

$$(11) \quad dx[d\lambda^2 + d\mu^2 + (\lambda \, d\mu - \mu \, d\lambda)^2] + 2h(\lambda \, d\mu - \mu \, d\lambda) d\lambda \, d\mu = 0,$$

$$(12) \quad x[d\lambda^2 + d\mu^2 + (\lambda \, d\mu - \mu \, d\lambda)^2] + h[(1 + \mu^2) d\lambda^2 - (1 + \lambda^2) d\mu^2] = 0;$$

en différentiant l'équation (12), il vient encore

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} & dx[d\lambda^2 + d\mu^2 + (\lambda \, d\mu - \mu \, d\lambda)^2] \\ & + 2x[d\lambda \, d^2\lambda + d\mu \, d^2\mu + (\lambda \, d\mu - \mu \, d\lambda)(\lambda \, d^2\mu - \mu \, d^2\lambda)] \\ & + 2h[(1 + \mu^2) d\lambda \, d^2\lambda - (1 + \lambda^2) d\mu \, d^2\mu - d\lambda \, d\mu(\mu \, d\lambda - \lambda \, d\mu)] = 0. \end{aligned} \right.$$

En retranchant membre à membre les relations (11) et (13), il reste, en divisant par 2,

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} & x[d\lambda \, d^2\lambda + d\mu \, d^2\mu + (\lambda \, d\mu - \mu \, d\lambda)(\lambda \, d^2\mu - \mu \, d^2\lambda)] \\ & + h[(1 + \mu^2) d\lambda \, d^2\lambda - (1 + \lambda^2) d\mu \, d^2\mu - 2d\lambda \, d\mu(\mu \, d\lambda - \lambda \, d\mu)] = 0. \end{aligned} \right.$$

Enfin, en éliminant x entre les deux relations (12) et (14), on obtient l'équation différentielle cherchée entre λ et μ . La variable μ étant prise pour variable indépendante, on a $d^2\mu = 0$, et l'équation s'écrit

$$[(1 + \mu^2) d\lambda \, d^2\lambda - 2d\lambda \, d\mu(\mu \, d\lambda - \lambda \, d\mu)][d\lambda^2 + d\mu^2 + (\lambda \, d\mu - \mu \, d\lambda)^2] = [(1 + \mu^2) d\lambda^2 - (1 + \lambda^2) d\mu^2][d\lambda \, d\mu - \lambda \, \mu \, d\lambda^2 \, d\mu^2],$$

ou, en posant $\lambda' = \frac{d\lambda}{d\mu}$, $\lambda'' = \frac{d^2\lambda}{d\mu^2}$,

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} & 2\lambda'(1 + \lambda^2 + \mu^2) - \lambda\mu[1 + \lambda'^2 + (\lambda - \mu\lambda')^2] \lambda'' \\ & - 2\lambda'(\mu\lambda' - \lambda)[1 + \lambda'^2 + (\lambda - \mu\lambda')^2] = 0. \end{aligned} \right.$$

Cette équation prend une forme plus simple si on lui applique la transformation de Legendre, en posant

$$X = \lambda', \quad Y = 2\lambda' - \lambda;$$

on a ensuite

$$Y' = \frac{dY}{dX} = 2, \quad Y'' = \frac{dY'}{dX} = \frac{1}{\lambda},$$

et inversement

$$2 = Y', \quad \lambda = XY' - Y, \quad \lambda' = X, \quad Y' = \frac{1}{\lambda}.$$

L'équation transformée est donc

$$(16) \quad \lambda^2 + XY(1 + X^2 - Y^2)Y'' \\ + X[1 + Y^2 + (XY' - Y)^2] - Y(XY' - Y)(1 + X^2 + Y^2) = 0;$$

c'est une équation de la forme (*)

$$(17) \quad \frac{d^2Y}{dX^2} + a_1\left(\frac{dY}{dX}\right)^3 + 3a_2\left(\frac{dY}{dX}\right)^2 + 3a_3\frac{dY}{dX} + a_4 = 0,$$

les coefficients a_1, a_2, a_3, a_4 étant des fonctions des variables X, Y seulement, qui ont ici les valeurs suivantes

$$a_1 = 0, \quad 3a_2 = \frac{1}{2Y} - \frac{Y}{1 - X^2 - Y^2}, \quad 3a_3 = \frac{1}{2X} - \frac{2X}{1 - X^2 + Y^2}, \\ a_4 = \frac{1 + Y^2}{Y(1 - X^2 - Y^2)}.$$

Observons que les coefficients a_2 et a_3 satisfont à la condition

$$\frac{\partial a_3}{\partial Y} = 2 \frac{\partial a_2}{\partial X};$$

on pourra donc amener l'équation (16) à la forme simple

$$(18) \quad \frac{d^2Y}{dX^2} = F(X, Y),$$

en prenant pour inconnue nouvelle une fonction $V(X, Y)$ satis-

(*) Les équations de cette espèce ont été étudiées par M. Roger Liouville (*Journal de l'École Polytechnique*, Cahiers LVII et LIX), et l'on pourrait essayer d'appliquer à l'équation (16) les méthodes de ce géomètre.

faisant aux deux relations compatibles

$$\frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} = 3a_2 \frac{\partial V}{\partial Y}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial X \partial Y} = 3a_3 \frac{\partial V}{\partial Y},$$

d'où l'on tire

$$\log \frac{\partial V}{\partial Y} = \int \frac{3a_3}{2} dX + a_2 dY.$$

En remplaçant a_3 et a_2 par leurs valeurs, on a ici

$$\log \frac{\partial V}{\partial Y} = \frac{1}{4} \log X - \frac{1}{2} \log Y - \frac{1}{2} \log (1 + X^2 + Y^2),$$

$$\frac{\partial V}{\partial Y} = X^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{Y}{1 + X^2 + Y^2}}.$$

et, par suite,

$$V = X^{\frac{1}{2}} \int \frac{Y dY}{\sqrt{Y(1 + X^2 + Y^2)}}.$$

On voit que, dans l'équation réduite (18), entrent des transcendentes de la théorie des fonctions elliptiques.

SUR LA DÉFORMATION DES QUADRIQUES :

PAR M. SERVANT.

1. Soit

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

l'élément linéaire d'une quadrique quelconque rapportée à ses génératrices rectilignes et soit

$$\delta' du dv$$

la seconde forme quadratique relative à cette surface; la condition nécessaire et suffisante pour que cette surface soit du deuxième degré est

$$\frac{1}{4} \frac{11}{2} \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \frac{22}{1} \frac{1}{4} = 0.$$

Pour obtenir une surface S' applicable sur la quadrique donnée, il suffit d'intégrer le système d'équations (notation de M. Bianchi,

Géométrie différentielle,

$$\begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial v} - \frac{\partial D'}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial v} \log \varphi D - \frac{\partial}{\partial u} \log \varphi D &= 0, & DD - D'^2 &= \varphi^2, \\ \frac{\partial D'}{\partial u} - \frac{\partial D'}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial v} \log \varphi D' + \frac{\partial}{\partial u} \log \varphi D' &= 0, & \varphi' &= \frac{\varphi}{H} = \sqrt{-\frac{1}{RR}}, \end{aligned}$$

ce qui s'écrit encore

$$(1) \quad \Omega \frac{\partial \Delta'}{\partial u} = \frac{\partial \Delta}{\partial v}, \quad \Omega \frac{\partial \Delta}{\partial v} = \frac{\partial \Delta}{\partial u}, \quad \Delta \Delta' = \Omega^2 (\Delta'^2 - 1),$$

où l'on a posé

$$\Delta = \varphi D, \quad \Delta' = \varphi D', \quad \Delta' = \frac{D'}{\varphi}, \quad \Omega = \varphi \varphi' = \frac{\varphi^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\Delta}}.$$

L'équation du réseau conjugué commun à S et S' s'écrit

$$\Delta du^2 - \Delta' dv^2 = 0.$$

2. La forme quadratique du premier membre jouit d'une propriété remarquable : elle a sa courbure nulle; on peut donc déterminer le réseau conjugué commun par quadratures; on aura

$$(2) \quad \begin{cases} e^{i\lambda} (\sqrt{\Delta} du - \sqrt{\Delta'} dv) = dx, \\ e^{-i\lambda} (\sqrt{\Delta} du + \sqrt{\Delta'} dv) = d\beta; \end{cases}$$

on trouve de suite le facteur intégrant

$$e^{-2i\lambda} = \Delta' + \sqrt{\Delta'^2 - 1}, \quad e^{2i\lambda} = \Delta' - \sqrt{\Delta'^2 - 1}.$$

Des équations (2) on tire

$$(3) \quad \begin{cases} \sqrt{\Delta} du = e^{-i\lambda} dx - e^{i\lambda} d\beta, \\ \sqrt{\Delta'} dv = -e^{-i\lambda} dx + e^{i\lambda} d\beta. \end{cases}$$

Si l'on fait le changement de variables défini par les équations (3), la seconde forme quadratique relative à la quadrique S devient

$$- \frac{\varphi'(\Delta' - \sqrt{\Delta'^2 - 1})}{2\Omega\sqrt{\Delta'^2 - 1}} dx^2 + \frac{\varphi'(\Delta' + \sqrt{\Delta'^2 - 1})}{2\Omega\sqrt{\Delta'^2 - 1}} d\beta^2.$$

Désignons, comme d'usage, par D et D' les coefficients de

$dx^2 d\beta^2$; ces coefficients seront liés par la relation

$$(1) \quad D + D'' = -\frac{\delta'}{\Omega} = -\frac{1}{\tilde{\rho}},$$

qui caractérise les réseaux conjugués cycliques des quadriques.

3. La forme quadratique relative à la surface S' est

$$\frac{\Delta}{\tilde{\rho}} du^2 + 2\delta'\Delta' du dv + \frac{\Delta}{\tilde{\rho}} dv^2;$$

si nous effectuons le changement de variables défini par les équations (3), elle devient

$$\frac{1}{2\tilde{\rho}\sqrt{\Delta'^2-1}} (-dx^2 + d\beta^2).$$

Les coefficients de dx^2 et de $d\beta^2$ seront donc liés par la relation

$$D_1 + D_1'' = 0,$$

ce qui montre que le réseau $\alpha\beta$ est sur la surface S un réseau isotherme conjugué : proposition déjà établie par une autre méthode par M. Darboux (*A. E. N. S.*, 1900).

4. En utilisant les formules de Gauss, on peut facilement calculer tous les éléments relatifs aux surfaces S et S' et à leur représentation sphérique. Calculons, en particulier, les crochets de Christoffel relatifs à l'élément linéaire commun à S et S' ; il vient de suite

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\} &= \frac{1}{\tilde{\rho}} \frac{\partial}{\partial x} \log \frac{D}{\tilde{\rho}^3}, & \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \beta} \log \frac{D}{\tilde{\rho}}, & \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} &= -\frac{1}{2} \frac{D''}{D} \frac{\partial}{\partial x} \log D \tilde{\rho}, \\ \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix} \right\} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \beta} \log \frac{D''}{\tilde{\rho}^3}, & \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \log \frac{D}{\tilde{\rho}}, & \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} &= -\frac{1}{2} \frac{D}{D''} \frac{\partial}{\partial \beta} \log D \tilde{\rho}. \end{aligned}$$

Si l'on pose

$$\left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} = \frac{\partial a}{\partial \beta}, \quad \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} = \frac{\partial b}{\partial x},$$

on voit, à l'aide des formules de Gauss, que les coordonnées de la surface S seront les solutions communes aux deux équations du

second ordre

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 x}{\partial \beta^2} = \frac{\partial a}{\partial \alpha} \frac{\partial x}{\partial \alpha} - \frac{\partial b}{\partial \beta} \frac{\partial x}{\partial \beta}, \\ \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{\partial a}{\partial \beta} \frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial b}{\partial \alpha} \frac{\partial x}{\partial \beta}, \end{cases}$$

qui formeront alors un système en involution

On calculerait de même les $\begin{pmatrix} ik \\ l \end{pmatrix}$ relatifs à la représentation sphérique de S; on a, en particulier,

$$\begin{pmatrix} 12 \\ 1 \end{pmatrix}' = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \beta} \log D', \quad \begin{pmatrix} 12 \\ 2 \end{pmatrix}' = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \log D' z.$$

On en déduit de suite la proposition suivante : *Pour qu'un réseau d'une quadrique soit un réseau conjugué persistant dans une déformation continue, il faut que l'on ait*

$$\frac{D}{D''} = \frac{A(x)}{B(\beta)},$$

c'est-à-dire que le réseau soit isotherme conjugué sur la quadrique. On peut retrouver ainsi aisément les résultats connus relatifs à la déformation des surfaces de révolution donnés par Bour et Ossian Bonnet.

§. On peut écrire sous bien des formes différentes les équations du problème de la déformation des quadriques. Si l'on part du système (1), on peut ramener le problème à l'intégration d'une équation du second ordre linéaire par rapport aux dérivées secondes.

On peut aussi chercher la surface S' rapportée au réseau conjugué commun en utilisant les propriétés données précédemment; on sera ainsi conduit à un système de deux équations aux dérivées partielles du second ordre de forme assez compliquée. La méthode la plus simple, semble-t-il, consiste à chercher les réseaux conjugués des quadriques qui sont susceptibles de se conserver dans une déformation (les réseaux C de M. Guichard). Ces réseaux sont caractérisés par l'équation (4), et le problème est alors le suivant : *Ramener la seconde forme quadratique d'une quadrique à la forme*

$$D dx^2 + D' d\beta^2,$$

D et D' étant liés par l'équation (4).

Supposons la quadrique rapportée à un système (uv) quelconque de coordonnées curvilignes; on peut, soit chercher à déterminer u et v en fonction de α et β , soit chercher à déterminer α et β en fonction de u et v . La première méthode, que j'ai déjà utilisée (*B. S. M.*, 1901) ⁽¹⁾, conduit pour chacune des fonctions u et v à deux équations aux dérivées partielles du troisième ordre; la seconde donne un résultat plus simple: elle conduit pour chacune des fonctions α et β à une équation aux dérivées partielles du second ordre que l'on peut immédiatement écrire en se servant des paramètres différentiels relatifs à la forme quadratique donnée; on aura

$$\Delta(\alpha\beta) = 0, \quad \frac{1}{\Delta(\alpha)} + \frac{1}{\Delta(\beta)} + \frac{1}{\rho} = 0.$$

Si u et v sont les paramètres des génératrices rectilignes, il vient simplement

$$(5) \quad pq' + qp' = 0, \quad \frac{1}{pq} + \frac{1}{p'q'} + \frac{2}{\Omega} = 0$$

et la fonction α sera donnée par l'équation

$$(6) \quad 2(pq + \Omega)s - q^2r - p^2t + pq^2 \frac{\partial}{\partial u} \log \Omega + p^2q \frac{\partial}{\partial v} \log \Omega = 0;$$

les équations (5) permettent d'en déduire β par quadratures. Cette équation linéaire par rapport aux dérivées du second ordre et ne contenant pas α est de forme assez simple. Dans le cas de la sphère, à toute solution de cette équation on peut faire correspondre une surface à courbure totale constante dont on pourra calculer tous les éléments par quadratures. Le problème de la recherche des surfaces dont les rayons de courbure sont fonctions l'un de l'autre peut également se ramener à une équation de la forme (6).

On peut trouver également une équation du second ordre de même forme que (6) en cherchant, suivant une méthode donnée par M. Darboux, les paramètres des asymptotiques de la surface S' . Dans le cas général on a, pour déterminer ces quantités, deux équations du second ordre; dans le cas des quadriques, elles se

⁽¹⁾ Voir aussi RAFFY, *Comptes rendus*, 1901.

ramènent à deux équations du premier ordre qui ne contiennent pas les fonctions inconnues, et, par conséquent, le problème se ramène à l'intégration d'une équation de même forme que (6), mais elle est un peu moins simple.

DÉTERMINATION DES COURBES ALGÈBRIQUES DE DEGRÉ DONNÉ QU'ON PEUT TRACER SUR LA SURFACE DE L'ONDE :

Par M. G. HUMBERT.

Je rappellerai d'abord quelques propositions établies dans mon Mémoire sur les fonctions abéliennes singulières (*Journal de Mathématiques*, 5^e série, t. V).

Soit un système de fonctions abéliennes à deux variables, u et v , admettant comme périodes normales

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & g & h \\ 0 & 1 & h & g' \end{pmatrix},$$

ces fonctions sont ce que j'appelle *singulières*, si les quantités g , h , g' sont liées par une relation qui peut être ramenée au type

$$(1) \quad \alpha g' + \beta h - g = 0,$$

α et β étant entiers.

En désignant par l et k deux entiers, appelons *fonctions intermédiaires normales*, d'indices l , k , les fonctions entières de u , v qui satisfont aux équations

$$(2) \quad \begin{cases} F(u + 1, v) = e^{i\omega\pi l} F(u, v), \\ F(u, v + 1) = e^{i\phi\pi k} F(u, v), \\ F(u - g, v + h) = e^{i\theta\pi l} e^{2i\pi l} \cdot lu + kv + \pi i \cdot (lg + kh) F(u, v), \\ F(u - h, v + g') = e^{i\psi\pi l} e^{2i\pi l} \cdot h\alpha u - (l + k\beta) v + \pi i \cdot (h\alpha h - (l + k\beta)g') F(u, v). \end{cases}$$

Si l'on suppose la partie imaginaire de g positive, les entiers l et k sont assujettis à la seule condition

$$(3) \quad \alpha l - \beta k = \sqrt{\beta^2 - 4\alpha} \pmod{k};$$

la quantité $\beta^2 - 4\alpha$ est nécessairement positive.

Nous dirons que la *caractéristique* de $F(u, v)$ est $\begin{vmatrix} \omega & \omega' \\ \eta & \eta' \end{vmatrix}$; la caractéristique *nulle* répond à $\omega = \omega' = \eta = \eta' = 0$.

Il est aisé de démontrer l'existence des fonctions $F(u, v)$ et de trouver leur développement en série de Fourier; parmi les fonctions entières qui se reproduisent à une exponentielle près $e^{\lambda u + \mu v + \nu}$, quand on augmente u, v d'une période quelconque, les fonctions normales peuvent seules être paires ou impaires.

Les fonctions normales d'indices l, k , et de caractéristique donnée, sont fonctions linéaires et homogènes de δ d'entre elles, étant posé

$$\delta = l^2 + \beta hl + \alpha h^2,$$

quantité toujours positive, d'après (3).

Relativement aux fonctions normales paires ou impaires, on démontre les théorèmes suivants :

I. *k étant pair, si δ est pair*, il existe $\frac{1}{2}(\delta + 4)$ fonctions normales distinctes, d'indices l, k , de caractéristique nulle, et *paires*; il en existe $\frac{1}{2}(\delta - 4)$ *impaires*; ces dernières s'annulent toutes simplement pour les seize demi-périodes.

De même il existe $\frac{1}{2}\delta$ fonctions normales distinctes d'indices l, k , de caractéristique donnée, non nulle, et *paires*; il en existe aussi $\frac{1}{2}\delta$ *impaires*. Les fonctions paires s'annulent simplement pour huit demi-périodes et les fonctions impaires pour les huit autres. Ces demi-périodes sont celles qui annulent les fonctions θ normales paires ou impaires, dont la caractéristique est la même et dont l'ordre a la parité de l .

II. *k étant pair, si δ est impair*, il existe $\frac{1}{2}(\delta + 1)$ fonctions normales *paires*, de caractéristique donnée, et $\frac{1}{2}(\delta - 1)$ *impaires*, ou inversement, selon que $\omega\eta + \omega'\eta'$ est pair ou impair. Les $\frac{1}{2}(\delta + 1)$ fonctions s'annulent simplement pour six demi-périodes et les $\frac{1}{2}(\delta - 1)$ s'annulent pour les dix autres; ces groupes de demi-périodes sont les mêmes que pour les fonctions θ normales, dans les conditions indiquées au cas I.

III. *k étant impair, si δ est impair*, il existe $\frac{1}{2}(\delta + 1)$ fonctions normales *paires*, de caractéristique donnée, et $\frac{1}{2}(\delta - 1)$ *impaires*, ou inversement, selon que $\omega[(l + \beta)\eta + \eta'] - \omega'(z\eta - l\eta')$

est pair ou impair. Les $\frac{1}{2}(\delta + 1)$ fonctions s'annulent simplement pour six demi-périodes, et les $\frac{1}{2}(\delta - 1)$ s'annulent pour les dix autres : ces groupes de six et de dix demi-périodes sont différents de ceux du cas II.

IV. k étant impair, si δ est pair, et si la caractéristique ne vérifie pas les congruences $\omega \equiv \omega'; \eta' \equiv \eta(l + 2) \pmod{2}$, il existe $\frac{1}{2}\delta$ fonctions normales paires et $\frac{1}{2}\delta$ impaires. Les fonctions paires s'annulent simplement pour huit demi-périodes, et les fonctions impaires pour les huit autres; ces groupes de huit demi-périodes sont différents de ceux du cas I.

V. k étant impair, si δ est pair et si la caractéristique est une des quatre caractéristiques vérifiant les congruences ci-dessus, il existe $\frac{1}{2}(\delta + 2)$ fonctions normales paires et $\frac{1}{2}(\delta - 2)$ impaires, ou inversement, selon que $\eta\omega'$ est pair ou impair. Les $\frac{1}{2}(\delta + 2)$ fonctions s'annulent simplement pour quatre demi-périodes, et les $\frac{1}{2}(\delta - 2)$ s'annulent pour les douze autres.

Cela posé, soit K une surface de Kummer *singulière*, c'est-à-dire correspondant aux fonctions abéliennes singulières considérées; nous la supposons représentée paramétriquement par le procédé de M. Weber (*Journal de Crelle*, t. 84) : les coordonnées homogènes d'un point sont des fonctions thêta du second ordre, normales et à caractéristique nulle, c'est-à-dire qu'elles vérifient les relations (2), où $l = 2$, $k \equiv 0$ et $\omega \equiv \omega' \equiv \eta \equiv \eta' \equiv 0$. Ces quatre fonctions étant toutes paires (1), à un point de K répondent, aux périodes près, les deux couples d'arguments u, v et $-u, -v$; il en résulte aisément que l'équation d'une courbe quelconque tracée sur K s'obtient en annulant une fonction intermédiaire normale, paire ou impaire, de caractéristique quelconque, et réciproquement.

Lorsque la fonction intermédiaire est une fonction thêta, c'est-à-dire lorsque son indice k est nul, la courbe est une courbe *ordinaire* existant sur toute surface de Kummer; si k est différent de zéro, la courbe est *singulière*, et réciproquement.

Deux fonctions intermédiaires, d'indices l et k , l' et k' , ont en commun un nombre de zéros égal à

$$2(l' + 2)(k' + l'k) + 2lk'.$$

il en résulte que, sur la surface K , la courbe obtenue en annulant une fonction normale d'indices l et k a pour degré

$$(5) \quad \frac{1}{2}(2.2l + \beta.2k) = 2l + \beta k.$$

Les fonctions normales, de mêmes indices l et k , de même caractéristique, et qui sont soit paires, soit impaires, sont des fonctions linéaires et homogènes d'un certain nombre d'entre elles (I, II, III, IV, V); les courbes correspondantes sur K appartiennent donc à une série linéaire; nous dirons qu'elles forment une *famille de courbes*. En vertu des résultats généraux rappelés plus haut, les courbes d'une même famille passent toutes, simplement, par $2s$ points doubles de K : car les demi-périodes sont les arguments des seize points doubles de la surface. Le nombre s peut d'ailleurs être nul; mais, dans tous les cas, la famille considérée est $\frac{1}{2}(\delta - s + 2)$ fois infinie.

On établit aussi que le genre général, p , des courbes de la famille est

$$(6) \quad p = \frac{1}{2}(\delta - s + 2).$$

Surface de l'onde. — Appliquons maintenant ces résultats à la surface de l'onde, ou mieux au *tétraédroïde* qui en est la transformée homographique la plus générale. Le tétraédroïde est une surface de Kummer singulière; la relation (1) correspondante entre les périodes est

$$-g + g' = 0.$$

c'est-à-dire que $\alpha = -1$, $\beta = 0$.

On a alors

$$\delta = l^2 - k^2$$

et

$$2l \equiv 2 \pmod{k}.$$

De plus, la quantité $\beta^2 - 4\alpha$ étant ici un carré, 4, il existe des fonctions intermédiaires normales dont les indices, l et k , vérifient l'égalité

$$2l \equiv 2 \pmod{k};$$

à ces fonctions, qui se réduisent à des fonctions θ elliptiques de $u + v$ ou de $u - v$, correspondent, sur K , deux séries bien connues de biquadratiques gauches, $u + v = \text{const.}$, $u - v = \text{const.}$.

qui ne passent simultanément par aucun point double. Chacune de ces séries comprend quatre coniques répondant à des fonctions normales pour lesquelles $l = 1$, $k = \pm 1$, les éléments ω et η' de la caractéristique étant nuls; on a ainsi huit coniques, situées deux à deux dans quatre plans, les quatre points communs à deux coniques d'un même plan sont des points doubles de K.

Laissant de côté ces courbes particulières souvent étudiées, nous avons le droit de supposer $2l > 2 \bmod k$, ou

$$\bmod k \leq l.$$

Dès lors, on déduit immédiatement de ce qui précède les conséquences suivantes :

Les courbes algébriques tracées sur le tétraédroïde sont toutes de degré pair.

Les courbes d'un degré donné, $2l$, forment $32(2l-1)$ familles : une famille est déterminée par une valeur de k comprise entre $-l$ et $+l$, ces limites étant exclues, par une des seize caractéristiques et par la nature de fonction paire ou impaire des fonctions normales correspondantes.

Les courbes d'une même famille passent toutes simplement par $2s$ points doubles du tétraédroïde, s étant un des nombres 0, 2, 3, 4, 5, 6, ou 8; elles forment une série linéaire $\frac{1}{2}(l^2 - k^2 - s - 2)$ fois infinie; leur genre général est aussi $\frac{1}{2}(l^2 - k^2 - s + 2)$.

Les surfaces d'ordre l qui passent par une courbe quelconque d'une famille répondant à l'indice k coupent, en outre, le tétraédroïde suivant les courbes d'une même famille répondant à l'indice $-k$.

Pour $k=0$, on obtient les courbes ordinaires, c'est-à-dire celles qui existent sur toute surface de Kummer.

Les groupes de $2s$ points doubles dont il est question dans ces énoncés ne dépendent, dans leur ensemble, que de la parité des indices l et k ; on trouvera leur détermination complète dans le Mémoire cité au commencement de ce Travail.

En appliquant, par exemple, ces résultats aux courbes du quatrième ordre, on trouve, en dehors des biquadratiques signalées plus haut :

1° Les courbes *ordinaires* d'ordre quatre existant sur toute surface de Kummer;

2° Seize familles *singulières*, chacune simplement infinie, de biquadratiques gauches passant par six points doubles du tétraèdre;

3° Seize familles *singulières* analogues, associées aux précédentes de telle sorte qu'une quadrique quelconque passant par une courbe d'une des premières familles coupe en outre le tétraèdre suivant une courbe de la famille associée;

4° et 5° Trente-deux courbes unicursales du quatrième ordre, passant chacune par dix points doubles, mais qui se décomposent, comme on le reconnaît aisément, en systèmes de deux coniques déjà connues sur la surface.

SUR LES FRACTIONS CONTINUES ALGÈBRIQUES :

Par M. R. DE MONTESSUS.

Je rappelle, en modifiant un peu la forme, quelques notions dues à M. Padé.

Considérons un Tableau de fractions rationnelles

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{U_0^0}{V_0^0}, & \frac{U_1^1}{V_1^1}, & \frac{U_2^2}{V_2^2}, & \frac{U_3^3}{V_3^3}, & \dots, & \frac{U_n^n}{V_n^n}, & \dots, \\ \frac{U_1^0}{V_1^0}, & \frac{U_2^1}{V_2^1}, & \frac{U_3^2}{V_3^2}, & \frac{U_4^3}{V_4^3}, & \dots, & \frac{U_{n+1}^n}{V_{n+1}^n}, & \dots, \\ \frac{U_2^0}{V_2^0}, & \frac{U_3^1}{V_3^1}, & \frac{U_4^2}{V_4^2}, & \frac{U_5^3}{V_5^3}, & \dots, & \frac{U_{n+2}^n}{V_{n+2}^n}, & \dots, \\ \dots & \dots, & \dots, & \dots, & \dots, & \dots, & \dots, \\ \frac{U_p^0}{V_p^0}, & \frac{U_{p+1}^1}{V_{p+1}^1}, & \frac{U_{p+2}^2}{V_{p+2}^2}, & \frac{U_{p+3}^3}{V_{p+3}^3}, & \dots, & \frac{U_{n+p}^n}{V_{n+p}^n}, & \dots, \\ \dots & \dots, & \dots, & \dots, & \dots, & \dots, & \dots, \end{array}$$

où U_p^n, V_p^n sont des polynômes en x , respectivement de degré n et p , choisis de manière que le développement en série de la fraction $\frac{U_p^n}{V_p^n}$

$$(1) \quad \frac{U_p^n}{V_p^n} = s_0 + s_1 x + \dots + s_{n+p} x^{n+p} + \lambda x^{n+p+1} + \mu x^{n+p+2} + \dots$$

ait pour termes de degrés inférieurs à $n + p + 1$ les termes d'une

série illimitée donnée γ ,

$$\gamma = s_0 + s_1 x + \dots + s_k x^k + \dots, \quad s_0 \neq 0.$$

Cela permet de supposer que le terme constant de U_p^n est s_0 et que le terme constant de V_n^p est l'unité.

Une fraction $\frac{U_p^n}{V_n^p}$ du Tableau est dite *normale*, s'il n'existe aucune autre fraction ayant pour numérateur un polynôme de degré n et pour dénominateur un polynôme de degré p dont le développement coïncide dans ses $n + p + 1$ premiers termes avec la série γ .

Nous supposons que la série γ donne lieu à un Tableau de fractions normales. La condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que tous les déterminants Δ_{pq} ($p, q = 0, 1, 2, 3, \dots$)

$$\Delta_{pq} = \begin{vmatrix} s_{p+1} & s_p & \dots & s_{p+1-q} \\ s_{p+2} & s_{p+1} & \dots & s_{p+2-q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{p+1+q} & s_{p+q} & \dots & s_{q+1} \end{vmatrix}$$

soient différents de zéro.

Une suite quelconque de fractions du Tableau,

$$(1) \quad \frac{U_1}{V_1}, \frac{U_2}{V_2}, \dots, \frac{U_i}{V_i}, \dots,$$

chacune étant plus avancée que les précédentes ($\frac{U_p^q}{V_n^p}$ est plus avancée que $\frac{U_m^q}{V_n^q}$ si $p + n > m + q$), définit une fraction continue appartenant à l'une des deux catégories suivantes :

I. Si

$$\begin{cases} U_1 = a_1, & V_1 = 1, & U_2 = a_1 a_2 + z_2, & V_2 = z_2, \\ z_i U_{i-2} + a_i U_{i-1} = U_i, \\ z_i V_{i-2} + a_i V_{i-1} = V_i & (i = 3, 4, 5, \dots), \end{cases}$$

les fractions $\frac{U_i}{V_i}$ sont les réduites successives

$$a_1, \quad a_1 + \frac{z_2}{a_2}, \quad a_1 + \frac{z_2}{a_2 + \frac{z_3}{a_3}}, \quad \dots$$

de la fraction continue

$$a_1 + \frac{\alpha_2}{a_2 + \frac{\alpha_3}{a_3 + \frac{\alpha_4}{\dots}}}$$

II. Si

$$\begin{cases} U_1 = \alpha_1, & V_1 = a_1, & U_2 = \alpha_1 \alpha_2, & V_2 = a_1 a_2 + \alpha_2, \\ \alpha_i U_{i-2} + a_i U_{i-1} = U_i, \\ \alpha_i V_{i-2} + a_i V_{i-1} = V_i, \end{cases}$$

les fractions $\frac{U_i}{V_i}$ sont les réduites successives $\frac{\alpha_1}{a_1}, \frac{\alpha_1 \alpha_2}{a_1 a_2 + \alpha_2}, \dots$

de la fraction continue

$$a_1 + \frac{\alpha_1}{a_2 + \frac{\alpha_2}{a_3 + \frac{\alpha_3}{\dots}}}$$

de sorte que l'étude d'une suite de réduites telles que (2) revient à l'étude d'une fraction continue.

La réciproque est vraie : l'étude d'une fraction continue revient à l'étude d'une suite de réduites.

Toute suite illimitée de réduites, chacune plus avancée que les précédentes,

$$\frac{U_1}{V_1}, \frac{U_2}{V_2}, \dots, \frac{U_i}{V_i}, \dots,$$

ou toute fraction continue, représente une fonction. Cette suite converge en même temps que la série

$$(s') \quad \left\{ \begin{aligned} & (-1)^0 \frac{\Lambda_{p+1}}{V_p V_{p+1}} + (-1)^1 \frac{\Lambda_{p+2}}{V_{p+1} V_{p+2}} + \dots + (-1)^q \frac{\Lambda_{p+q}}{V_{q-1} V_q} + \dots \\ & (\Lambda_i = U_{i-1} V_i - U_i V_{i-1}), \end{aligned} \right.$$

dont l'étude, assez compliquée, se simplifie si les numérateurs Λ_i sont des monomes entiers en x

$$\Lambda_i = c_i x^m \quad (c_i \text{ const., } m \text{ entier et positif}).$$

Cette simplification a lieu si les réduites de la suite considérée sont toutes consécutives, c'est-à-dire si, en posant

$$\frac{U_i}{V_i} = \frac{U''_i}{V''_i}, \quad \frac{U_{i+1}}{V_{i+1}} = \frac{U''_{i+1}}{V''_{i+1}},$$

on a, soit

$$p + n + 1 = q + m,$$

soit

$$p + n + 2 = q + m.$$

En effet, si, dans ce cas, (C) est le cercle de la convergence de la *série de puissances*

$$(s^n) \quad (1 - 1)A_{p+1} - (1 - 1)^2 A_{p+2} - \dots - (1 - 1)^p A_{p+1} - \dots,$$

la suite des réduites converge dans le cercle (C), *sauf aux points qui seraient des zéros pour une infinité de polynomes V_p* . Nous disons *une infinité*, parce que dans l'étude de la valeur prise par la fonction définie par la suite de réduites en un point d'affixe z nous convenons de supprimer les réduites de rang fini $\frac{U_p}{V_p}$, où V_p a le point z pour zéro.

Si les polynomes V_p tendent vers un polynome limite V , la fonction représentée par la suite

$$\frac{U_0}{V_0}, \frac{U_1}{V_1}, \dots, \frac{U_p}{V_p}, \dots$$

doit être regardée comme ayant pour pôles les zéros de V se trouvant dans le cercle de convergence.

Ces considérations et ce fait bien connu qu'il est possible de déduire d'une série une fraction continue convergente parfois dans une aire où la série ne l'est pas, et réciproquement, conduisent à la question suivante : *Une suite de réduites consécutives d'un Tableau de fractions normales définit-elle une fonction identique à la fonction définie par la série qui a donné naissance au tableau et, dans l'affirmative, la fraction continue correspondant à la suite prolonge-t-elle la série en dehors de son cercle de convergence?* Je vais montrer que certains résultats, dus à M. Hadamard, permettent de résoudre cette question dans le cas d'une suite de réduites consécutives

$$\frac{U_p^0}{V_p^0}, \frac{U_p^1}{V_p^1}, \frac{U_p^2}{V_p^2}, \dots, \frac{U_p^n}{V_p^n}, \dots,$$

faisant toutes partie d'une même ligne horizontale d'un Tableau de fractions normales.

1. Si l'on pose

$$V_m^p - 1 = B_{1,p}^m x + B_{2,p}^m x^2 + \dots + (-1)^t B_{t,p}^m x^t + \dots + (-1)^p B_{p,p}^m x^p,$$

la condition imposée à la fraction $\frac{U_m^p}{V_m^p}$ d'avoir pour les $m + p$ premiers termes de son développement en série les $m + p$ premiers termes de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n,$$

nécessite que $B_{1,p}^m, \dots, B_{p,p}^m$ vérifient le système d'équations

[illegible]

M. Hadamard, recherchant un polynôme $P(x)$ tel que le produit d'une série donnée $f(x)$ par ce polynôme soit une série convergente dans un cercle de rayon supérieur au cercle de convergence de $f(x)$, a montré que, si les modules des pôles $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p, \alpha_{p+1}, \dots$ de la fonction représentée par la série

$$\sum_{\mathcal{O}} S_H(\mathcal{O})$$

vérifient les inégalités

$$(7) \quad |x_1| + |x_2| + \dots + |x_p| < |x_{p+1}| + |x_{p+2}| + \dots$$

les coefficients $B_{l,p}^m$ tendent, quand m croît indéfiniment vers des limites $B_{l,p}$ telles que

$$V^p = \lim_{m \rightarrow \infty} V_m^p = \left(1 - \frac{x}{x_1}\right) \left(1 - \frac{x}{x_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{x}{x_p}\right),$$

chaque pôle multiple devant être compté pour autant de pôles simples qu'il entre d'unités dans son degré de multiplicité.

Au contraire, si

$$|x_1|, |x_2|, \dots, |x_p|, -x_{p+1}, |x_{p+2}|, \dots,$$

il se peut que les quantités $B_{l,p}^m$ tendent vers des limites qui ne soient plus les fonctions symétriques des affixes des pôles $z_1, \dots, z_p$ et même ne tendent vers aucune limite.

Quant à $B_{p,p}$, le système (2) nous donne, au signe près,

$$B_{p,p}^m = \pm \frac{\begin{vmatrix} s_{m+1} & s_m & \dots & s_{m-p+2} \\ s_{m+2} & s_{m+1} & \dots & s_{m-p+3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{m+p} & s_{m+p-1} & \dots & s_{m+1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s_m & s_{m-1} & \dots & s_{m-p+1} \\ s_{m+1} & s_m & \dots & s_{m-p+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{m+p-1} & s_{m+p-2} & \dots & s_m \end{vmatrix}}.$$

On a donc

$$A_p^n = \pm \frac{\begin{vmatrix} s_n & s_{n-1} & \dots & s_{n-p} \\ s_{n+1} & s_n & \dots & s_{n-p+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n+1} & s_{n+p-1} & \dots & s_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s_{n-q} & s_{n-2} & \dots & s_{n-p} \\ s_n & s_{n-1} & \dots & s_{n-p+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n+p-2} & s_{n+p-3} & \dots & s_{n-1} \end{vmatrix}}.$$

Si l'on pose $n - p = k$, il s'agit donc de déterminer le rayon de convergence de la série

$$\sum_{k=q}^{\infty} \frac{\begin{vmatrix} s_k & s_{k+1} & \dots & s_{k+p} \\ s_{k+1} & s_{k+2} & \dots & s_{k+p+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{k+p} & s_{k+p+1} & \dots & s_{k+2p} \\ s_k & s_{k+1} & \dots & s_{k+p-1} \\ s_{k+1} & s_{k+2} & \dots & s_{k+p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{k+p-1} & s_{k+p-2} & \dots & s_{k+2p-2} \end{vmatrix}}{x^{2p+k}},$$

où q est un nombre fini bien déterminé et invariable.

Dans la question du polynôme $P(x)$, M. Hadamard a trouvé, lui aussi, ces rapports de déterminants. Écrivant avec lui

$$D_{m+p} = \begin{vmatrix} s_m & s_{m+1} & \dots & s_{m+p} \\ s_{m+1} & s_{m+2} & \dots & s_{m+p+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{m+p} & s_{m+p+1} & \dots & s_{m+2p} \end{vmatrix},$$

nous avons à chercher le rayon de convergence de la série

$$\sum_{h=q}^{\infty} \frac{D_{h,p}}{D_{h,p-1}} x^{2p+h}.$$

On sait que ce rayon a pour expression

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \sqrt[h]{\frac{|D_{h,p}|}{|D_{h,p-1}|}} = \lim_{h \rightarrow \infty} \sqrt[h]{\frac{|D_{h,p}|}{|D_{h,p-1}|}}.$$

Mais, si les inégalités (3) sont vérifiées, on sait aussi que $\sqrt[h]{|D_{h,p}|}$ a pour limite $\frac{1}{|z_1, z_2, \dots, z_{p+1}|}$. Le rayon de convergence de la série s'' est donc bien $|z_{p+1}|$.

3. Si, pour une valeur déterminée x_0 de la variable x , les suites $\frac{U_p^k}{V_p^k}, \frac{U_q^k}{V_q^k}$ ($k = 1, 2, \dots$) tendent l'une et l'autre vers des limites déterminées, ces limites sont IDENTIQUES.

Il suffit de démontrer que si $\frac{U_p^k}{V_p^k}$, d'une part, et $\frac{U_{p+1}^k}{V_{p+1}^k}$, de l'autre, tendent vers des limites finies et déterminées, la différence de ces réduites tend vers zéro.

Remarquons, pour cela, que $|x_0| < |z_{p+1}|$, car les réduites $\frac{U_p^k}{V_p^k}$, convergentes seulement dans le cercle de rayon $|z_{p+1}|$, sont supposées convergentes au point d'affixe x_0 , et que la différence

$$\frac{U_p^k}{V_p^k} - \frac{U_{p+1}^k}{V_{p+1}^k}$$

peut s'écrire, comme le montre un calcul simple,

$$\frac{1}{V_p^k V_{p+1}^k} \cdot \frac{D_{h,p}}{D_{h,p-1}} x^{k+p+1} \quad (h = p+1 \dots h).$$

Il suffit donc de montrer que

$$\frac{D_{h,p}}{D_{h,p-1}} x^{k+p+1} \quad (x = x_0)$$

tend vers zéro quand k , c'est-à-dire h , croît indéfiniment. Il en est

bien ainsi, car la série

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{D_{h,p}}{D_{h,p-1}} x^{k \cdot p+1},$$

de rayon de convergence $|x_{p+1}|$, est convergente au point x_0 , puisque, nous l'avons fait observer,

$$|x_0| < |x_{p+1}|.$$

4. Il ressort de ces considérations qu'étant donnée une série de Taylor représentant une fonction $f(x)$ dont les p pôles les plus rapprochés de l'origine sont intérieurs à un cercle (C) lui-même intérieur aux pôles suivants, chaque pôle multiple étant compté pour autant de pôles simples qu'il existe d'unités dans son degré de multiplicité, la fraction continue déduite de la ligne horizontale de rang p du Tableau de M. Padé, ce Tableau étant composé de réduites normales, représente la fonction $f(x)$ dans un cercle de rayon $|x_{p+1}|$, où x_{p+1} est l'affixe du pôle le plus rapproché de l'origine parmi tous ceux qui sont extérieurs au cercle (C).

Si tous les pôles ont des modules différents, les fractions continues correspondant aux lignes horizontales représentent toute la fonction; s'il existe simplement des discontinuités dans l'ensemble linéaire des modules des pôles, les fractions continues correspondant à des lignes horizontales convenablement choisies représentent encore la fonction.

Si tous les pôles sont simples, la représentation a lieu dans des cercles d'autant plus grands que la ligne horizontale choisie est plus éloignée dans le Tableau. S'il y a des pôles multiples, il y a stationnement, en ce sens que plusieurs lignes horizontales consécutives représentant la fonction ont le même rayon de convergence. S'il y a enfin un point singulier essentiel, le stationnement se prolonge indéfiniment, aucune des fractions continues considérées ne représente la fonction en dehors du cercle sur la circonférence duquel se trouve le point singulier essentiel le plus rapproché de l'origine.

SUR CERTAINES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU SECOND ORDRE:

Par M. J. CLAIRIN.

Les équations linéaires aux dérivées partielles admettent une infinité de transformations infinitésimales de contact permutable : on n'a pas jusqu'ici, à ma connaissance du moins, étudié la question inverse et recherché quelles sont les équations qui possèdent la même propriété; je me propose d'examiner un cas particulier de ce problème et de montrer que les équations linéaires et certaines équations très simples, auxquelles s'applique la méthode d'intégration de M. Darboux, sont les seules équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes qui jouissent de la propriété énoncée, à condition de regarder comme identiques deux équations qui se déduisent l'une de l'autre par une transformation de contact.

Dans ce qui suit, les lettres x, y, z, p, q, r, s, t ont leur signification ordinaire; nous supposons que r figure dans toutes les équations que nous considérerons; s'il en était autrement, il suffirait d'effectuer un changement de variables très simple. Pour abréger, nous désignerons une transformation infinitésimale de contact par sa fonction caractéristique.

Si une équation aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes admet une transformation infinitésimale de contact, on peut, à l'aide d'une transformation de contact, remplacer cette équation par une équation qui ne contienne plus z .

$$(1) \quad r + f(x, y, p, q, s, t) = 0,$$

c'est-à-dire par une équation qui reste invariante pour la transformation infinitésimale 1. Les fonctions caractéristiques des transformations infinitésimales de contact permutable à la transformation 1 ne dépendent pas de z .

Imaginons qu'il existe deux telles transformations $g_1(x, y, p, q)$, $g_2(x, y, p, q)$ qui laissent (1) invariante. Si les fonctions g_1, g_2 ne sont pas distinctes, on peut, à l'aide d'une transformation en (x, p) , remplacer (1) par une équation admettant les transfor-

mations $1, \gamma, \tau(\gamma)$. Une telle équation est de la forme

$$(2) \quad r = \varphi(x, y, p, s)$$

et admet le groupe d'ordre infini

$$x_1 = x, \quad y_1 = y, \quad z_1 = z + Y,$$

où Y désigne une fonction quelconque de y ; deux transformations de ce groupe sont permutable.

Supposons maintenant que g_1 et g_2 soient distinctes; si les transformations correspondantes sont permutable, on a

$$(g_1, g_2) = 0;$$

une transformation de contact en (x, p) permet de remplacer l'équation (1) par une équation qui admet les transformations infinitésimales dont les fonctions caractéristiques sont $1, x, y$, c'est-à-dire par une équation dont le premier membre ne contient aucune des quantités z, p, q

$$(2) \quad r + \varphi(x, y, s, t) = 0.$$

Cela posé, la fonction caractéristique d'une transformation infinitésimale de contact permutable aux transformations $1, x, y$ et distincte de ces transformations ne dépend que de x, y et n'est pas linéaire par rapport à ces quantités. Si l'équation (2) reste invariante pour une telle transformation définie par la fonction $\lambda(x, y)$, l'équation

$$(3) \quad \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial s} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y^2} = 0$$

est vérifiée, quelles que soient les valeurs de s et t ; on a donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s \partial t} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s \partial t} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y^2} &= 0. \end{aligned}$$

Il résulte de l'équation qui vient d'être écrite que φ est nécessairement de la forme

$$\varphi = ms + \psi(r, y, s + m_0 t),$$

m et m_0 représentant des fonctions de x, y . Si ψ est linéaire par rapport à $s + m_0 t$, l'équation considérée est une équation linéaire; supposons qu'il en soit autrement, l'équation (3) équivaut au système de deux équations

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x \partial y} = 0, \\ \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x \partial y} + m_0 \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y^2} = 0. \end{cases}$$

Un pareil système ne peut admettre plus de quatre solutions distinctes sans en admettre une infinité, par conséquent, une équation aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes ne peut admettre plus de quatre transformations infinitésimales de contact permutables sans en admettre une infinité. Ce dernier cas se présente si le système (4) est en involution, c'est-à-dire si l'on a

$$m = m_0, \quad m \frac{\partial m}{\partial y} + \frac{\partial m}{\partial x} = 0.$$

Il serait facile de trouver m , mais il vaut mieux remarquer que, si m satisfait à la condition précédente, on peut, par un changement de variables, mettre l'équation

$$r + ms = \psi(x, y, s + mt) = 0$$

sous la forme

$$(5) \quad s(x + y) = q + \gamma(x, y, r).$$

En dehors des équations linéaires, les équations (2) et (3) sont les seules équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes qui admettent une infinité de transformations infinitésimales de contact permutables.

Pour l'un des systèmes de caractéristiques des équations (2) et (3), il existe un invariant du premier ordre, tandis que, pour le second système, il existe trois invariants du deuxième ordre.

Il faut encore remarquer qu'une équation telle que

$$r + ms = \psi(x, y, s + m_0 t) = 0$$

ne peut être une équation de Monge-Ampère que dans le cas où

elle est linéaire. Par conséquent, une équation de Monge-Ampère qui admet plus de trois transformations infinitésimales de contact permutable en admet une infinité.

SUR LES DÉRIVÉES DES FONCTIONS DE LIGNES:

Par M. HADAMARD.

Grâce aux travaux de M. Volterra ⁽¹⁾ on sait étendre aux fonctions de lignes la notion de dérivée. U étant une fonction de la ligne fermée L , on fait correspondre à chaque point $M(x, y, z)$ de L trois *dérivées* $U'_x(L, M)$, $U'_y(L, M)$, $U'_z(L, M)$: moyennant quoi, si l'on varie infiniment peu, d'une manière quelconque, la ligne L , le déplacement du point (x, y, z) étant désigné par $(\delta x, \delta y, \delta z)$, on aura

$$(1) \quad \delta U = \int_L (U'_x \delta x + U'_y \delta y + U'_z \delta z) ds.$$

Bien entendu, l'équation précédente suppose l'existence des trois dérivées, ainsi que les autres hypothèses faites par M. Volterra dans les Mémoires auxquels nous faisons allusion, et cela *en chaque point*, sans aucune exception.

Il serait bien facile de former des exemples dans lesquels, les hypothèses en question n'étant pas vérifiées en tous les points, l'équation (1) est en défaut. Il suffira, par exemple, de prendre

$$U = \int F\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^2z}{dx^2}, \dots\right) dx,$$

l'intégrale étant prise, non suivant toute la ligne L , mais suivant l'arc AB de cette ligne (ou, s'il y a lieu, suivant les arcs) compris à l'intérieur d'un volume donné. Il est clair que, dans ce cas, la formule (1) devra être complétée par l'addition de termes de la forme

$$(2) \quad P_x \delta x + P_y \delta y + P_z \delta z + P_y \delta y' + P_z \delta z' + \dots,$$

x, y, z désignant les coordonnées du point A ou du point B .

⁽¹⁾ *Rendiconti dell'Accad. dei Lincei*, 1^{re} série, t. III, 1887, passim; *Acta mathematica*, t. XII, 1889, p. 233 et suivantes.

x', y', z' les valeurs correspondantes de $dx, dz, \dots; \partial x, \partial y, \partial z, \partial y', \partial z', \dots$, les variations de ces quantités. De tels cas ont également été considérés par M. Volterra ⁽¹⁾.

Il semble d'ailleurs que, depuis les travaux de MM. Pincherle et Bourlet ⁽²⁾, il soit possible de remplacer utilement ces hypothèses, évidemment particulières, par d'autres plus générales. Il est, en effet, rationnel d'admettre, en tout cas, que ∂U est ce que M. Pincherle a appelé une *fonction distributive*, M. Bourlet une fonction *additive* et moi-même ⁽³⁾ une fonction *linéaire* des quantités $\partial x, \partial y, \partial z$, considérées comme fonctions de s . Or les travaux en question permettent, au moins dans le cas des opérations analytiques, de se faire une idée de la forme générale de pareilles fonctions. Cette forme est d'ailleurs, au fond, très voisine de celle qu'avait envisagée M. Volterra.

Celui-ci a, d'autre part ⁽⁴⁾, défini les dérivées secondes de U , lesquelles sont fonctions de L , du point $M(x, y, z)$ précédemment pris sur cette ligne pour définir les dérivées premières, et d'un second point analogue $M_1(x_1, y_1, z_1)$ de L . Il a montré qu'entre ces dérivées existent un certain nombre de relations correspondant au théorème de l'inversion des différentiations.

Les relations en question s'obtiennent aisément en supposant que la forme de la ligne L dépend de deux paramètres, λ et μ , et écrivant l'identité

$$(3) \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \lambda \partial \mu} = \frac{\partial^2 U}{\partial \mu \partial \lambda}.$$

Mais ce mode de raisonnement donne, outre les relations de M. Volterra, une autre conséquence, qui est celle sur laquelle je désire appeler l'attention : c'est que la formule (1) ne s'applique pas à la dérivée U_x ; autrement dit, que celle-ci ne saurait être donnée en fonction des dérivées secondes ⁽⁵⁾ U_{xx}, U_{xy}, U_{xz} , par

(1) *Rendic. dell'Accad. dei Lincei, loc. cit.*, note II, p. 141-146.

(2) Voir, en particulier, *Math. Ann.*, t. XLIX, p. 115 et suiv.; *Ann. Le Norm. sup.*, 3^e série, t. XIV.

(3) *La série de Taylor et son prolongement analytique*, Paris, Gauthier et Naud, 1901.

(4) *Rendic. dell'Accad. dei Lincei, loc. cit.*, p. 151.

(5) Les quantités appelées ici $U_x, U_{xy}, U_{xz}, \dots$ sont celles qui, dans le Mémoire cité de M. Volterra, sont nommées $N, N_x, N_y, N_z, \dots$.

l'intégrale

$$(4) \quad \delta U'_x = \int (U''_{xx_1} \delta x_1 + U''_{xy_1} \delta y_1 + U''_{xz_1} \delta z_1) ds_1$$

(ds_1 étant l'élément d'arc décrit par le point x_1, y_1, z_1). Cette formule (4) peut être valable pour le cas où la ligne L n'est variée que le long d'un arc ne contenant pas le point M; mais il n'en saurait être de même lorsque le point (x_1, y_1, z_1) est susceptible de coïncider avec (x, y, z) .

Une première preuve de ce fait s'obtient d'ailleurs en supposant, comme l'a fait M. Volterra, que les déplacements des différents points de L aient lieu sur cette courbe elle-même : dans ce cas, l'intégrale du second membre est nulle, en vertu des relations (5) (*Rendic. Lincei, loc. cit.*, p. 229) de la Note I *Sopra le funzioni dipendenti da linee*, de M. Volterra. Le premier membre est, au contraire, différent de zéro, puisque U'_x, U'_y, U'_z dépendent de la position du point (x, y, z) sur la courbe.

Si maintenant on fait usage de la relation (3), il faudra commencer par exprimer les coordonnées d'un point de L en fonction d'un paramètre t choisi dont les valeurs ne doivent pas être affectées par la variation, et écrire

$$(1') \quad \frac{\delta U}{\delta \lambda} = \int_L \left(U'_x \frac{\delta x}{\delta \lambda} + U'_y \frac{\delta y}{\delta \lambda} + U'_z \frac{\delta z}{\delta \lambda} \right) \frac{ds}{dt} dt$$

pour la variation correspondant à une variation de λ . Si l'on suppose que $\frac{\delta x}{\delta \lambda}, \frac{\delta y}{\delta \lambda}, \frac{\delta z}{\delta \lambda}$ ne sont différents de zéro que sur un certain arc de L et $\frac{\delta x}{\delta \mu}, \frac{\delta y}{\delta \mu}, \frac{\delta z}{\delta \mu}$ sur un autre arc *sans point commun avec le premier*, on trouve, en différentiant l'équation (1') par rapport à μ et intervertissant ensuite les rôles de λ et de μ , les relations mêmes de M. Volterra. Mais si l'on suppose, en second lieu, que les variations relatives à λ et les variations relatives à μ soient différentes de zéro aux mêmes points de la courbe, on constate, après suppression des termes qui disparaissent en vertu des relations en question, que la formule (4) donnerait, pour $\frac{\delta^2 U}{\delta \lambda \delta \mu} - \frac{\delta^2 U}{\delta \mu \delta \lambda}$, une valeur différente de zéro.

Notre conclusion est donc établie; la quantité U'_x n'appartient

pas à la catégorie étudiée dans la Note I *Sopra le funzioni che dipendono da altre funzioni* (*Rendic. Lincei*, t. III, p. 97-105), mais à la catégorie étudiée dans la Note II (p. 141-146), sur le même sujet. Si l'on se place au point de vue adopté dans cette dernière Note, on sera conduit à ajouter au second membre de la formule (4) des termes de la forme (2).

On aura évidemment des relations entre les coefficients de ces termes par la première méthode que nous avons indiquée, c'est-à-dire en remplaçant ∂x_1 , ∂y_1 , ∂z_1 par dx_1 , dy_1 , dz_1 . On en obtient une seconde série à l'aide de l'équation (3). Il ne me paraît pas utile d'écrire ici ces différentes relations : je me contenterai d'observer que, d'après celles de la seconde série, les termes complémentaires ne peuvent être en ∂x , ∂y , ∂z seuls, mais doivent nécessairement contenir les variations des dérivées.

SUR LES ENGRENAGES A CONTACT PONCTUEL ;

Par M. ÉTIENNE DELASSUS.

1. Soient S un corps solide ayant un mouvement M et S' un autre corps solide ayant un mouvement M', et soient μ et μ' les deux systèmes de segments qui, à chaque instant, donnent la représentation des vitesses dans les deux corps.

Il s'agit de tracer une surface Σ dans S et une surface Σ' dans S' telles que ces deux surfaces aient toujours en commun un *élément* composé d'un point p et d'un plan P passant par p .

Donnons-nous, *a priori*, le mouvement absolu de l'élément (p , P) et cherchons à quelles conditions il doit satisfaire pour que la suite de ses positions relatives dans S appartienne à une même surface et qu'il en soit de même pour la suite de ses positions relatives dans S'.

Soient Γ , γ , γ' les trajectoires absolues et relatives de p et Δ , δ , δ' leurs tangentes en p . Soient D et D' les développables qui sont les enveloppes relatives de P et G, G' les génératrices de contact de P avec ces deux enveloppes.

Si l'on applique les conditions bien connues pour qu'une suite simplement infinie d'éléments appartienne à une surface, on voit immédiatement le résultat suivant :

Pour que l'élément (p, P) engendre un engrenage à contact ponctuel, il faut et il suffit que P contienne toujours δ et δ' ou que p se trouve toujours à l'intersection de G et G' . Ces deux conditions étant d'ailleurs équivalentes, la réalisation de l'une entraîne la réalisation de l'autre.

2. De là deux sortes de génération :

1° *Génération ponctuelle.* — On se donne arbitrairement le mouvement d'un point p et, pour chaque position de p , le plan P est déterminé par les deux droites $\delta\delta'$. Si, pour chaque position de p , les deux droites $\delta\delta'$ sont confondues, il y a indétermination; en pratique, on fait correspondre à chaque position de p et suivant une loi arbitrairement choisie une droite δ'' , et P est déterminé par δ et δ'' . C'est ce cas d'indétermination qui se présente chaque fois qu'on cherche un *engrenage à roulement*, car les vitesses relatives de p dans S et S' sont assujetties à coïncider, et ces vitesses sont dirigées suivant δ et δ' .

2° *Génération tangentielle.* — On se donne arbitrairement le mouvement du plan P et, pour chaque position de P , le point p est déterminé par l'intersection des deux droites G, G' . Il y a impossibilité si, pour toutes les positions de P , ces deux droites sont toujours parallèles, et indétermination si elles sont toujours confondues; dans ce dernier cas, les deux développables D, D' sont tangentes tout le long de G et constituent un *engrenage à contact linéaire*; à chaque position de P on fera correspondre une droite G'' et p sera l'intersection de G et G'' .

Ayant ainsi trouvé le mouvement absolu de (p, P) satisfaisant à toutes les conditions imposées, on prendra une surface Σ tangente à D tout le long de γ et une surface Σ' tangente à D' tout le long de γ' , et l'on aura réalisé, au point de vue théorique, un engrenage à contact ponctuel.

Remarquons enfin la relation géométrique suivante :

Soient π la normale en p au plan P et V la vitesse de p estimée suivant la direction π ; en exprimant que les vitesses relatives de p dans S et S' sont toutes deux normales à π , on a

$$M'_{\pi}(p) = M_{\pi}(p) = V.$$

3. Considérons maintenant le cas où μ et μ' sont indépendants du temps, c'est-à-dire où les deux mouvements M et M' sont des mouvements hélicoïdaux uniformes qui peuvent se réduire à des rotations.

Il est évident que le cas le plus simple de génération ponctuelle s'obtiendra en donnant au point p un mouvement rectiligne et uniforme et que le cas le plus simple de génération tangentielle s'obtiendra en donnant au plan P une translation rectiligne et uniforme. Pour abréger, désignons par A et B les deux sortes d'engrenages ainsi obtenus.

Considérons un engrenage B et soit V la vitesse normale constante du plan P. La double égalité établie à la fin du numéro précédent montre immédiatement que la droite π , qui a une direction constante, restera fixe; donc le point p décrira cette droite π perpendiculaire à la direction constante du plan P et avec la vitesse constante V. Ainsi, *tout engrenage B est un engrenage A*, pourvu toutefois que l'on ne soit pas dans le cas d'indétermination de la génération tangentielle.

La réciproque n'est pas vraie; cependant on peut énoncer la propriété suivante :

Si, dans un engrenage A, la droite Δ décrite par p et la vitesse V de p sur cette droite satisfont aux conditions

$$M'_A(\mu) = M'_A(\mu') = V,$$

le plan P reste toujours perpendiculaire à Δ et l'engrenage peut être considéré comme un engrenage B, pourvu toutefois que l'on ne soit pas dans le cas d'indétermination de la génération ponctuelle, mais la conclusion subsistera quand même si la droite arbitraire δ'' introduite dans ce cas est assujettie à rester constamment perpendiculaire à Δ .

J'appellerai *génération AB* la génération A ainsi particularisée de façon à être en même temps une génération B.

Je ferai remarquer que la génération AB fournit immédiatement la vis sans fin quand on suppose que μ et μ' sont deux segments rectangulaires non concourants et qu'on cherche la droite Δ satisfaisant à la condition d'égalité des deux moments et située dans le plan mené par μ perpendiculairement à μ' . Cette génération AB

fournit aussi immédiatement l'engrenage à roulement de White quand μ et μ' sont deux segments parallèles en prenant pour Δ la génératrice de contact des deux cylindres primitifs, parcourue avec une vitesse constante arbitraire, la droite δ'' étant la normale commune à ces deux cylindres.

4. Considérons les axes H et H' des deux mouvements hélicoïdaux M et M' et les vitesses de rotation correspondantes ω , ω' . Considérons un engrenage B obtenu en déplaçant le plan P parallèlement à H et H' avec une vitesse normale constante V. On voit immédiatement les résultats suivants :

La développable D est un cylindre parallèle à H et dont la section droite est une développante d'un cercle ayant son centre sur H et $\frac{V}{\omega}$ pour rayon. De même D' est un cylindre parallèle à H' et dont la section droite est une développante d'un cercle ayant son centre sur H' et $\frac{V}{\omega'}$ pour rayon. Ces deux développables sont indépendantes de la position relative des deux axes ainsi que des pas des deux mouvements hélicoïdaux. La droite Δ , lieu absolu de p , est perpendiculaire à H et H'. Si les deux mouvements M et M' sont des rotations, les deux trajectoires relatives de p sont des sections droites de D et D'.

De là résulte immédiatement le fait suivant :

« Les deux cylindres à développantes D et D' constituent un engrenage à contact ponctuel fonctionnant sans altération du rapport des vitesses angulaires quand on modifie d'une façon quelconque la position relative des deux axes. »

Cette propriété peut encore s'énoncer comme il suit :

L'engrenage cylindrique à développantes continue à fonctionner, sans altération du rapport des vitesses angulaires, mais comme engrenage à contact ponctuel quand on modifie d'une façon quelconque la position relative des deux axes de rotation.

De sorte que l'engrenage cylindrique à développantes constitue théoriquement le joint parfait en ce sens qu'il fonctionne pour

des positions relatives *quelconques* des deux axes et qu'ensuite il existe pour une valeur quelconque du rapport $\frac{\omega'}{\omega}$, tandis que les joints connus n'effectuent que la transformation $\omega' = \omega$.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 4 DÉCEMBRE 1901.

PRÉSIDENCE DE M. D'OCAGNE.

Communications :

M. Laisant : *Sur un problème d'itération.*

MM. Duporcq, Humbert et d'Ocagne présentent quelques observations à ce sujet.

M. Humbert : *Sur les courbes de direction et les surfaces de direction.*

M. Andoyer présente quelques observations à ce sujet.

M. Bricard : *Sur certaines transformations géométriques.*

M. Duporcq : *Sur un théorème relatif aux cubiques gauches.*

M. Humbert : *Sur une propriété de la surface de Kummer et sur une généralisation, sur la surface de l'onde; courbes du quatrième degré tracées sur cette surface; mode de génération.*

SÉANCE DU 18 DÉCEMBRE 1901.

PRÉSIDENCE DE M. D'OCAGNE.

Communications :

M. Touche : *Sur les conséquences de sa réponse à une question posée par d'Alembert.*

M. de Montessus : *Sur les fractions continues algébriques.*

M. Duporcq : *Sur des triangles inscrits à une courbe et circonscrits à une conique.*

SÉANCE DU 8 JANVIER 1902.

ASSEMBLÉE GÉNÉRALE.

PRÉSIDENTE DE M. D'OCAGNE.

M. le Président communique à l'Assemblée l'avis d'ouverture du Congrès des Sociétés savantes, à la Sorbonne, le 1^{er} avril.

L'Assemblée procède au renouvellement du Bureau et à l'élection du Conseil de la Société Mathématique pour l'année 1902.

SÉANCE DU 22 JANVIER 1902.

PRÉSIDENTE DE M. RAFFY.

M. Raffy, élu président à la séance précédente, adresse ses remerciements à la Société.

Élections :

M. Buhl, présenté par MM. Laisant et Lévy, et M. Thomas-J.-J. See, présenté par MM. Darboux et Harris Hancock, sont élus membres de la Société à l'unanimité des membres présents.

Communications :

M. Hadamard : *Sur les dérivées secondes des fonctions de lignes.*

M. Duporcq : *Sur les polygones circonscrits à une conique et inscrits à une courbe algébrique.*

M. Bricard : *Sur les surfaces réglées.*

M. Hadamard : *Sur la surface polaire d'une courbe gauche.*

M. Servant : *Sur l'habillage des surfaces de révolution.*

MÉMOIRES.

SUR CERTAINES SURFACES ALGÈBRIQUES. — TROISIÈME COMPLÈMENT

A l'« Analysis situs »;

PAR M. H. POINCARÉ.

Proposons-nous d'étudier, au point de vue de l'*Analysis situs*, la surface

$$(1) \quad z = \sqrt{F(x, y)},$$

où $F(x, y)$ est un polynôme. Nous supposons que la courbe

$$F(x, y) = 0$$

ne présente que des points ordinaires où $\frac{dF}{dx}$ n'est pas nul, ou bien

où $\frac{dF}{dx} = 0$, mais sans que $\frac{d^2F}{dx^2}$ ni $\frac{dF}{dy}$ s'annulent, ou des points

doubles ordinaires où $\frac{dF}{dx} = \frac{dF}{dy} = 0$, mais sans que $\frac{d^2F}{dx^2}$ ni $\frac{d^2F}{dy^2} - \left(\frac{d^2F}{dx dy}\right)^2$ s'annulent.

Considérons d'abord y comme une constante. Alors l'équation (1) représentera une courbe algébrique et les coordonnées x et z d'un point de cette courbe pourront s'exprimer, comme on le sait, comme des fonctions fuchsienues d'une même variable auxiliaire u . Considérons le groupe fuchsien correspondant et le polygone fuchsien qui l'engendre. En général, le polygone fuchsien qui correspond à une courbe de genre p est un polygone de $4p$ côtés, et l'on peut supposer, soit que les côtés de rang $4q + 1$ et $4q + 3$ comme les côtés de rang $4q + 2$ et $4q + 4$ sont conjugués (ce qui correspond aux périodes dites *normales* des fonctions abéliennes), soit que les côtés opposés sont conjugués.

C'est cette dernière hypothèse que nous adopterons.

Je rappelle d'ailleurs que la somme des angles du polygone doit être égale à 2π . Mais, dans le cas particulier de la courbe (1), on est dans le cas dit *hyperelliptique*, c'est-à-dire que les fonctions abéliennes correspondantes se réduisent à des fonctions hyperelliptiques.

Dans ce cas, on sait que notre polygone fuchsien admet un centre de symétrie et se décompose en deux polygones de $2p + 1$ côtés symétriques l'un de l'autre par rapport à ce centre.

Avant d'aller plus loin, je précise ce que j'entends par ce mot *symétrie*. Nous nous plaçons en ce moment au point de vue de la géométrie non-euclidienne; je veux dire que nous considérons comme des droites non-euclidiennes les cercles qui coupent orthogonalement le cercle fondamental; nous disons que deux figures sont symétriques par rapport à une droite non-euclidienne quand on peut passer de l'une à l'autre par une inversion (transformation par rayons vecteurs réciproques) qui n'altère pas cette droite non-euclidienne; nous disons que deux figures sont égales quand elles sont symétriques d'une même troisième par rapport à deux droites non-euclidiennes, ou encore quand elles sont égales à une même troisième; nous disons enfin que deux figures sont symétriques par rapport à un centre quand elles sont symétriques d'une même troisième par rapport à deux droites non-euclidiennes rectangulaires passant par ce centre.

Cela posé, notre polygone R de $4p$ côtés se décompose en deux polygones R' et R'' de $2p + 1$ côtés symétriques l'un de l'autre par rapport à un centre.

Nous pouvons supposer que le polynôme $F(x, y)$ n'est divisible par aucun carré. Dans ces conditions, l'équation en x

$$F(x, y) = 0$$

n'aura pas de racine double, sauf pour certaines valeurs singulières de y . Elle aura $2p + 2$ racines simples que j'appellerai

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_{2p+1}.$$

Alors x_0 correspondra aux $2p + 1$ sommets du polygone R', tandis que $x_1, x_2, \dots, x_{2p+1}$ correspondront aux milieux (toujours au point de vue non-euclidien) des $2p + 1$ côtés.

Dans le plan des x , nous pourrons tracer $2p + 1$ coupures

$$C_1, C_2, \dots, C_{2p+1}$$

allant du point x_0 aux p points $x_1, x_2, \dots, x_{2p+1}$, et de telle façon qu'aux deux lèvres de la coupure C_i correspondront sur le polygone R' les deux moitiés du $i^{\text{ème}}$ côté.

Dans le cas de $p = 1$ (c'est-à-dire si l'équation $F = 0$ est du quatrième degré en x), le polygone R se réduit à un parallélogramme, les polygones R' et R'' à deux triangles rectilignes et les fonctions fuchsienues à des fonctions elliptiques.

Qu'arrivera-t-il maintenant si, faisant varier y d'une manière continue, cette variable revient à sa valeur initiale?

Notre groupe fuchsien variera d'une manière continue, de même que $x_0, x_1, \dots, x_{2p+1}$ et que le polygone fuchsien R. Quand y aura fait un tour complet, le groupe fuchsien sera redevenu le même; les points x_i se seront en général permutés entre eux et le polygone R sera devenu un autre polygone R_1 , équivalent à P, je veux dire susceptible d'engendrer le même groupe fuchsien.

Prenons, par exemple, le cas de $p = 1$; le polygone R est un parallélogramme dont les côtés ω et ω' représenteront en grandeur et direction les deux périodes d'une fonction elliptique. Quand y aura décrit un tour complet, notre parallélogramme sera devenu R_1 dont les côtés représenteront encore en grandeur et direction deux périodes de la même fonction elliptique; seulement ces périodes ne seront plus, en général, ω et ω' , mais deux périodes équivalentes

$$z\omega - \beta\omega', \quad \gamma\omega - \delta\omega',$$

où z, β, γ, δ sont quatre entiers tels que $z\delta - \beta\gamma = 1$.

Ceci nous amène à un premier rapprochement avec l'*Analysis situs*. Supposons que $p = 1$; supposons que l'on convienne de donner à y une quelconque des valeurs situées sur un certain contour fermé K, à x une valeur complexe quelconque, et que z soit défini par l'équation (1). L'ensemble de ces points x, y, z constituera une certaine variété fermée V à trois dimensions. Quelles sont les propriétés de cette variété au point de vue de l'*Analysis situs*?

A chaque point de cette variété je ferai correspondre trois variables réelles ξ, η, ζ définies comme il suit: ζ sera fonction de y seulement et augmentera de 1 quand y aura décrit son contour complet. Quant à ξ et à η , ce seront des fonctions linéaires des parties réelle et imaginaire de l'intégrale elliptique u définie par l'équation (1). Ces fonctions linéaires seront telles que ξ et η se changent en $\xi + 1, \eta$ quand cette intégrale elliptique augmente de ω et en $\xi, \eta + 1$ quand elle augmente de ω' (de telle façon que

$u = \xi\omega + \tau\omega'$. Dans ces conditions, on retombera sur un même point de la variété V quand ξ , τ , ζ se changeront en

$$\xi = 1, \quad \tau, \quad \zeta$$

ou en

$$\xi, \quad \tau = 1, \quad \zeta$$

ou en

$$\beta\xi = \gamma\tau, \quad \beta\xi = \alpha\tau, \quad \zeta = 1,$$

car si ξ_1 et τ_1 sont ce que deviennent ξ et τ quand on change ζ en $\zeta + 1$, on aura

$$u = \xi\omega + \tau\omega',$$

et d'autre part

$$u = \xi_1(\alpha\omega - \beta\omega') - \tau_1(\gamma\omega + \delta\omega'),$$

ou plus généralement quand ξ , τ , ζ subiront une transformation quelconque du groupe G engendré par ces trois transformations.

On reconnaît là le groupe considéré dans l'*Analysis situs*, page 57, 6^e exemple. La variété V est donc homéomorphe à la variété envisagée dans ce 6^e exemple et elle admet G comme *groupe fondamental* (cf. *Analysis situs*, p. 60).

Définissons toujours la variété V de la même manière, mais ne supposons plus $p = 1$. Alors R est un polygone fuchsien curviligne. Nous introduirons encore trois variables ξ , τ , ζ ; cette dernière ζ sera définie comme plus haut. Quant à ξ et τ , ce seront des fonctions bi-uniformes de ζ et des parties réelle et imaginaire de la variable u ; de telle façon qu'à toute valeur complexe de u corresponde un système de valeurs de ξ et de τ , et un seul, et inversement. A chaque valeur de ζ correspondra un groupe fuchsien et le polygone fuchsien R relatif à ce groupe. Ce groupe fuchsien sera engendré par $2p$ substitutions

$$S_1, S_2, \dots, S_{2p}.$$

La substitution S_k changera ξ et τ en

$$\psi_k(\xi, \tau, \zeta), \quad \phi_k(\xi, \tau, \zeta),$$

de sorte que nous retomberons sur un même point de la variété V quand nous changerons ξ , τ , ζ en

$$\psi_k(\xi, \tau, \zeta), \quad \phi_k(\xi, \tau, \zeta), \quad \zeta.$$

Nous pouvons d'ailleurs définir les fonctions ξ et η de telle façon que φ_k et ψ_k ne dépendent pas de ξ .

En effet, envisageons la figure formée par le polygone fuchsien $R = R' + R''$ et par ses transformés par les diverses substitutions du groupe fuchsien. Ce polygone et ses transformés remplissent la surface du cercle fondamental. La figure ainsi formée se déformera d'une manière continue quand on fera varier ξ d'une manière continue, mais elle restera homéomorphe à elle-même. On pourra donc faire correspondre à tout point M_0 de cette figure dans sa position initiale un point M , et un seul, de la même figure dans une quelconque de ses positions consécutives, et cela de telle sorte :

1^{re} Que le point M se déplace d'une manière continue quand ξ variera d'une manière continue;

2^o Que, si M_0 est un sommet de R , M reste un sommet de R ; que, si M_0 est sur un côté de R , M reste sur un côté de R ;

3^e Que, si deux points M_0 et M'_0 sont congruents (c'est-à-dire transformés l'un de l'autre par une des substitutions du groupe fuchsien), les points M et M' soient également congruents.

Je supposerai alors que les valeurs des deux variables auxiliaires ξ et η sont les mêmes pour le point M_0 et pour le point M ; je supposerai, par exemple, que ce sont les coordonnées du point M_0 .

Dans ces conditions, φ_k et ψ_k ne dépendent pas de ξ .

Quand, γ ayant fait un tour complet, ξ aura augmenté de 1; le polygone R , en se déformant successivement, sera devenu un polygone R_1 , équivalent à R .

Le point M sera venu en un point M_1 dont les coordonnées seront

$$\theta_1(\xi, \eta), \quad \theta_2(\xi, \eta).$$

On voit que l'on retombe sur un même point de V quand ξ , η , ζ se changent en

$$\theta_1(\xi, \eta), \quad \theta_2(\xi, \eta), \quad \zeta + 1,$$

ou, plus généralement, quand ξ , η , ζ subissent une des substitutions du groupe G engendré par les $2p + 1$ substitutions qui changent ξ et η en

$$\theta_1(\xi, \eta), \quad \theta_2(\xi, \eta), \quad \zeta + k + 1, \quad k = 0, 1, \dots, 2p.$$

ou en

$$\theta, \theta_1, \zeta + 1.$$

Ce groupe G sera donc le groupe fondamental de la variété V.

Nous remarquerons d'abord que ce groupe n'est pas simple. Nous pouvons appeler G' le groupe engendré par les $2p$ substitutions $(\varphi_h, \psi_h, \zeta)$ et Σ la substitution $(\theta, \theta_1, \zeta + 1)$. Je dis que G' est un sous-groupe invariant de G; il suffit de montrer que G' est permutable à Σ . En effet, Σ changeant le polygone R en un polygone équivalent, n'altère pas le groupe fuchsien. Or, le groupe fuchsien n'est autre chose que le groupe engendré par les $2p$ substitutions $(\xi, \eta; \varphi_h, \psi_h)$; on voit que ce groupe est permutable à la substitution $(\xi, \eta; \theta, \theta_1)$ et le théorème énoncé s'en déduit immédiatement.

Considérons maintenant une variété V définie comme il suit :

Représentons la variable y sur une sphère. Distinguons sur cette sphère les points ordinaires pour lesquels l'équation $F(x, y)$ n'a pas de racines multiples et les points singuliers pour lesquels cette équation a des racines multiples.

Soient O un point ordinaire et $A_1, A_2, \dots, A_q$ les points singuliers. Joignons O à chacun de ces points par des coupures $OA_1, OA_2, \dots, OA_q$ ne se coupant pas mutuellement.

D'autre part, traçons autour de chacun des points singuliers un cercle de rayon très petit que nous appellerons *cercle de garde*.

Pour former la variété V, nous donnerons à y une valeur quelconque non comprise dans l'un des cercles de garde; à x une valeur complexe quelconque, à z une des deux valeurs définies par l'équation (1).

A chaque valeur de y correspondra un polygone fuchsien R, et ce polygone est parfaitement déterminé si y est assujéti à varier sans franchir les coupures OA; car c'est seulement quand y fait un tour complet en tournant autour de l'un des points singuliers A que le polygone R peut s'échanger contre un polygone équivalent.

Le polygone R et ses transformés par le groupe fuchsien forment une figure qui, quand y varie d'une manière continue, se déforme aussi d'une manière continue, mais en restant toujours homéomorphe à elle-même. Soient alors y_0 une valeur initiale de y , R_0 le polygone R correspondant, un point M_0 du plan de R_0 ; nous pouvons faire correspondre au point M_0 un point M du plan

de R , de telle façon que les coordonnées de M soient des fonctions continues et bi-uniformes de celles de M_0 ; que M soit en un sommet ou sur un côté de R , si M_0 est en un sommet ou sur un côté de R_0 ; que M et M' soient congruents si M_0 et M'_0 sont congruents.

Nous pourrons ensuite faire correspondre au point M deux variables auxiliaires ξ et τ_i qui ne seront autre chose que les coordonnées de M_0 . Dans ces conditions, le groupe fuchsien sera dérivé de $2p$ substitutions

$$S_1, S_2, \dots, S_{2p},$$

telles que S_k change ξ et τ_i en $\varphi_k(\xi, \tau_i)$, $\psi_k(\xi, \tau_i)$, les fonctions φ_k et ψ_k étant indépendantes de γ .

Quand γ tourne autour du point singulier A_k , R se change en un polygone équivalent R_1 ; il en résulte que ξ et τ_i se changent en

$$\theta_i(\xi, \tau_i), \theta'_i(\xi, \tau_i),$$

θ_i et θ'_i étant des fonctions bi-uniformes et continues de ξ et τ_i , telles que, quand le point ξ, τ_i est en un sommet ou sur un côté de R_0 , le point θ_i, θ'_i est en un sommet ou sur un côté du polygone R_1^0 analogue à R_1 et équivalent à R_0 .

Envisageons maintenant un second groupe fuchsien que j'appellerai Γ , de telle façon que γ soit une fonction fuchsienne de la variable auxiliaire $\zeta + i\zeta'$ admettant ce groupe Γ . Le polygone fuchsien P correspondant sera de la deuxième famille (c'est-à-dire qu'il aura tous ses sommets sur le cercle fondamental et tous ses angles nuls) et de genre O . Ses différents sommets correspondront aux valeurs $A_1, A_2, \dots, A_q$ de la variable γ .

Aux q points singuliers $A_1, A_2, \dots, A_q$ correspondront les q substitutions

$$\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_q,$$

qui engendreront le groupe Γ ; et la substitution Σ_i changera ζ et ζ' en

$$\chi_i(\zeta, \zeta'), \chi'_i(\zeta, \zeta').$$

Il résulte de là qu'on retombera sur le même point de la variété V quand les quatre variables $\xi, \tau_i, \zeta, \zeta'$ subiront une des substitutions du groupe G engendré par les $2p + q$ substitutions

qui changent ces variables en

$$\begin{aligned} \varphi_k(\xi, \eta), \quad \psi_k(\xi, \eta), \quad \xi, \quad \xi' & \quad (k = 1, 2, \dots, 2p), \\ \theta_i(\xi, \eta), \quad \theta'_i(\xi, \eta), \quad \chi_i(\xi, \xi'), \quad \chi'_i(\xi, \xi') & \quad (i = 1, 2, \dots, q). \end{aligned}$$

Les $2p$ premières de ces substitutions engendrent un groupe G' (qui ne sera autre que le groupe fuchsien appliqué à ξ et à η , les deux variables ξ et ξ' demeurant inaltérées). Ce groupe fuchsien étant permutable aux substitutions Σ_i , on conclurait, comme plus haut, que G' est un sous-groupe invariant de G .

Ce groupe G peut être regardé comme le groupe fondamental de la variété V , pourvu que l'on suppose, comme nous l'avons fait, que γ est assujéti à ne pas pénétrer dans les cercles de garde.

En effet, soit N le point de l'espace à quatre dimensions dont les coordonnées sont ξ, η, ξ, ξ' . A chaque point N correspondra un point de V , mais à chaque point de V correspondront une infinité de points de N ; je dirai que ces points sont congruents entre eux.

D'après les définitions données dans l'*Analysis situs* (cf. p. 61), à chaque substitution du groupe fondamental de V correspondra un contour fermé K tracé sur V , le point initial du contour étant un certain point fixe choisi une fois pour toutes sur V (c'est le point que j'appelais M_0 dans l'*Analysis situs*). Soit N_0 l'un des points N correspondant à ce point fixe de V ; à notre contour fermé K correspondra dans l'espace (ξ, η, ξ, ξ') une ligne $N_0BN'_0$ allant du point N_0 à un point congruent N'_0 .

Il est clair ensuite que deux lignes $N_0BN'_0, N_0CN'_0$ ayant mêmes extrémités conduiront à une même substitution du groupe fondamental. Il suffit pour cela de faire voir que le contour fermé $N_0BN'_0CN_0$ limite une aire, car alors le contour fermé correspondant sur V limiterait aussi une aire et pourra se réduire à un point par déformation continue.

Il suffit donc de montrer que la région de l'espace à quatre dimensions où peut se mouvoir le point N est simplement connexe. Quelle est cette région? D'abord le point ξ, η peut parcourir tout le cercle fondamental, qui est une aire simplement connexe. Quant au point ξ, ξ' , il peut parcourir le polygone P et ses transformés par le groupe fuchsien F . Il pourrait donc parcourir aussi le cercle fondamental tout entier, s'il n'y avait lieu de tenir

compte de l'existence des cercles de garde. Comme γ ne peut pénétrer dans ces cercles de garde, il faut retrancher du polygone P de petites régions dans le voisinage de chaque sommet, de même pour ses transformés. Il faudra donc retrancher du cercle fondamental une infinité de petits cercles, tous extérieurs les uns aux autres et tous tangents au cercle fondamental. L'aire restante n'en étant pas moins simplement connexe, la région où peut se mouvoir le point $(\xi, \tau, \zeta, \zeta')$, c'est-à-dire le point N , est bien simplement connexe. c. q. f. d.

Ainsi, à un point N'_0 (ou, si l'on veut, à la substitution du groupe G qui change N_0 en N'_0) correspond une substitution du groupe fondamental, et une seule. Il résulte de là que le groupe fondamental est isomorphe à G , mais nous ne savons pas encore si l'isomorphisme n'est pas méridrique.

C'est ce qui arriverait s'il y avait des points N_0 (autres que N_0) tels que la substitution correspondante du groupe fondamental se réduise à la substitution identique, c'est-à-dire tels que le contour fermé tracé sur V et correspondant à la ligne N_0BN_0 limite une aire et puisse se réduire à un point par déformation continue.

Nous devons donc rechercher si, quand on décrit sur V un contour fermé infiniment petit, il peut arriver que le point N subisse une substitution de G ne se réduisant pas à la substitution identique. Quand on décrira sur V un contour infiniment petit, la variable γ décrira aussi dans son plan un contour infiniment petit. Ce contour ne pourra entourer l'un des points singuliers A_k , puisque chacun de ces points singuliers est protégé par un cercle de garde, très petit, mais fini, où γ ne peut pénétrer. Nous pourrions alors, en faisant subir à notre contour fermé une déformation infiniment petite, nous arranger pour que, γ restant constant tout le long du contour, la variable x décrive dans son plan un contour fermé infiniment petit. Si ce contour n'entoure aucun des points singuliers x_k , le point N dont les coordonnées sont ξ, τ, ζ, ζ' revient à sa valeur primitive, et il n'a pas subi une substitution de G autre que la substitution identique. Si le contour entoure un point singulier, et un seul, la variable z change de signe et le cycle n'est pas fermé sur V . Enfin, il ne peut arriver que le contour entoure deux points singuliers, puisqu'il est infiniment petit, que deux points singuliers ne peuvent être infiniment voi-

sins que quand y est près d'un des points A_i , et que nous ne pouvons approcher de ces points A_i à cause des cercles de garde.

En résumé, quand on décrira sur V un cycle fermé, la substitution subie par N se réduira toujours à la substitution identique. Donc l'isomorphisme de G et du groupe fondamental est holoédrique. En d'autres termes, puisque le groupe fondamental n'est défini que par sa forme, le groupe n'est autre chose que G .

On voit quel rôle jouent les cercles de garde dans le raisonnement qui précède. Supprimons maintenant ces cercles de garde et supposons que x et y puissent prendre des valeurs complexes quelconques, et que V soit, par conséquent, la variété définie par l'équation (1).

D'abord, le groupe fondamental sera toujours isomorphe à G ; je n'ai rien à changer à cette partie du raisonnement. Mais il reste à savoir si cet isomorphisme n'est pas méridrique, et, pour le reconnaître, je vais, comme plus haut, examiner ce qui se passe quand on décrit sur V un cycle fermé infiniment petit.

Si, quand on décrit ce cycle, y ne tourne pas autour d'un point singulier A_i ou ne reste pas infiniment voisin de A_i , les raisonnements précédents s'appliqueront encore et la substitution subie par N se réduira à la substitution identique. Supposons maintenant que y décrive un cercle fermé très petit autour de A_i . Alors ξ et ξ' se changeront en γ_i et γ'_i et N subira soit la substitution $(b_i, b'_i, \gamma_i, \gamma'_i)$, que j'appellerai, pour abrégé, T_i , soit cette même substitution suivie d'une substitution du groupe G' .

Précisons davantage. Quand on décrit le cycle, le point x décrit dans son plan un contour fermé infiniment petit. En même temps, les points

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_{2p+1},$$

par suite des variations de y , décriront des courbes très petites. Deux de ces points, que j'appellerai x_a et x_b , sont très voisins l'un de l'autre quand y est voisin de A_i . Les autres points x_k décriront des contours fermés quand y tournera autour de A_i . Quant à x_a et x_b , il pourra arriver qu'ils s'échangent, et alors ils décriront chacun un arc très petit, l'ensemble de ces deux arcs constituant une petite courbe fermée. Ou bien ils ne s'échangeront pas, de sorte que chacun d'eux décrira une courbe fermée.

Si x ne tourne autour d'aucun des points singuliers x_k , le point X subira la substitution T_i , à laquelle devra par conséquent correspondre, dans le groupe fondamental, la substitution identique.

Si x tourne autour d'un point x_k autre que x_a et x_b , z change de signe et le cycle n'est pas fermé; ce cas doit donc être exclu.

Si x tourne autour des points x_a et x_b , la somme des arguments de $x - x_a$ et $x - x_b$ augmente de 2π ou de 4π . Le premier cas doit être exclu parce que z changerait de signe; examinons le second.

Reprenons le polygone fuchsien R et les deux polygones partiels R' et R'' . Au point x_a correspondra sur R' un certain point u_a qui sera le milieu de l'un des côtés (au point de vue non-euclidien). Soit s_a la substitution qui change un point u du plan de R en un point symétrique de u par rapport à u_a (au point de vue non-euclidien).

Soit u'_a un point congruent de u_a , transformé de u_a par une substitution S du groupe fuchsien; et soit s'_a une substitution qui change un point en son symétrique par rapport à u'_a . On aura évidemment

$$s'_a = S^{-1} s_a S.$$

Considérons maintenant les différents points du plan de R qui correspondent à x_b ; parmi ces points, je distinguerai celui qui tend vers u_a quand y tend vers Λ_i sans franchir les coupures OA ; je l'appellerai u_b . Je désignerai par u'_b le transformé de u_b par S . Je définirai s_b et s'_b par rapport à u_b et u'_b comme s_a et s'_a le sont par rapport à u_a et u'_a .

Il est clair que

$$s_a^2 = s'_a{}^2 = s_b'^2 = s_b^2 = 1,$$

que $s_a s_b$ et $s_b s_a$ appartiennent au groupe fuchsien, que

$$s'_a = S^{-1} s_b S.$$

D'ailleurs, $s_a s_b$ et $s_b s_a$ sont inverses l'une de l'autre.

Cela posé, quand x aura décrit son contour autour de x_a et x_b , le point ξ, η aura subi la substitution $s_a s_b$ (ou la substitution $s_b s_a$, selon le sens dans lequel le contour aura été décrit) ou, plus généralement, une des substitutions du groupe fuchsien.

Le point X aura donc subi la substitution T_i suivie d'une des

substitutions S' de G' , ou, ce qui revient au même, d'une substitution S'' de G' suivie de T_i .

A la substitution $T_i S' = S'' T_i$ du groupe G correspondra encore dans le groupe fondamental la substitution identique.

Comme nous venons de voir qu'à T_i correspondait déjà la substitution identique, nous devons conclure qu'à S' et S'' correspondra également la substitution identique.

Il peut arriver encore que, quand on décrit le cycle fermé sur V , γ ne tourne pas autour de A_i , mais reste très voisin de A_i ; dans ce cas, ξ et ξ' reviendront à leurs valeurs primitives; en même temps, x décrira dans son plan un contour fermé; on pourra supposer que ce contour entoure les deux points singuliers x_a et x_b , puisque, quand γ est voisin de A_i , ces deux points x_a et x_b sont voisins l'un de l'autre. Alors le point u subit une substitution du groupe fuchsien et le point N subit une substitution S''' de G' à laquelle devra encore correspondre dans le groupe fondamental la substitution identique.

Ainsi, si nous reprenons notre groupe G qui est dérivé du sous-groupe G' et des substitutions T_i , nous voyons qu'à toutes les substitutions T_i et à certaines substitutions de G' correspond la substitution identique. Donc le groupe fondamental sera isomorphe à G' (et, par conséquent, au groupe fuchsien), puisqu'à toutes les T_i correspond la substitution identique, et cet isomorphisme sera, en général, méridrique, parce qu'à certaines substitutions de G' correspondra, en général, la substitution identique.

Avant d'aller plus loin, une distinction est nécessaire. Il peut arriver que les points singuliers x_a et x_b s'échangent quand γ tourne autour de A_i , ou bien qu'ils ne s'échangent pas. Dans le premier cas, il n'y a pas de difficulté; la partie de la variété (1) voisine du point $\gamma = A_i$, $x = x_a, x_b$ est assimilable à la partie de la variété

$$z^2 = \gamma - x^2$$

voisine de l'origine, et tout cycle fermé qui reste très voisin de ce point est réductible à un point de telle façon que la substitution correspondante du groupe fondamental ne peut être que la substitution identique. Dans ce cas, à T_i , à S' , à S'' correspondra la substitution identique, ainsi que nous venons de l'expliquer.

Dans le second cas, la surface (1) présente un point conique et la portion de la variété (1) voisine de $y = \Lambda_i$, $x = x_a = x_b$ est assimilable à la partie de la variété

$$z^2 = y^2 + x^2$$

voisine de l'origine.

Alors deux conventions également légitimes peuvent être faites : Supposons qu'un contour fermé tracé sur V puisse se réduire à un point, *mais en franchissant le point conique*, et ne le puisse pas autrement. On peut admettre que la substitution correspondante du groupe fondamental est encore la substitution identique, ou, en d'autres termes, on peut traiter le point conique comme un point ordinaire de la variété. Dans ce cas, encore à T_i , S' et S'' correspondra la substitution identique.

Ou bien on peut faire la convention contraire et traiter le point conique comme un point singulier qu'il est interdit de franchir. Dans ce cas, à T_i correspondra encore la substitution identique, mais il n'en sera plus de même pour S'' . On aura d'ailleurs toujours $S'' \equiv S'''$.

Voici maintenant la question qui se pose. M. Picard a démontré (cf. *Théorie des fonctions algébriques de deux variables*, t. I, p. 85 et suiv.) que, si une surface algébrique est la plus générale de son degré, les cycles linéaires peuvent être réduits à des points de telle façon que le nombre de Betti p_1 est égal à 1.

Il ne s'ensuit pas immédiatement que le groupe fondamental se réduise à la substitution identique. En effet, M. Picard a démontré que tout cycle linéaire est *homologue* à zéro, et, pour démontrer que le groupe fondamental se réduit à la substitution identique, il faudrait faire voir que tout cycle linéaire est *équivalent* à zéro. Pour la différence entre les homologies et les équivalences, voir *Analysis situs*, p. 63.

Il est donc nécessaire de revenir sur la question à ce nouveau point de vue. Voyons d'abord le cas où $p = 1$, c'est-à-dire où notre polygone fuchsien R se réduit à un parallélogramme. Alors toutes les substitutions de G' , et par conséquent toutes celles du groupe fondamental, sont permutable entre elles.

Le groupe G' dérive de deux substitutions que j'appelle s et s_1 . Soit alors un cycle quelconque à ce cycle correspondra une sub-

stitution de G' qui pourra s'écrire, par exemple,

$$s^{\alpha} s_1^{\alpha_1} s^{\beta} s_1^{\beta_1} s^{\gamma} s_1^{\gamma_1}.$$

Les substitutions de G' étant permutable, elle pourra s'écrire également

$$s^{\alpha + \beta + \gamma} s_1^{\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1}.$$

Si, comme l'a démontré M. Picard, tout cycle est homologue à zéro, cela veut dire que, parmi les cycles possibles, il y en a deux correspondant aux substitutions de G' :

$$s^{a'} s_1^{b'}, \quad s^{c'} s_1^{d'}$$

(où a, b, c, d sont quatre entiers dont le déterminant n'est pas nul) et qui sont susceptibles de se réduire à un point. Il arriverait alors qu'à $s^{a'} s_1^{b'}$ et à $s^{c'} s_1^{d'}$ correspondra dans le groupe fondamental la substitution identique, ce que j'écrirai :

$$s^{a'} s_1^{b'} = 1, \quad s^{c'} s_1^{d'} = 1.$$

Nous en concluons, en nous rappelant que s et s_1 sont permutable,

$$s^2 = 1, \quad s_1^2 = 1, \quad z = ad - bc.$$

On voit que le groupe fondamental ne pourrait, en tout cas, comprendre qu'un nombre fini de substitutions, au plus z^2 .

Mais on peut aller plus loin, même dans le cas de $p > 1$.

Supposons, pour fixer les idées, que $p = 2$ et appelons, pour abréger,

$$a, \quad b, \quad c, \quad d, \quad e, \quad f$$

les six points singuliers du plan des x que nous appelions jusqu'ici $x_0, \dots, x_6$.

Soit d'abord $y = 0$; joignons le point $x = 0$ aux points a, b, c, d, e, f par des coupures rectilignes, de telle façon qu'en tournant autour du point O on rencontre ces coupures dans l'ordre

$$Oa, \quad Ob, \quad Oc, \quad Od, \quad Oe, \quad Of.$$

Faisons maintenant varier y d'une manière continue, mais sans franchir aucune des coupures OA_i ; en même temps les points $a,$

b , etc., se déplaceront d'une manière continue, mais sans s'échanger ou sans tourner les uns autour des autres; les coupures Oa , etc., se déplaceront et même cesseront d'être rectilignes, mais on les rencontrera toujours dans le même ordre en tournant autour de O .

Quand on franchira la coupure Oa , la variable u (argument des fonctions fuchsienes) subira une transformation que j'appellerai a et qui sera une sorte de symétrie analogue à la substitution s_a définie plus haut, page 59 (symétrie par rapport à u_a).

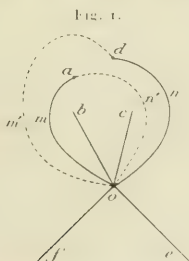
Je définirai de même les transformations b , c , d , e , f ; il est clair qu'on aura

$$a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = e^2 = f^2 = 1, \\ abcdedf = 1,$$

et que ce sont là les seules relations qu'il y ait entre elles. Le groupe fuchsien sera formé de toutes les combinaisons possibles de ces transformations *prises en nombre pair*.

Lorsque y tend vers Λ_i , deux des points singuliers, a et d , par exemple, se rapprochent l'un de l'autre; quand y tourne autour de Λ_i , ces deux points s'échangeront (dans le cas général où le point $x = a$, $y = \Lambda_i$ n'est pas un point double de la surface, cas général que nous examinerons d'abord).

Quand le point y est voisin de Λ_i (mais sans avoir franchi la



coupure $O\Lambda_i$), les quatre coupures Oa , Ob , Oc , Od présentent la disposition représentée en trait plein sur la figure 1; après que le point y a décrit un contour autour de $O\Lambda_i$, les coupures Oa et Od se sont déformées et ont pris la forme représentée en trait

pointillé sur la figure. Elles se sont d'ailleurs permutées de telle façon que la coupure en trait plein Oma est devenue la coupure en trait pointillé $Om'd$, tandis que la coupure Ond est devenue $On'a$.

Traçons maintenant dans le plan un contour fermé quelconque, partant d'un point fixe M_0 quelconque du plan; si ce contour coupe successivement les coupures Oa, Oc, Ob, Of, Oc , par exemple, il équivaudra à la substitution $acabfe$.

Cela posé, considérons un contour fermé coupant l'une des coupures

$$(1) \quad Oma, Ob, Oc, Ond, Oc, Of,$$

et une seule; quand γ aura tourné autour de A_1 , il se transformera en un contour coupant une des coupures

$$(2) \quad Om'd, Ob, Oc, Om'a, Oc, Of,$$

et une seule.

Or, il est aisé de voir sur la figure qu'un contour coupant l'une des coupures (2) coupera dans un certain ordre certaines des coupures (1) et équivaudra, par conséquent, à une certaine combinaison des substitutions a, b et c .

Si nous supposons, par exemple, M_0 extérieur au contour $Om'dna$. Le cycle qui coupe :

$Om'd$ coupera Ond		et équivaudra à d ,	
Ob	" Ond, Oma, Ob, Oma et Ond	"	$dabad$,
Oc	" Ond, Oma, Oc, Oma et Ond	"	$dacud$,
$Om'a$	" Ond, Oma et Ond	"	dud ,
Oe	" Oe	"	e ,
Of	" Of	"	f .

Par conséquent, la transformation T_i changera les substitutions

$$(3) \quad a, b, c, d, e, f$$

respectivement en

$$(4) \quad d, dabud, dacud, dud, e, f.$$

Nous avons, plus haut, écrit la relation

$$T_i S' = S'' T_i,$$

et montré qu'aux deux substitutions S' et S'' de G' doit correspondre la même substitution du groupe fondamental, ce que nous écrirons :

$$(5) \quad S' \equiv S''.$$

Comme S' est une certaine combinaison des substitutions (3) en nombre pair et que S'' est la combinaison correspondante des substitutions (4), il suffit, pour que l'équivalence (5) ait lieu, que l'on ait

$$a \equiv d, \quad b \equiv dabad, \quad c \equiv dacad, \quad d \equiv dad.$$

Or, toutes ces équivalences se réduisent à

$$ad \equiv 1,$$

ou, ce qui revient au même, à $a \equiv d$.

Nous avons vu ensuite qu'à la substitution S''' de G' doit correspondre la substitution identique du groupe fondamental, ce que j'écris :

$$S''' \equiv 1.$$

On voit ici que S''' n'est autre chose que ad , de sorte que nous retombons toujours sur la même équivalence

$$ad \equiv 1$$

qui est (avec $T_i \equiv 1$) la seule que l'on puisse déduire de la considération du point singulier Λ_i .

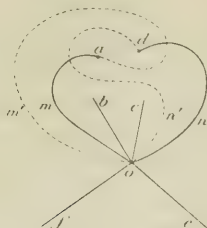
Il nous reste à examiner le cas où le point

$$x = a, \quad y = \Lambda_i$$

est un point conique de la surface $z = F(x, y)$. Retenons une figure analogue à la figure 1. Quand le point y tournera autour de Λ_i , les coupures en trait plein Oma et OND se changeront dans les coupures $Om'a$ et $On'd$ en trait pointillé (fig. 2). En

raisonnant comme tout à l'heure et considérant les différents cycles

Fig. 2.



qui partent du point M_0 et qui coupent une des coupures, et une seule, on voit que le cycle qui coupe

$Om'a$ coupera Ond , Oma et Ond ,

Ob » Ond , Oma , Ond , Oma , Ob , Oma , Ond , Oma , Ond ,

Oc » Ond , Oma , Ond , Oma , Oc , Oma , Ond , Oma , Ond ,

$On'd$ » Ond , Oma , Ond , Oma , Ond ,

Oe » Oe ,

Of » Of .

Ces cycles équivaldront donc respectivement aux combinaisons

dad , $da da ba dad$, $da da ca dad$, $da dad$, e , f ,

c'est-à-dire que T_i transformera les substitutions

a , b , c , d , e , f

dans les substitutions

dad , $da da ba dad$, $da da ca dad$, $da dad$, e , f .

Si l'on traite le point conique comme un point ordinaire de la variété, on aura encore

$$S' = S'', \quad S''' = 1.$$

La première condition entraîne

$$(6) \quad a \equiv dad, \quad b \equiv da da ba dad, \quad c \equiv da da ca dad, \quad d \equiv da dad$$

La seconde nous donne simplement

$$ad \equiv 1,$$

ce qui entraîne d'ailleurs les conditions (6).

Considérons maintenant le point conique comme un point qu'il est interdit de franchir. Alors nous aurons encore $S' = S''$ et, par conséquent, les conditions (6), mais nous n'aurons plus $S''' \equiv 1$, c'est-à-dire $ad \equiv 1$.

Les conditions (6) se ramènent à une seule :

$$(ad)^2 \equiv 1.$$

Ainsi, si nous nous interdisons de franchir le point conique, nous n'aurons pas $ad \equiv 1$, mais nous aurons $(ad)^2 \equiv 1$.

Ainsi, le cycle qui tourne autour des deux points a et d n'est pas la frontière d'une variété à deux dimensions faisant partie de V , tandis que ce cycle pris deux fois constitue la frontière d'une variété à deux dimensions faisant partie de V , si du moins l'on suppose que toutes ces variétés à une ou à deux dimensions ne s'écartent pas beaucoup du point conique.

Il est aisé de rapprocher ceci d'un fait connu. Nous avons déjà fait remarquer que la portion de V voisine du point conique est homéomorphe à la portion de la variété $z^2 = x^2 - y^2$ ou de la variété $z^2 = xy$ voisine de l'origine.

Appelons donc W la variété à quatre dimensions $z^2 = xy$, dont on suppose que l'on a exclu l'origine qui est un point conique. Ce qui précède nous enseigne qu'il y a sur W un cycle fermé C à une dimension tel que l'on n'ait pas l'équivalence

$$C = 0,$$

mais que l'on ait l'équivalence

$$2C = 0.$$

Or, considérons la variété à trois dimensions

$$z^2 = xy, \quad [x^2] + [y^2] = 1$$

que j'appelle W' . C'est la variété envisagée par M. Heegaard [cf. Premier Supplément à l'*Analysis situs* (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. XIII, 1899)].

A tout point x, y, z de W correspond un point

$$\frac{x}{\sqrt{|x^2| + |y^2|}}, \quad \frac{y}{\sqrt{|x^2| + |y^2|}}, \quad \frac{z}{\sqrt{|x^2| + |y^2|}}.$$

Si le point de W décrit un cycle C , le point correspondant de W' décrira un cycle C' . Or, il est évident que si sur W on a $C \equiv 0$, sur W' on aura $C' \equiv 0$, et réciproquement. (Je rappelle que l'équivalence $C \equiv 0$ signifie qu'il existe sur W une variété à deux dimensions dont C est la frontière complète.)

Si donc sur W on a $2C \equiv 0$ sans avoir $C \equiv 0$, il y aura sur W' un cycle C' tel que $2C' \equiv 0$ sans que $C' \equiv 0$.

Or, on se rappelle que l'existence d'un pareil cycle C' est une des propriétés caractéristiques de la variété de M. Heegaard.

Rien n'est plus facile maintenant que de déterminer le groupe fondamental. Ce groupe est méridriquement isomorphe au groupe fuchsien, lequel dérive de toutes les combinaisons *en nombre pair* des substitutions a, b, c, d, e, f , lesquelles sont supposées liées par les relations

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 = 1, \quad abcdef = 1.$$

Mais si les deux points a et d peuvent s'échanger quand γ tourne autour de A_i , on aura $ad \equiv 1$, d'où

$$a = d.$$

Je dis que la même relation subsistera si a se change en d quand γ décrit un cycle fermé quelconque, enveloppant, par exemple, non plus un seul point singulier, mais deux points singuliers A_i et A_k . Si, en effet, par exemple, a s'échange avec b quand γ tourne autour de A_i et b avec d quand γ tourne autour de A_k (de telle façon que a se change en d quand γ décrit le contour qui enveloppe à la fois ces deux points singuliers), on aura

$$a = b, \quad b = d$$

et, par suite,

$$a = d.$$

C. Q. F. D.

Si donc les points singuliers a, b, c, d sont susceptibles de s'échanger entre eux, on aura

$$a = b = c = d.$$

Si le polynome $F(x, y)$ est indécomposable, les racines de l'équation

$$F(x, y) = 0$$

(considérée comme équation en x) seront toutes susceptibles de s'échanger entre elles quand on fera varier y d'une façon quelconque.

Nos $2p + 2$ points singuliers (qui sont au nombre de six, a, b, c, d, e, f , si $p = 2$) s'échangeront donc tous les uns avec les autres et l'on aura

$$a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow e \rightarrow f.$$

Une substitution quelconque du groupe fondamental, se réduisant à une combinaison en nombre pair de a, b, c, d, e, f , se réduira à une puissance paire de a , c'est-à-dire à la substitution identique.

Ainsi, si le polynome F est indécomposable, le groupe fondamental se réduit à une seule substitution qui est la substitution identique.

Si le polynome F se décompose en deux facteurs $F = F_1 F_2$, nous devons distinguer deux sortes de points singuliers : ceux qui satisfont à l'équation $F_1 = 0$ et ceux qui satisfont à $F_2 = 0$; supposons, par exemple, que a, b, c, d satisfassent à $F_1 = 0$, e et f à $F_2 = 0$; on aura alors

$$a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow e \rightarrow f.$$

On n'aura pas $a \rightarrow e$ (si les points coniques ne sont pas regardés comme des points ordinaires), mais on aura $(ae)^2 = 1$, de sorte que le groupe fondamental comprendra seulement deux substitutions

$$1, ae.$$

Il faut voir encore si ce nombre n'est pas réduit par la considération de la relation

$$(7) \quad abcdef = 1.$$

Observons que l'on doit toujours réduire le degré de F à être pair (au besoin par une transformation homographique), puisque le nombre des points singuliers est $2p + 2$. Nous devons alors distinguer le cas où F_1 et F_2 sont tous deux de degré pair; alors

la relation (7) se réduit à une identité et le groupe fondamental n'est pas réduit; et le cas où F_1 et F_2 sont tous deux de degré impair: alors la relation (7) se réduit à $ac \equiv 1$ et le groupe fondamental ne comprend plus qu'une substitution.

Si F se décompose en trois facteurs $F = F_1 F_2 F_3$, que a soit l'une des racines de $F_1 = 0$, b l'une de celles de $F_2 = 0$, c l'une de celles de $F_3 = 0$, on aura

$$a^2 = b^2 = c^2 = 1, \quad (ab)^2 = (bc)^2 = (ac)^2 = 1,$$

ce qui montre que le groupe fondamental se réduit à quatre substitutions

$$1, \quad ab, \quad bc, \quad ac,$$

ce nombre pouvant encore être réduit, à cause de la relation (7), si deux des facteurs sont de degré impair.

Si, enfin, F se décompose en n facteurs $F = F_1 F_2 \dots F_n$; si a_i est l'une des racines de $F_i = 0$; on aura

$$(8) \quad a_i^2 \equiv 1, \quad (a_i a_k)^2 \equiv 1 \quad (i, k = 1, 2, \dots, n).$$

Soit alors S une substitution quelconque du groupe fondamental; ce sera le produit d'un nombre pair des substitutions a_i . Mais des relations (8) on peut déduire

$$a_i a_k = a_k a_i.$$

On peut donc permuter les facteurs de S et l'écrire sous la forme

$$a_1^{\varepsilon_1} a_2^{\varepsilon_2} \dots a_n^{\varepsilon_n} \quad (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n \equiv 0, \text{ mod } 2).$$

On peut ensuite, à l'aide des relations (8), réduire les exposants ε à 0 ou à 1, de sorte que S se réduira à un produit de k facteurs $a_1, a_2, \dots, a_n$, les k facteurs étant différents et k étant pair, l'ordre des facteurs étant d'ailleurs regardé comme indifférent. Il y a 2^{n-1} combinaisons possibles; le groupe fondamental comprend donc 2^{n-1} substitutions; mais ce nombre peut être réduit de moitié par le moyen de la relation (7), si deux ou plusieurs des facteurs sont de degré impair.

SUR LES PETITS MOUVEMENTS D'UN CORPS PESANT :

Par M. L. LECORNE.

On ne sait pas intégrer, dans le cas général, les équations différentielles du mouvement d'un corps pesant qui possède un point fixe; mais toute difficulté disparaît si l'on se borne à l'étude du cas où les vitesses sont infiniment petites, et l'on est alors conduit à des résultats simples, qu'il me paraît intéressant d'indiquer.

Prenons comme axes mobiles de coordonnées Ox, Oy, Oz les axes d'inertie principaux correspondant au point d'attache O . Appelons a, b, c les cosinus directeurs de la droite OG aboutissant au centre de gravité G ; l la longueur OG ; M la masse totale; A, B, C les moments d'inertie principaux. Toutes ces quantités sont des constantes. Soient, d'autre part, p, q, r les composantes de la rotation instantanée et α, β, γ les cosinus directeurs (variables avec le temps) que forme la direction verticale avec les axes. En posant, pour abréger, $F = Mgl$, on a les équations du mouvement

$$(1) \quad \begin{cases} A \frac{dp}{dt} - (C - B)qr = F(b\gamma - c\beta), \\ B \frac{dq}{dt} - (A - C)rp = F(c\alpha - a\gamma), \\ C \frac{dr}{dt} + (B - A)pq = F(a\beta - b\alpha). \end{cases}$$

Il faut écrire, en outre, que la direction absolue de la verticale est invariable, ce qui donne

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{d\alpha}{dt} = r\beta - q\gamma, \\ \frac{d\beta}{dt} = p\gamma - r\alpha, \\ \frac{d\gamma}{dt} = q\alpha - p\beta. \end{cases}$$

Si l'on pose

$$\alpha = a + \lambda, \quad \beta = b + \mu, \quad \gamma = c + \nu,$$

les quantités λ, μ, ν sont infiniment petites. Il en est de même

de p, q, r . Négligeant alors les infiniment petits du second ordre, nous pouvons réduire les six équations qui précèdent aux suivantes :

$$(3) \quad \begin{cases} A \frac{dp}{dt} = F(b\gamma - c\mu), \\ B \frac{dq}{dt} = F(c\lambda - a\gamma), \\ C \frac{dr}{dt} = F(a\mu - b\lambda), \end{cases}$$

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{d\lambda}{dt} = rb - qc, \\ \frac{d\mu}{dt} = pc - ra, \\ \frac{d\gamma}{dt} = qa - rb. \end{cases}$$

La relation $\lambda^2 + \mu^2 + \gamma^2 = 1$ montre en outre que l'on a

$$a\lambda + b\mu + c\gamma = 0.$$

L'élimination de λ, μ, γ conduit au système

$$(5) \quad \begin{cases} A \frac{d^2 p}{dt^2} = (b^2 + c^2)p - abq + acr, \\ B \frac{d^2 q}{dt^2} = bap - (c^2 + a^2)q + bcr, \\ C \frac{d^2 r}{dt^2} = cap - cbq - (a^2 + b^2)r. \end{cases}$$

Cherchons s'il existe une solution particulière telle que le mouvement se réduise à une rotation effectuée autour d'un axe immobile. On sait que, si l'axe instantané de rotation d'un solide est fixe dans l'espace, il l'est également par rapport au solide, et réciproquement. Soient u, v, w les cosinus directeurs, constants, d'un pareil axe. En appelant ω la vitesse angulaire, on a

$$p = u\omega, \quad q = v\omega, \quad r = w\omega$$

et les équations (5) deviennent

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{d^2 \omega}{dt^2} = -(b^2 + c^2)u - abv - acw \\ F\omega = Au \\ -bau - (c^2 + a^2)v - bcw = cau + cbv - (a^2 + b^2)w, \\ Bv \\ Cw \end{cases}$$

Appelons $-s$ la valeur commune de ces rapports. L'élimination de u, v, w conduit à l'équation en s

$$(7) \quad \begin{vmatrix} As - 1 + a^2 & ab & ac \\ ba & Bs - 1 + b^2 & bc \\ ca & cb & Cs - 1 + c^2 \end{vmatrix} = 0.$$

En effectuant le développement de ce déterminant, on voit disparaître le terme indépendant de s . Il y a donc une racine nulle (dont nous reparlerons plus loin), et, en la supprimant, il reste l'équation du second degré

$$(8) \quad \begin{vmatrix} ABCs^2 - [AB(a^2 + b^2) + BC(b^2 + c^2) + CA(c^2 + a^2)]s \\ - Aa^2 - Bb^2 - Cc^2 \end{vmatrix} = 0,$$

qu'on peut écrire

$$(9) \quad \frac{Aa^2}{1 - As} - \frac{Bb^2}{1 - Bs} - \frac{Cc^2}{1 - Cs} = 0.$$

Sous cette dernière forme, la réalité des racines est manifeste. On reconnaît en outre, en supposant $A < B < C$, qu'il y a une racine entre $\frac{1}{C}$ et $\frac{1}{B}$ et une autre entre $\frac{1}{B}$ et $\frac{1}{A}$. Les deux racines ne peuvent se confondre que si leur valeur commune est $\frac{1}{B}$, ce qui entraîne la condition

$$(B - A)(B - C) = 0.$$

Quand cette condition est remplie, l'ellipsoïde d'inertie est de révolution; nous laisserons ce cas de côté.

Les équations (6) conduisent aisément aux suivantes :

$$(10) \quad \frac{bu - av}{A bu - B av - B cv - C bw - C aw - A cu} = s,$$

et l'on en déduit, avec une notation évidente,

$$(11) \quad \sum (B - C) a c w = 0,$$

ou bien

$$(12) \quad \begin{vmatrix} Au & Bv & Cw \\ u & v & w \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0,$$

équation qui représente un cône du second ordre, C .

Les équations (6) donnent en outre

$$(13) \quad Aau + Bbv + Ccw = 0,$$

ce qui représente le plan P, conjugué de la verticale par rapport à l'ellipsoïde d'inertie. Il y a donc deux axes de rotation situés à l'intersection du cône C avec le plan P, et l'on voit que ces axes ne sont généralement pas horizontaux.

Le cône C, que nous rencontrons ici, mérite une attention particulière. On voit d'abord qu'il admet à la fois comme génératrices les axes principaux de l'ellipsoïde d'inertie et la droite aboutissant au centre de gravité. En outre, il coupe le plan horizontal suivant les deux axes de la conique située dans ce plan. Si l'on cherche, en effet, à déterminer les cosinus u, v, w de manière à obtenir le maximum ou le minimum de la fonction $Au^2 + Bv^2 + Cw^2$ avec la condition $au + bv + cw = 0$, on est conduit aux trois équations

$$Au du + Bv dv + Cw dw = 0,$$

$$u du - v dv + w dw = 0,$$

$$a du + b dv + c dw = 0,$$

qui, par l'élimination de du, dv, dw , reproduisent l'équation (12).

Le cône C est également le lieu des normales abaissées du point O sur les surfaces homofocales à l'ellipsoïde central; autrement dit, il est le lieu des directions qui passent par l'origine et qui sont principales en l'un de leurs points et l'on peut, pour ce motif, lui attribuer le nom de *cône principal en O*. Pour établir cette propriété, considérons une pareille direction et portons sur elle, à partir de l'origine, une longueur $OL = \rho$. Cette direction sera principale en L si, pour toutes les valeurs de α, β, γ vérifiant l'équation $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$, l'on a

$$\sum m(xu + yv + wz - \rho)(\alpha x + \beta y + \gamma z) = 0$$

ou, en développant,

$$(B - C - A)\alpha u + (C - A - B)\beta v + (A + B - C)\gamma w - 2M\rho(\alpha a + \beta b + \gamma c) = 0,$$

ce qui peut encore s'écrire

$$(Au - M\rho a)\alpha + (Bv + M\rho b)\beta + (Cw + M\rho c)\gamma = 0.$$

On est ainsi conduit aux relations

$$(14) \quad \frac{u}{Aa + Ml\varphi} = \frac{v}{Bv + Ml\varphi} = \frac{w}{Cw + Ml\varphi} = \frac{au + bv + cw}{Ml\varphi},$$

qui, par l'élimination de $Ml\varphi$, reproduisent les équations (10). C'est ce qu'il fallait démontrer.

On trouve aussi

$$(15) \quad Ml\varphi = \frac{(A - B)uv}{bu - av} + \dots = \frac{\sum (A - B)bu + av)uv}{\sum (bu - av)^2},$$

ou bien, en appelant i l'angle des directions (u, v, w) et (a, b, c) ,

$$Ml\varphi = \frac{(Au^2 + Bv^2 + Cw^2)(au + bv + cw) - \sum Aau}{\sum (bu - av)^2} \\ = \frac{(Au^2 + Bv^2 + Cw^2) \cos i - \sum Aau}{\sin^2 i}.$$

$Au^2 + Bv^2 + Cw^2$ est le moment d'inertie I relatif à la direction (u, v, w) . Quand cette direction est dans le plan $\sum Aau = 0$, il reste simplement

$$(15bis) \quad Ml\varphi = \frac{I \cos i}{\sin^2 i},$$

relation qui va nous être bientôt utile.

Revenons aux propriétés des axes de rotation. On a, pour chacun d'eux, d'après les équations (6),

$$(1 - As)u = a(au + bv + cw)$$

et deux équations analogues. On en conclut que u, v, w sont proportionnels aux quantités $\frac{a}{1 - As}, \frac{b}{1 - Bs}, \frac{c}{1 - Cs}$.

Soient s_1, s_2 les deux racines et $(u_1, v_1, w_1), (u_2, v_2, w_2)$ les cosinus correspondants. L'équation (9) donne les deux relations

$$\sum \frac{Aa^2}{1 - As_1} = 0 \quad \text{et} \quad \sum \frac{Aa^2}{1 - As_2} = 0.$$

d'où, en retranchant,

$$\sum \frac{A^2 \alpha^2}{(1 - A s_1)(1 - A s_2)} = 0,$$

c'est-à-dire

$$A^2 u_1 u_2 + B^2 v_1 v_2 + C^2 w_1 w_2 = 0.$$

Ceci montre que les axes de rotation sont deux diamètres conjugués de l'ellipsoïde

$$A^2 x^2 + B^2 y^2 + C^2 z^2 = \text{const.},$$

qu'il ne faut pas confondre avec l'ellipsoïde d'inertie (cet ellipsoïde auxiliaire joue un rôle important, comme l'on sait, dans la théorie de la polhodie). On voit aussi que les directions

$$\begin{cases} A u_1, & B v_1, & C w_1, \\ A u_2, & B v_2, & C w_2 \end{cases}$$

sont normales entre elles. En tenant compte des équations (12) et (13), on est amené à conclure que :

Les plans verticaux menés par les axes de rotation se coupent à angle droit.

Ces plans sont évidemment les plans de symétrie du cylindre vertical passant par l'intersection de l'ellipsoïde auxiliaire avec le plan $Aax + Bby + Ccz = 0$.

Pour chaque axe de rotation, la formule (15^{bis}) est applicable et s'interprète de la manière suivante :

Le centre de percussion relatif à un axe qui est principal en l'un de ses points, P, se trouve, d'une part, dans le plan mené par l'axe et par le centre de gravité, et, d'autre part, dans le plan normal à l'axe au point P. Il est à une distance de l'axe égale à $\frac{I}{Mgh}$, I désignant le moment d'inertie relatif à l'axe et h la distance du centre de gravité à cette droite. Ceci rappelé, la formule (15^{bis}), mise sous la forme $\frac{I}{Ml \sin i} = r \tan i$, signifie que *le centre de percussion correspondant à chacun des axes de rotation se trouve sur la droite OG.*

On aurait pu établir *a priori* ce résultat en remarquant que,

dans chacun des mouvements de rotation, les forces d'inertie doivent faire équilibre à la pesanteur. Celle-ci ayant un moment nul par rapport à la verticale du centre de gravité, il faut que les forces d'inertie admettent une résultante unique rencontrant également cette verticale. A cet effet, il est tout d'abord nécessaire que l'axe de rotation soit principal en l'un de ses points. Les forces d'inertie ont alors une résultante unique, appliquée au centre de percussion. Comme la vitesse de rotation est infiniment petite, cette résultante est normale au plan vertical passant par le centre de percussion et par l'axe de rotation. Dès lors, le moment de la résultante, par rapport à la verticale du centre de gravité, ne peut évidemment être nul que si le centre de percussion se trouve sur cette verticale.

Si les conditions initiales sont convenablement choisies, le mouvement infiniment petit du solide se réduit à une oscillation autour de l'un des axes qui viennent d'être déterminés. Dans ce mouvement, la droite qui admet pour paramètres directeurs les quantités Au , Bv , Cw demeure dans un plan horizontal; cela était à prévoir, car cette droite a la direction du vecteur résultant des moments des quantités de mouvement, et l'extrémité de ce vecteur, en vertu du théorème connu de Resal, se déplace parallèlement au vecteur résultant des moments des forces extérieures, vecteur qui, dans le cas présent, est horizontal. La vitesse angulaire du mouvement oscillatoire doit, d'après les équations (6), vérifier la relation

$$\frac{d^2\omega}{dt^2} = -sF\omega,$$

d'où

$$\omega = R \sin(\sqrt{sF}t - \varepsilon)$$

avec deux constantes arbitraires, R et ε , dont la première est infiniment petite. La durée d'oscillation est $T = \frac{\pi}{\sqrt{sF}}$; mais les équations (6) donnent

$$sF = \frac{(Au - bv - cw)^2}{Au^2 + Bv^2 + Cw^2} = \frac{\sin^2 i}{1};$$

donc

$$T = \frac{\pi}{\sin i} \sqrt{\frac{A}{F}}.$$

Soit k le rayon de giration. En remplaçant I par Mk^2 et F par Mg/l , il vient

$$T = \frac{\pi}{\sin i} \frac{k}{\sqrt{gl}}.$$

Cette durée est la même que celle des oscillations effectuées par le solide dans le cas où l'axe de rotation est invariablement fixe, avec l'inclinaison i . Le produit des durées correspondant aux deux axes de rotation est, d'après la formule (8), $\frac{\pi^2 ABC}{I'F}$, en appelant I' le moment d'inertie relatif à la droite OG.

Voyons maintenant ce que signifie la racine nulle de l'équation (7). Les équations (10) montrent que, si s est nul, les cosinus u, v, w sont égaux à a, b, c ; par conséquent, le mouvement de rotation s'effectue alors autour de la verticale. D'après les équations (6), on a $\frac{d^2\omega}{dt^2} = 0$, d'où $\omega = mt + n$ avec deux constantes infiniment petites m et n . Mais les équations (1) conduisent dans tous les cas à l'intégrale

$$Aap + Bbq + Ccr = \text{const.}$$

Si l'on y remplace p, q, r par $a\omega, b\omega, c\omega$, on reconnaît que la constante m est nulle. La rotation autour de la verticale est donc uniforme.

Cette rotation uniforme, superposée aux deux mouvements oscillatoires déjà trouvés, fournit la solution générale des équations linéaires (3) et (4). Car le mouvement ainsi obtenu dépend de cinq constantes arbitraires, nombre précisément égal à celui des inconnues (λ, μ, ν étant liés, comme on l'a vu, par la condition $a\lambda + b\mu + c\nu = 0$). Par conséquent :

Le mouvement le plus général (infiniment lent) d'un corps solide possédant un point fixe s'obtient par la composition d'une rotation uniforme autour de la verticale et de deux mouvements oscillatoires autour de deux axes inclinés qui sont situés dans deux plans verticaux rectangulaires et appartiennent au plan conjugué de la verticale par rapport à l'ellipsoïde d'inertie.

Examinons en particulier le cas où le solide est abandonné sans vitesse initiale. Alors les constantes ε sont nulles, ainsi que la

constante n . Ce mouvement résulte des deux oscillations

$$\omega_1 = R_1 \sin(t \sqrt{s_1 F}),$$

$$\omega_2 = R_2 \sin(t \sqrt{s_2 F}),$$

simultanément effectuées autour des deux axes de rotation. L'axe instantané demeure indéfiniment dans le plan conjugué de OG par rapport à l'ellipsoïde d'inertie, et le mouvement du solide équivaut au roulement de ce plan sur un cône fixe (infiniment aplati).

Pour que le mouvement se réduise à une oscillation autour de l'un des deux axes, il faut et il suffit que le déplacement initial du solide, à partir de la position d'équilibre, soit produit par une rotation autour de cet axe. Quand cela a lieu, la ligne OG s'écarte de la verticale dans un plan perpendiculaire à l'axe de rotation. Mais nous avons vu que le plan vertical perpendiculaire à l'un des axes de rotation contient l'autre. D'après cela :

Pour que le solide, abandonné sans vitesse initiale, oscille autour de l'un des axes de rotation, il faut et il suffit qu'à l'instant initial le centre de gravité se trouve dans le plan vertical déterminé par le second axe.

Les résultats qui précèdent peuvent, à titre de première approximation, être appliqués au cas de mouvements *très petits* (mais non infiniment petits). Pour passer à une seconde approximation, il faudrait employer la méthode de variation des constantes arbitraires et les quantités appelées R_1 , R_2 , ε_1 , ε_2 deviendraient alors lentement variables; il en serait de même pour la rotation autour de la verticale.

Cherchons à généraliser à un autre point de vue l'étude du mouvement infiniment lent, et demandons-nous s'il est possible de choisir les conditions initiales de telle façon qu'un solide pesant, fixé en un point, tourne avec une vitesse finie autour d'un axe immobile passant par ce point.

Posons, comme précédemment, $p = n\omega$, $q = \lambda\omega$, $r = \mu\omega$ et substituons dans les équations exactes (1). Il vient

$$(16) \quad \lambda \mu \frac{d\omega}{dt} = (C + B \lambda \mu \omega) F(t) \gamma \quad ,$$

et deux équations analogues.

Les équations (2) donnent, d'autre part,

$$(17) \quad \begin{cases} \frac{dz}{dt} + \omega(x\gamma - v\beta) = 0, \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

On tire de là, en appelant h, k, j trois constantes arbitraires, les trois intégrales

$$(18) \quad \begin{cases} Au x + Bv\beta + Cw\gamma = \frac{h}{\omega}, \\ (Au^2 + Bv^2 + Cw^2)\omega^2 - 2E(ax + b\beta + c\gamma) = k^2, \\ ux + v\beta + w\gamma = j. \end{cases}$$

On a, en outre, la relation

$$x^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1.$$

Il est aisé de combiner les équations (16) de manière à faire disparaître x, β, γ . Si l'on appelle Δ le déterminant déjà employé dans l'équation (12) et si l'on désigne par E l'expression $Aau + Bbv + Ccw$, on obtient

$$(19) \quad E \frac{d\omega}{dt} + \Delta\omega^2 = 0.$$

Supposons d'abord que E et Δ soient différents de zéro. L'intégration de cette dernière équation donne

$$\omega = \frac{\omega_0}{1 + \frac{\Delta}{E} \omega_0 t}.$$

Ce qui montre que ω tend vers zéro quand le temps augmente indéfiniment. Il faut donc que la constante h soit nulle. Les trois équations

$$\begin{aligned} Au x + Bv\beta + Cw\gamma &= 0, \\ ux + v\beta + w\gamma &= j, \\ x^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= 1 \end{aligned}$$

fournissent, pour x, β, γ , des valeurs constantes qui, d'après les équations (17), ne peuvent différer de u, v, w . La seconde

intégrale (18) montre ensuite que la valeur de ω est constante : résultat incompatible avec l'hypothèse $\Delta \geq 0$.

Nous voyons ainsi que le déterminant Δ est nécessairement nul, c'est-à-dire que l'axe de rotation doit être principal en l'un de ses points.

Si $\Delta = 0$ et $E \geq 0$, la vitesse angulaire ω est constante en vertu de l'équation (19). Les équations

$$\begin{aligned} Au x + Bv \beta + Cw \gamma &= \frac{h}{\omega}, \\ ux + v\beta + w\gamma &= j, \\ x^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= 1 \end{aligned}$$

montrent que x, β, γ sont constants. D'après les équations (17), ces cosinus se confondent avec u, v, w , c'est-à-dire que l'axe de rotation est vertical. La vitesse de rotation se tire des équations (16) qui, en remplaçant x, β, γ par u, v, w , donnent

$$(20) \quad \frac{\omega^2}{F} = \frac{bw - cv}{(C - B)vw} = \frac{cu - aw}{(A - C)wu} = \frac{av - bu}{(B - A)bw}.$$

En comparant avec les équations (15), on est conduit à l'égalité

$$\frac{\omega^2}{F} = \frac{1}{MT_0^2} \quad \text{d'où} \quad \omega^2 = \frac{g}{\rho}.$$

Cette relation pourrait s'établir *a priori* : car elle exprime que, par rapport à l'axe horizontal perpendiculaire à OG, il y a équilibre entre la pesanteur, appliquée au centre de gravité, et la force centrifuge, appliquée au centre de percussion.

Si E est nul en même temps que Δ , les équations $\Delta = 0, E = 0$, qui doivent être simultanément vérifiées par u, v, w , montrent que la rotation s'effectue autour de l'un des axes étudiés quand il s'agit de mouvements infiniment lents. Les équations (18), mises sous la forme

$$\begin{aligned} Au x + Bv \beta + Cw \gamma &= \frac{h}{\omega}, \\ ux + v\beta + w\gamma &= \frac{h^2 + 4\omega^2}{2F}, \\ ux + v\beta + w\gamma &= j. \end{aligned}$$

et considérées comme équation du premier degré entre les trois inconnues α , β , γ , ont un déterminant nul. L'élimination de ces trois inconnues conduit à la relation

$$(bw - cv) \frac{h}{\omega} + (C - B) cv \frac{h^2 - l\omega^2}{\omega^2} - (Bvc - Cbw)j = 0,$$

d'où l'on tire, pour ω , une valeur constante. On rentre ainsi dans le cas précédent. L'hypothèse E = 0 ne modifie donc pas la loi du mouvement.

En résumé :

Pour que le corps, animé d'une vitesse angulaire finie, tourne autour d'un axe immobile, il faut que cet axe soit vertical et soit en outre principal en l'un de ses points. La vitesse de rotation est constante et vérifie la relation $\omega^2 \rho = g$, dans laquelle ρ désigne la distance du point fixe au point pour lequel l'axe de rotation est principal.

Cette Étude était terminée et venait d'être communiquée à la Société mathématique quand j'ai eu connaissance d'un article inséré par M. Staude, en 1894, dans le *Journal de Crelle* et intitulé : *Sur les axes permanents de rotation, dans le mouvement d'un corps pesant autour d'un point fixe.*

L'auteur se propose de chercher dans quelles conditions le corps pesant peut présenter un axe *vertical* immobile, et ne discute pas la question de savoir si l'axe de rotation peut être incliné. Il trouve que l'axe vertical doit appartenir à un cône, appelé par lui *cône du centre de gravité*, qui ne diffère pas du cône principal défini ci-dessus. Il ne remarque pas que ledit cône est le lieu des normales abaissées d'un point fixe sur les surfaces homofocales à l'ellipsoïde central et que chaque génératrice a la propriété d'être axe principal d'inertie en l'un de ses points. Il n'examine pas le problème des mouvements infiniment lents. La plus grande partie du Mémoire est employée à préciser la forme ou la position du cône et à discuter les cas particuliers.

Dans ces conditions, il m'a semblé que mon travail ne faisait pas double emploi avec celui de M. Staude, et pouvait subsister sans modification.

SUR LES BARYCENTRES CYCLIQUES DANS LES COURBES ALGÈBRIQUES :

Par M. Maurice D'OCAGNE.

Définition. — On sait que le barycentre G des points communs à une courbe algébrique et à un cercle quelconque de centre C est indépendant du rayon de ce cercle ⁽¹⁾. La courbe algébrique fait ainsi correspondre à tout point C de son plan un point G qui, pour rappeler sa définition, sera dit le *barycentre cyclique* du point C par rapport à cette courbe algébrique ⁽²⁾.

Les barycentres cycliques pris par rapport à une courbe algébrique quelconque recouvrent, en général, l'ensemble continu des points du plan. Mais, pour une catégorie nombreuse de courbes qui, à cet égard, peuvent être dites *singulières*, ces barycentres cycliques fournissent seulement l'ensemble continu des points d'une certaine droite. C'est à l'étude de cette circonstance exceptionnelle qu'est principalement consacrée la Note qui suit.

1. Nous nous appuierons, pour déduire les coordonnées (ξ, η) du barycentre G de celles (x, y) du point C, sur le lemme algébrique suivant dû à Liouville ⁽³⁾ :

Si, mettant en évidence les groupes de termes homogènes des deux degrés les plus élevés dans les équations de deux courbes algébriques, d'ordres respectifs m et n, nous écrivons les équations de ces courbes

$$\begin{aligned} F(x, y) &= F_1(x, y) + \dots = 0, \\ f(x, y) &= f_1(x, y) + \dots = 0, \end{aligned}$$

(1) Nous avons donné (*Nouv. Ann. de Math.*, 3^e série, t. V, 1886, p. 295) une démonstration élémentaire, directe de ce théorème, qui peut être considérée comme un cas particulier de celui de Liouville sur l'invariance du barycentre des points communs à deux courbes algébriques quelconques qui varient en conservant les mêmes asymptotes, théorème à l'occasion duquel son auteur a donné le lemme algébrique utilisé ici, et dont des démonstrations plus simples ont été proposées par MM. Humbert (*Nouv. Ann.*, 3^e série, t. VI, 1887, p. 535) et Fourret (*Nouv. Ann.*, 3^e série, t. IX, 1890, p. 243).

(2) Dans le cas où la courbe algébrique se décompose en un système de droites, le *barycentre cyclique* du point C se confond avec ce que nous avons appelé ailleurs son *barycentre polaire* (*Journal de l'École Polytechnique*, 1^{re} série, 63^e cahier, 1893, p. 3).

(3) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1^{re} série, t. VI, 1891, p. 308.

nous avons les coordonnées (ξ, η) du barycentre des points communs à ces deux courbes au moyen des formules

$$\xi = \frac{1}{mn} \sum \left[\frac{F'_y(1, t) f_1(1, t)}{F(1, t) f'_y(1, t)} - \frac{F_1(1, t)}{F(1, t)} \right] = \frac{\Sigma \Phi(t)}{mn},$$

$$\eta = \frac{1}{mn} \sum \left[\frac{F'_x(u, 1) f_1(u, 1)}{F(u, 1) f'_x(u, 1)} - \frac{F_1(u, 1)}{F(u, 1)} \right] = \frac{\Sigma \Psi(u)}{mn},$$

les signes $\sum$ s'appliquant respectivement à toutes les racines de l'équation

$$f(1, t) = 0$$

et de l'équation

$$f(u, 1) = 0.$$

Dans le cas qui nous occupe, la seconde équation est celle du cercle

$$x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0.$$

On a donc ici

$$f(x, y) = x^2 + y^2, \quad f_1(x, y) = \alpha x + \beta y,$$

et, par suite,

$$t = \pm i, \quad u = \pm i.$$

Nous poserons :

$$F(1, i) = M_0 + M_1 i, \quad F'_y(1, i) = N_0 + N_1 i, \quad F_1(1, i) = P_0 + P_1 i,$$

ce qui revient, si nous écrivons

$$F(x, y) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} y + \dots + a_{m-1} x y^{m-1} + a_m y^m,$$

$$F_1(x, y) = b_0 x^{m-1} + b_1 x^{m-2} y + \dots + b_{m-2} x y^{m-2} + b_{m-1} y^{m-1},$$

à prendre, en prolongeant les formules jusqu'à épuisement des a_i et b_i ,

$$(1) \begin{cases} M_0 = a_0 - a_2 + a_4 - a_6 + \dots + (-1)^\mu a_{2\mu} + \dots, \\ M_1 = a_1 - a_3 + a_5 - a_7 + \dots + (-1)^\mu a_{2\mu+1} + \dots, \\ N_0 = a_1 - 3a_3 + 5a_5 - 7a_7 + \dots + (-1)^\mu (2\mu+1) a_{2\mu+1} + \dots, \\ N_1 = 2a_2 - 4a_4 + 6a_6 - 8a_8 + \dots + (-1)^\mu 2\mu a_{2\mu} + \dots, \\ P_0 = b_0 - b_2 + b_4 - b_6 + \dots + (-1)^\mu b_{2\mu} + \dots, \\ P_1 = b_1 - b_3 + b_5 - b_7 + \dots + (-1)^\mu b_{2\mu+1} + \dots \end{cases}$$

Un calcul facile montre alors que

$$\Phi(i) = \frac{N_0 \alpha - N_1 \beta - P_1 + i(N_1 \alpha - N_0 \beta - P_0)}{M_1 - M_0 i},$$

et, par suite, que

$$(2) \quad \begin{cases} \Phi(i) - \Phi(-i) \\ = 2 \frac{(M_1 N_0 - M_0 N_1)z - (M_0 N_0 - M_1 N_1)z^2 - (M_0 P_0 - M_1 P_1)}{M_0^2 - M_1^2} \end{cases}$$

Posant de même :

$$F(i, 1) = M'_0 + M'_1 i, \quad F_1(i, 1) = N_0 + N_1 i, \quad F_1(i, 1) = P_0 + P_1 i,$$

on trouve également que

$$(3) \quad \begin{cases} \Psi(i) - \Psi(-i) \\ = 2 \frac{(M_1 N'_0 - M'_0 N_1)z - (M'_0 N_0 - M'_1 N_1)z^2 - (M'_0 P_1 - M'_1 P'_1)}{M_0'^2 - M_1'^2} \end{cases}$$

Mais on peut déduire les coefficients M, N, P des coefficients M', N', P' . Cette recherche, comme toutes celles où intervient la substitution de i dans un polynôme, exige que l'on ait égard au caractère résiduel du degré par rapport au module 4. Les résultats peuvent se résumer ainsi :

Lorsque m est pair ($m = 2p$), on a

$$(4) \quad \begin{cases} M'_0 = (-1)^p M_0, & N'_0 = (-1)^p (N_0 + m M_1), & P'_0 = (-1)^p P_1, \\ M'_1 = (-1)^p M_1, & N'_1 = (-1)^p (N_1 + m M_0), & P'_1 = (-1)^p P_0, \end{cases}$$

et lorsque m est impair ($m = 2p + 1$),

$$(4') \quad \begin{cases} M'_0 = (-1)^p M_1, & N'_0 = (-1)^p (N_1 + m M_0), & P'_0 = (-1)^p P_0, \\ M'_1 = (-1)^p M_0, & N'_1 = (-1)^p (N_0 + m M_1), & P'_1 = (-1)^p P_1. \end{cases}$$

Calculant au moyen soit des formules (4), soit des formules (4'), selon que m est pair ou impair, les coefficients de la formule (3), on trouve, dans tous les cas,

$$\begin{aligned} M'_1 N'_0 - M'_0 N'_1 &= M_0 N_1 - M_1 N_0 + m (M_0^2 - M_1^2), \\ M'_0 N'_0 - M'_1 N'_1 &= M_0 N_0 - M_1 N_1, \\ M'_0 P'_0 - M'_1 P'_1 &= M_0 P_1 - M_1 P_0, \\ M_0'^2 - M_1'^2 &= M_0^2 - M_1^2. \end{aligned}$$

Si donc on pose

$$(5) \quad \begin{cases} M_1 N_0 - M_0 N_1 = \lambda, \\ M_0 N_0 - M_1 N_1 = \mu, \\ M_0 P_1 - M_1 P_0 = \nu, \\ M_1 P_1 - M_0 P_0 = \pi, \\ M_0^2 - M_1^2 = \omega. \end{cases}$$

les formules (2) et (3) deviennent

$$\begin{aligned}\Phi(i) + \Phi(-i) &= 2 \frac{\lambda x - x_0^2 - y}{\rho}, \\ \Psi(i) + \Psi(-i) &= 2 \frac{mx + (m\rho - \lambda)x_0^2 - m}{\rho},\end{aligned}$$

et, par suite, les formules de Liouville donnent ici

$$(6) \quad \begin{cases} \xi = \frac{\lambda x - x_0^2 - y}{m\rho}, \\ \eta = \frac{mx + (m\rho - \lambda)x_0^2 - m}{m\rho}. \end{cases}$$

Observons tout de suite que, si $\rho = 0$, le barycentre G est, quel que soit C, rejeté à l'infini. C'est qu'en effet, ρ étant le carré du module de $F(1, i)$, cette quantité s'annule si $F(x, y)$ est divisible par $x^2 + y^2$, auquel cas la courbe algébrique, comme le cercle, passe par les points cycliques du plan, ce qui fait que le point G se trouve sur la droite de l'infini. Nous supposons ici qu'il n'en est pas ainsi, autrement dit que *la courbe algébrique considérée n'admet pas les directions isotropes comme directions asymptotiques*. Cette condition sera sous-entendue dans tout ce qui suit.

2. En général, comme nous l'avons annoncé au début, les formules (6) font correspondre à tout point C un barycentre cyclique G qui varie avec lui, et réciproquement de façon qu'à l'ensemble de tous les points du plan, pris pour C, correspond aussi l'ensemble de tous les points du plan pris pour G. Mais il n'en est pas toujours ainsi. *Certaines courbes ne font correspondre comme G, à l'ensemble de tous les points du plan pris pour C, que l'ensemble des points d'une certaine droite Δ , tous les points C correspondant à un même point G de Δ étant ceux d'une droite D de direction fixe située à une distance constante de G.* C'est ce résultat que nous allons démontrer ici en nous servant des formules qui viennent d'être établies.

Les formules (6) montrent qu'un même point G (ξ, η) correspondra à tout un ensemble de points C (x, y) si l'on a

$$(7) \quad \frac{x}{\lambda} - \frac{m\rho - y}{x} = \eta.$$

parce qu'alors ces formules donnent

$$\begin{aligned} z &= \frac{\lambda x - \mu y}{m\varphi} - \gamma, \\ r_1 &= \frac{\eta(\lambda x - \mu y) - \pi}{m\varphi}, \end{aligned}$$

ce qui montre que le point G reste invariable lorsque le point C se déplace sur une droite D définie par l'équation

$$(8) \quad \lambda x - \mu y = h,$$

h étant une constante. Les coordonnées du point G peuvent, en effet, s'écrire dans ce cas

$$(9) \quad z = \frac{h - \gamma}{m\varphi}, \quad r_1 = \frac{\eta h - \pi}{m\varphi},$$

et l'on voit que ce point appartient toujours à la droite Δ dont l'équation est

$$(10) \quad \eta x - \gamma y = \frac{\pi - \eta\gamma}{m\varphi}.$$

Remarquons tout de suite que la distance δ du point G défini par les formules (9), à la droite correspondante D dont l'équation est (8), est donnée par

$$\delta = \frac{h(\lambda - \mu\eta - m\varphi) - \lambda\gamma + \mu\pi}{m\varphi\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}},$$

ou, si l'on remplace η par la seconde des valeurs définies par (7),

$$(11) \quad \delta = \frac{-\lambda\gamma + \mu\pi}{m\varphi\sqrt{\lambda^2 - \mu^2}},$$

quantité constante comme nous l'avions annoncé.

La condition (7) peut s'écrire

$$(12) \quad \lambda^2 - \mu^2 - m\varphi\lambda = 0,$$

ou, en remplaçant λ et μ par leurs valeurs tirées de (5), réduisant et supprimant le facteur φ , différent de zéro par hypothèse,

$$(12) \quad m(M_1 N_0 - M_0 N_1) + (N_0^2 - N_1^2) = 0$$

Telle est la condition pour que *tous les barycentres cycliques G viennent se condenser sur une même droite Δ*.

De même l'expression de δ , transformée au moyen des formules (5), devient

$$(13) \quad \delta = \frac{N_1 P_0 - N_0 P_1}{m \sqrt{(M_0^2 + M_1^2)(N_0^2 + N_1^2)}}.$$

Elle s'annule si

$$(14) \quad N_1 P_0 - N_0 P_1 = 0.$$

Dans ce cas, chaque barycentre G se trouve sur la droite D correspondante et, par suite, lorsque le point C est pris sur la droite Δ, il se confond avec son barycentre cyclique.

3. L'expression qui figure dans le premier membre de (12), et dont l'annulation définit les courbes *singulières* au point de vue qui nous occupe, étant représentée par Γ_m , on trouve, en se reportant aux formules (1),

$$\begin{aligned} \Gamma_2 &= a_1^2 - 4a_0a_2, \\ \Gamma_3 &= 2(a_1^2 - a_2^2 - 3a_0a_2 - 3a_1a_3), \\ \Gamma_4 &= 3a_1^2 + 4a_2^2 + 3a_3^2 - 8a_0a_2 - 16a_0a_4 - 8a_1a_3 - 10a_1a_5, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

D'une manière générale

$$\Gamma_m = \sum_{i=1}^{i=m-1} h_i a_i^2 + \sum k_{p,p} a_{2p} a_{2p} + \sum l_{p,p} a_{2p+1} a_{2p+1},$$

la première somme ne s'étendant qu'aux coefficients a_i autres que le premier a_0 et le dernier a_m , les deux autres à tous les produits deux à deux, d'une part des coefficients à indices pairs, de l'autre de ceux à indices impairs.

La condition $\Gamma_2 = 0$ montre que *la seule conique singulière est la parabole*. Dans ce cas, comme on le verra plus loin, *la droite Δ est l'axe de la parabole, les droites D sont les perpendiculaires à cet axe, et la distance constante de δ de tout barycentre G à la droite D correspondante est égale au paramètre de la parabole* (1).

(1) Nous avons démontré directement et utilisé ce résultat dans une Note spé-

Le seul examen de l'expression de Γ_m fait immédiatement apercevoir des cas très généraux de singularité. Par exemple, *quel que soit m , on a $\Gamma_m = 0$, si tous les a_i sauf a_0 sont nuls*. Cela correspond au cas où l'on a

$$F(x, y) = a_0 x^m,$$

c'est-à-dire où *toutes les directions asymptotiques de la courbe considérée sont confondues*.

Parmi les courbes qui offrent ce caractère, il y a lieu de distinguer celles dont l'équation s'écrit

$$(15) \quad y^p = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_m x^m \quad (\text{pour } p = m - 1).$$

Lorsque $p < m - 1$, on trouve, par l'application des formules (6),

$$\xi = -\frac{C_{m-1}}{mc_m}, \quad \eta = \frac{2}{3}.$$

Le point G ainsi défini n'est autre que le barycentre des points de rencontre de la courbe avec la parallèle à Ox menée par le point G, parallèle qui joue dès lors ici le rôle de droite D, et qui passe, comme on voit, par le point G correspondant.

Si, en particulier, on fait $p = 1$, on obtient ainsi (pour $m \geq 3$) toutes les *paraboles générales* définies par

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_m x^m.$$

Ainsi donc *le barycentre cyclique d'un point quelconque par rapport à une parabole générale d'ordre au moins égal à 3 se confond avec le barycentre des points de rencontre de la courbe avec la perpendiculaire à sa direction asymptotique menée par le point considéré*.

Si l'on suppose maintenant, dans l'équation (15), $p = 1$, le résultat reste le même si m est impair, mais, si m est pair, on a

$$\xi = -\frac{C_{m-1}}{mc_m}, \quad \eta = \frac{2}{3} - \frac{(m-1)^2}{mc_m}.$$

ciale (*Journal de Mathématiques spéciales*, 5^e série, t. V, 1891, p. 79) et c'est précisément ce résultat particulier qui nous a donné l'idée d'entreprendre l'étude générale contenue dans la présente Note.

c'est-à-dire que le point G, toujours situé sur la même droite Δ , ne se trouve plus sur la droite D correspondante ($y = \beta$), mais s'en trouve à une distance constante $\hat{\gamma}$ donnée par

$$\hat{\gamma} = \frac{(-1)^\mu}{mc_m}.$$

Dans le cas de $m = 2$, on a

$$\hat{\gamma} = \frac{-1}{2c_2},$$

et $\frac{1}{2c_2}$ est précisément le paramètre de la parabole, ce qui donne le résultat rappelé plus haut.

Une autre catégorie de courbes singulières est fournie par celles qui, pour m impair ($m = 2\mu + 1$), sont telles que tous les a_i soient nuls sauf a_0 et a_m . On voit, en effet que, dans ce cas aussi, $\Gamma_m = 0$.

Comme exemple de telles courbes on peut citer les *courbes de Lamé d'ordre impair*, définies par l'équation

$$Ax^{2\mu+1} + By^{2\mu+1} = 1.$$

Les formules (6) donnent ici

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{B}{A^2 + B^2} [Bx - (-1)^\mu A\beta], \\ \eta &= \frac{-(-1)^\mu A}{A^2 + B^2} [Bx - (-1)^\mu A\beta].\end{aligned}$$

On voit que le barycentre G ainsi défini reste constamment sur la droite Δ dont l'équation est

$$Ax + (-1)^\mu By = 0.$$

De plus les droites D correspondant aux divers barycentres G sont définies par

$$Bx - (-1)^\mu Ay = h.$$

Elles sont, comme on voit, perpendiculaires à la droite Δ et, ici encore, chaque droite D passe par le barycentre G correspondant.

4. Le fait que, pour les courbes singulières telles que les barycentres G se trouvent sur les droites D correspondantes, le

point C se confond avec son barycentre cyclique lorsqu'il est pris sur la droite Δ , conduit à envisager cette question :

Existe-t-il des courbes non singulières telles que tout point de leur plan se confonde avec le barycentre cyclique correspondant ?

Un point $C(x, y)$ se confond avec son barycentre cyclique si les valeurs de ξ et η , données par les formules (6) sont respectivement égales à α et β , c'est-à-dire si l'on a

$$\begin{aligned} x(m\gamma - \lambda) - \mu\beta - \gamma &= 0, \\ \mu x - \lambda\beta + \pi &= 0. \end{aligned}$$

Ces équations feront connaître, en général, un point jouissant de la propriété indiquée. Elles n'en donneraient une infinité que si l'on avait à la fois

$$\begin{aligned} (m\gamma - \lambda)\lambda - \mu^2 &= 0, \\ (m\gamma - \lambda)\pi - \mu\gamma &= 0, \\ \mu\pi - \gamma\lambda &= 0. \end{aligned}$$

On remarque d'abord que ces trois conditions se réduisent à deux, l'élimination de $m\gamma - \lambda$ entre les deux premières donnant immédiatement la troisième.

Or, la première de ces égalités est identique à (7') qui exprime que la courbe est, au point de vue qui nous occupe, singulière, c'est-à-dire que tous les barycentres cycliques sont, pour elle, distribués sur une seule droite.

La troisième de ces égalités montre, en outre, que la distance δ donnée par la formule (11) est nulle.

La question posée ci-dessus se résout donc négativement. Le résultat est celui-ci :

Il n'y a, en général, qu'un point isolé confondu avec son barycentre cyclique, sauf lorsque la courbe est singulière et que les droites D passent par les barycentres G correspondants. Dans ce cas, tout point de la droite Δ est confondu avec son barycentre cyclique.

SUR UNE EXTENSION DES FORMULES DE GAUSS:

Par M. SERVANT.

Nous nous proposons, dans ce travail, d'étendre les formules de Gauss au cas d'une variété à deux dimensions contenue dans un espace à quatre dimensions, ou, si l'on veut, de définir intrinsèquement une surface dans l'espace $n = 4$.

1. Soit $S(x,y,z,t)(uv)$ une variété quelconque connue et soit

$$ds^2 = S dx^2 = E du^2 - 2F du dv + G dv^2$$

son élément linéaire; soient $ce'c''c'''$, $c_1c'_1c''_1c'''_1$ deux directions rectangulaires entre elles et perpendiculaires aux tangentes de la variété; on aura

$$(1) \quad Sc \frac{\partial x}{\partial u} = Sc \frac{\partial x}{\partial v} = Sc c_1 = Sc_1 \frac{\partial x}{\partial u} = Sc_1 \frac{\partial x}{\partial v}, \quad Sc^2 = 1, \quad Sc_1^2 = 1.$$

Posons

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} Sc \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = -S \frac{\partial c}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial u} = D, \\ Sc \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = -S \frac{\partial c}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} - S \frac{\partial c}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} = D', \quad Sc \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = -S \frac{\partial c}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial v} = D'', \\ Sc_1 \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = D_1, \quad Sc_1 \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = D'_1, \quad Sc_1 \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = D''_1, \\ Sc_1 \frac{\partial c}{\partial u} = Sc \frac{\partial c_1}{\partial u} = \delta, \quad Sc_1 \frac{\partial c}{\partial v} = -Sc \frac{\partial c_1}{\partial v} = \delta'', \end{array} \right.$$

Nous pouvons poser, comme dans le cas de l'espace ordinaire,

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = M \frac{\partial x}{\partial u} + N \frac{\partial x}{\partial v} + P c + P_1 c_1$$

et déterminer les quatre quantités M, N, P, P_1 ; car le déterminant

$\left| \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} c c_1 \right| = \sqrt{EG - F^2}$ n'est pas nul en général; on trouve ainsi facilement les formules suivantes :

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{EG - F^2} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\sqrt{EG - F^2}}{EG - F^2} \frac{\partial x}{\partial v} + D c + D_1 c_1, \\ \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{EG - F^2} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\sqrt{EG - F^2}}{EG - F^2} \frac{\partial x}{\partial v} - D' c - D'_1 c_1, \\ \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{EG - F^2} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\sqrt{EG - F^2}}{EG - F^2} \frac{\partial x}{\partial v} + D'' c - D''_1 c_1, \end{array} \right.$$

on peut également trouver, d'une façon analogue, les formules suivantes :

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{\partial c}{\partial u} = m \frac{\partial x}{\partial u} + n \frac{\partial x}{\partial v} - \delta c_1, & \frac{\partial c_1}{\partial u} = m_1 \frac{\partial x}{\partial u} + n_1 \frac{\partial x}{\partial v} - \delta c, \\ \frac{\partial c}{\partial v} = m' \frac{\partial x}{\partial v} + n' \frac{\partial x}{\partial v} - \delta'' c_1, & \frac{\partial c_1}{\partial v} = m'_1 \frac{\partial x}{\partial u} + n'_1 \frac{\partial x}{\partial v} - \delta'' c. \end{cases}$$

où $m, n, \dots$ ont les valeurs suivantes :

$$(5) \quad \begin{cases} m = \frac{FD - GD}{H^2}, & n = \frac{FD - ED'}{H^2}, & m_1 = \frac{FD'_1 - GD_1}{H^2}, & \dots, \\ m' = \frac{FD'' - GD'}{H^2}, & n' = \frac{FD' - ED''}{H^2}, & \dots; \end{cases}$$

on a encore les relations (Darboux)

$$(6) \quad \begin{cases} m'E - (n' - m)F - nG = 0, & mn' - nm' = \frac{DD'' - D'^2}{H^2}, \\ m'_1 E - (n'_1 - m_1)F - n_1 G = 0, & m_1 n'_1 - n_1 m'_1 = \frac{D_1 D'_1 - D_1'^2}{H^2}. \end{cases}$$

Écrivons maintenant les conditions d'intégrabilité des systèmes d'équations (3) et (4). Considérons d'abord le système (3); nous verrons que l'on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} \right) &= \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \right), \\ \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} \right) &= \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \right); \end{aligned}$$

en remplaçant dans ces expressions les dérivées secondes de x par leurs valeurs déduites des formules (3) et les dérivées de c et c_1 par leurs valeurs déduites des formules (4), il viendra deux expressions de la forme

$$\begin{aligned} \alpha \frac{\partial x}{\partial v} - \beta \frac{\partial x}{\partial v} - \gamma c + \delta c_1 &= 0, \\ \alpha' \frac{\partial x}{\partial v} - \beta' \frac{\partial x}{\partial v} + \gamma' c - \delta' c_1 &= 0; \end{aligned}$$

ces équations devant être vérifiées quand on remplace x par x, z, t , les $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \alpha', \beta', \gamma', \delta'$ devront être identiquement nuls; or il

vient, en écrivant que z, β, z', β' sont nuls,

$$\frac{DD'' - D'^2 + D_1 D_1'' - D_1^2}{H^2} E = \begin{vmatrix} 12 \\ 12 \end{vmatrix}, \quad KF = \begin{vmatrix} 11, 21 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 22, 12 \\ 1 \end{vmatrix},$$

$$KG = \begin{vmatrix} 21, 21 \\ 1 \end{vmatrix},$$

où l'on a posé

$$\frac{DD'' - D'^2 + D_1 D_1'' - D_1^2}{H^2} = K;$$

or, si l'on se reporte aux formules générales des formes quadratiques linéaires (BLANCHI, *Lezioni di Geometria*, Chap. II), on voit que ces quatre équations se réduisent à une seule

$$(7) \quad K = \frac{(12, 12)}{H^2},$$

qui exprime que la quantité K est égale à la courbure totale du ds^2 de la variété.

Écrivons maintenant que $\gamma\delta, \gamma'\delta'$ sont nuls; il vient, par un calcul facile,

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{\partial D}{\partial v} - \frac{\partial D'}{\partial u} - \begin{vmatrix} 12 \\ 1 \end{vmatrix} D + \left[\begin{vmatrix} 11 \\ 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 12 \\ 2 \end{vmatrix} \right] D' + \begin{vmatrix} 11 \\ 2 \end{vmatrix} D'' + D_1 \delta - D_1 \delta'' = 0, \\ \frac{\partial D''}{\partial u} - \frac{\partial D'}{\partial v} + \begin{vmatrix} 22 \\ 1 \end{vmatrix} D + \left[\begin{vmatrix} 22 \\ 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 12 \\ 1 \end{vmatrix} \right] D' - \begin{vmatrix} 12 \\ 2 \end{vmatrix} D'' - D_1 \delta' - D_1' \delta'' = 0, \\ \frac{\partial D_1}{\partial v} - \frac{\partial D_1'}{\partial u} - \begin{vmatrix} 12 \\ 1 \end{vmatrix} D_1 + \left[\begin{vmatrix} 11 \\ 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 12 \\ 2 \end{vmatrix} \right] D_1' + \begin{vmatrix} 11 \\ 2 \end{vmatrix} D_1'' - D \delta'' - D' \delta = 0, \\ \frac{\partial D_1''}{\partial u} - \frac{\partial D_1'}{\partial v} + \begin{vmatrix} 22 \\ 1 \end{vmatrix} D_1 + \left[\begin{vmatrix} 22 \\ 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 12 \\ 1 \end{vmatrix} \right] D_1' - \begin{vmatrix} 12 \\ 2 \end{vmatrix} D_1'' - D \delta' - D' \delta'' = 0. \end{cases}$$

Cherchons maintenant les conditions d'intégrabilité des équations (4); pour cela écrivons $\frac{\partial^2 c}{\partial u \partial v}$ de deux manières; il vient

$$\begin{aligned} (m - n') \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + n \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} - m' \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \frac{\partial x}{\partial u} \left(\frac{\partial m}{\partial v} - \frac{\partial m'}{\partial u} \right) \\ + \frac{\partial x}{\partial v} \left(\frac{\partial n}{\partial v} - \frac{\partial n'}{\partial u} \right) + \delta \frac{\partial c_1}{\partial v} - \delta'' \frac{\partial c_1}{\partial u} + \left(\frac{\partial \delta}{\partial v} - \frac{\partial \delta''}{\partial u} \right) c_1 = 0; \end{aligned}$$

cette équation doit être également vérifiée quand on remplace x par y, z, t ; si donc on multiplie par $\frac{\partial x}{\partial u}$ et que l'on fasse la somme, on trouve une des équations (8), de même si l'on multiplie par $\frac{\partial x}{\partial v}$; multiplions maintenant par c , il viendra de suite

$$(9) \quad (m - n') D' + n D'' - m' D = 0;$$

multiplions maintenant par c_1 , il viendra

$$(10) \quad (m - n')D'_1 - nD'_1 - m'D_1 - \frac{\partial \gamma}{\partial v} - \frac{\partial \gamma''}{\partial u} = 0;$$

il est facile de voir que l'équation (9) est toujours identiquement vérifiée; on obtiendra une nouvelle équation de même forme que (10) en écrivant $\frac{\partial^2 c_1}{\partial u \partial v}$ sous deux formes différentes: cette équation sera

$$(11) \quad (m_1 - n'_1)D'_1 - n_1D'_1 - m'_1D_1 - \frac{\partial \gamma}{\partial v} - \frac{\partial \gamma''}{\partial u} = 0.$$

Les équations fondamentales de la théorie des surfaces dans l'espace $n = 4$ sont donc au nombre de six; ce sont celles inscrites sous les numéros (7), (8), (9) et (11); elles se réduisent à cinq, car les équations (9) et (11) sont identiques, ainsi que l'on peut le vérifier facilement; ces deux équations peuvent être remplacées par l'équation unique

$$(12) \quad H^2 \left(\frac{\partial \gamma}{\partial v} - \frac{\partial \gamma''}{\partial u} \right) - \begin{vmatrix} E & F & G \\ D & D' & D'' \\ D_1 & D'_1 & D''_1 \end{vmatrix} = 0.$$

II. *Les formules de Codazzi.* — Établissons maintenant, pour les surfaces de l'espace à quatre dimensions, des formules analogues à celle de Codazzi. La théorie des rotations et translations a été étendue à l'espace à quatre dimensions par Thomas Craig et M. Hatzidakis (*A. S. M.*, 1898, 1900); nous en déduirons facilement les formules que nous voulons obtenir.

Prenons, dans le plan tangent de la surface, deux directions rectangulaires, α_i, β_i , et dans le plan normal conservons les deux séries de cosinus directeurs c et c_1 ; on aura

$$\begin{aligned} S\alpha^2 &= S\beta^2 = Sc^2 = Sc_1^2 = 1, \\ S\alpha\beta &= S\alpha c = S\alpha c_1 = S\beta c = S\beta c_1 = Sc c_1 = 0. \end{aligned}$$

Nous poserons

$$\begin{aligned} p_{11} &= Sc_1 \frac{\partial v}{\partial u}, & p_{12} &= S\beta_1 \frac{\partial v}{\partial u}, & p_{13} &= S\alpha_1 \frac{\partial v}{\partial u}, & p_{14} &= Sc_1 \frac{\partial \gamma}{\partial u}, \\ p_{21} &= Sc_1 \frac{\partial \gamma}{\partial u}, & p_{22} &= Sc_1 \frac{\partial \gamma}{\partial u}, & p_{23} &= Sc_1 \frac{\partial v}{\partial u}, & \dots \end{aligned}$$

il vient de suite

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial x}{\partial u} = p_{12}\beta - p_{13}c + p_{14}c_1, \\ \frac{\partial \beta}{\partial u} = -p_{12}x + p_{23}c + p_{24}c_1, \\ \frac{\partial c}{\partial u} = p_{13}x - p_{23}\beta + p_{34}c_1, \\ \frac{\partial c_1}{\partial u} = -p_{14}x - p_{24}\beta - p_{34}c. \end{array} \right.$$

et quatre équations toutes semblables pour définir les dérivées par rapport à v de x, β, c, c_1 , que l'on obtient en remplaçant les p par les p' . Les quantités p et p' seront liées par les six équations fondamentales

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p_{12}}{\partial v} - \frac{\partial p'_{12}}{\partial u} - \begin{vmatrix} p_{13} & p_{23} \\ p'_{13} & p'_{23} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} p_{14} & p_{24} \\ p'_{14} & p'_{24} \end{vmatrix} = 0, \\ \frac{\partial p_{13}}{\partial v} - \frac{\partial p'_{13}}{\partial u} + \begin{vmatrix} p_{23} & p_{12} \\ p'_{23} & p'_{12} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} p_{34} & p_{14} \\ p'_{34} & p'_{14} \end{vmatrix} = 0, \\ \frac{\partial p_{14}}{\partial v} - \frac{\partial p'_{14}}{\partial u} - \begin{vmatrix} p_{12} & p_{24} \\ p'_{12} & p'_{24} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} p_{13} & p_{34} \\ p'_{13} & p'_{34} \end{vmatrix} = 0, \\ \frac{\partial p_{23}}{\partial v} - \frac{\partial p'_{23}}{\partial u} + \begin{vmatrix} p_{12} & p_{13} \\ p'_{12} & p'_{13} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} p_{24} & p_{34} \\ p'_{24} & p'_{34} \end{vmatrix} = 0, \\ \frac{\partial p_{24}}{\partial v} - \frac{\partial p'_{24}}{\partial u} + \begin{vmatrix} p_{14} & p_{12} \\ p'_{14} & p'_{12} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} p_{34} & p'_{23} \\ p'_{34} & p'_{23} \end{vmatrix} = 0, \\ \frac{\partial p_{34}}{\partial v} - \frac{\partial p'_{34}}{\partial u} + \begin{vmatrix} p_{13} & p_{14} \\ p'_{13} & p'_{14} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} p_{23} & p_{24} \\ p'_{23} & p'_{24} \end{vmatrix} = 0. \end{array} \right.$$

Si l'on désigne par ξ, τ, ζ, τ les translations, on voit de suite que les deux dernières devront étre nulles, le polyèdre à quatre dimensions devant étre tangent à la surface; les coordonnées d'un point de la surface sont données par les équations

$$\frac{\partial x}{\partial u} = x\xi + \beta\tau,$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = x\zeta + \beta\tau'.$$

et l'on a entre les translations et les rotations les relations fondamentales

$$(15) \quad \begin{cases} \frac{\partial \xi}{\partial v} - \frac{\partial \xi'}{\partial u} + p_{12} \tau_i' - p'_{12} \tau_i = 0, \\ \frac{\partial \tau_i}{\partial v} - \frac{\partial \tau_i'}{\partial u} + p_{12} \xi - p'_{12} \xi' = 0, \\ p_{13} \xi' - p'_{13} \xi - p_{23} \tau_i' + p'_{23} \tau_i = 0, \\ -p_{13} \xi' + p'_{13} \xi - p_{23} \tau_i' + p'_{23} \tau_i = 0, \end{cases}$$

que l'on déduit de suite des équations de Craig en annulant ξ et τ .

Par cette méthode, on a donc dix équations que doivent vérifier les *coordonnées intrinsèques* de la surface. Cherchons à relier ces quantités à celles, E, F, G, D, D', . . ., introduites précédemment.

On aura d'abord immédiatement

$$E = \xi^2 + \tau_i^2, \quad F = \xi \xi' + \tau_i \tau_i', \quad G = \xi'^2 + \tau_i'^2.$$

Nous aurons ensuite

$$D = -S \frac{\partial c}{\partial u} \frac{\partial r}{\partial u} = -S (p_{13} \alpha + p_{23} \beta + p_{33} c_1) \alpha \xi + \beta \tau_i,$$

$$(16) \quad \begin{cases} D = p_{23} \tau_i - p_{13} \xi \\ D' = p_{23} \tau_i' - p_{13} \xi' = p'_{23} \tau_i - p'_{13} \xi, \\ D'' = p'_{23} \tau_i' - p'_{13} \xi' \\ D_1 = p_{13} \xi - p_{23} \tau_i \\ D'_1 = p_{13} \xi' + p_{23} \tau_i' = p'_{13} \xi + p'_{23} \tau_i, \\ D''_1 = p'_{13} \xi' - p'_{23} \tau_i' \\ \quad \quad \quad \gamma = p_{33}, \quad \gamma'' = p'_{33}, \end{cases}$$

formules qui permettent de passer de l'un des systèmes de formules à l'autre. Les deux premières équations des translations peuvent servir à calculer p_{12} , p'_{12} qui ne dépendent que de l'élément linéaire; les deux dernières sont identiques en vertu des formules (6); on retrouve donc bien les six équations que nous avons obtenues précédemment.

Rappelons encore les formules suivantes :

$$(17) \left\{ \begin{array}{l} dx + \xi du + \xi' dt + (p_{12} du + p'_{12} dv) y + (p_{13} du + p'_{13} dv) z \\ \quad + (p_{14} du + p'_{14} dv) t, \\ dy + \eta du + \eta' dv + (p_{12} du + p'_{12} dv) x + (p_{23} du + p'_{23} dv) z \\ \quad + (p_{24} du + p'_{24} dv) t, \\ dz + (p_{13} du + p'_{13} dv) x + (p_{23} du + p'_{23} dv) y \\ \quad + (p_{34} du + p'_{34} dv) t, \\ dt + (p_{14} du + p'_{14} dv) x + (p_{24} du + p'_{24} dv) y \\ \quad + (p_{34} du + p'_{34} dv) z, \end{array} \right.$$

qui donnent les projections sur les axes mobiles du déplacement infinitésimal d'un point.

Les deux systèmes de formules que nous avons donnés contiennent une indétermination; en effet, dans le premier cas, les quantités c et c_1 ne sont pas entièrement déterminées et, dans le cas des formules de Codazzi, c , c_1 ainsi que α et β ne sont pas complètement déterminées.

Examinons d'abord ce que deviennent les formules de Gauss quand on change les valeurs de c et c_1 . On peut, de la façon la plus générale, prendre pour valeur des cosinus

$$C = c \cos \varphi + c_1 \sin \varphi, \quad C_1 = -c \sin \varphi + c_1 \cos \varphi;$$

il viendra de suite

$$(\omega) = SG \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = D \cos \varphi + D_1 \sin \varphi, \quad (\omega_1) = -D \sin \varphi + D_1 \cos \varphi,$$

$$\Delta = \hat{c} + \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \quad \Delta' = \hat{c}' + \frac{\partial \varphi}{\partial v};$$

on voit, en particulier, que l'on peut toujours déterminer φ de façon à annuler une des quantités suivantes (ω) , (ω_1) , ..., $\Delta \Delta''$.

Voyons maintenant ce que deviennent les formules de Codazzi; nous poserons

$$\alpha_1 = \alpha \cos \psi + \beta \sin \psi, \quad \beta_1 = -\alpha \sin \psi + \beta \cos \psi,$$

$$C = c \cos \varphi + c_1 \sin \varphi, \quad C_1 = -c \sin \varphi + c_1 \cos \varphi,$$

il vient de suite

$$P_{12} = (1 - \alpha \sin \psi + \beta \cos \psi) \left(\frac{\partial x}{\partial u} \cos \psi + \frac{\partial^2}{\partial u} \sin \psi + \alpha \sin \psi \frac{\partial \psi}{\partial u} + \beta \cos \psi \frac{\partial \psi}{\partial u} \right) \\ = p_{12} - \frac{\partial \psi}{\partial u},$$

$$P_{13} = p_{13} \cos \psi \cos \varphi - p_{14} \cos \psi \sin \varphi - p_{15} \sin \psi \cos \varphi - p_{16} \sin \psi \sin \varphi,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$P_{34} = \Delta;$$

on peut donc, en particulier, annuler deux des rotations.

III. *Lignes tracées sur les surfaces.* — Étant donnée une surface $S(x,y,z,t)$ (uv), on peut, en général, déterminer d'une seule façon A, B, C, L, M de telle sorte que x, y, z, t soient solutions de l'équation

$$(18) \quad A \frac{\partial^2 \eta}{\partial u^2} + B \frac{\partial^2 \eta}{\partial u \partial v} + C \frac{\partial^2 \eta}{\partial v^2} + L \frac{\partial \eta}{\partial u} + M \frac{\partial \eta}{\partial v} = 0.$$

$A, B, \dots$ se calculent facilement à l'aide des formules de Gauss; il vient, en effet, en remplaçant les dérivées secondes par leurs valeurs et en annulant les coefficients des termes en $\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial r}{\partial v} \text{ etc.}$

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} A \begin{vmatrix} 11 \\ 1 \end{vmatrix} + B \begin{vmatrix} 12 \\ 1 \end{vmatrix} + C \begin{vmatrix} 21 \\ 1 \end{vmatrix} + L = 0, \\ A \begin{vmatrix} 11 \\ 2 \end{vmatrix} + B \begin{vmatrix} 12 \\ 2 \end{vmatrix} + C \begin{vmatrix} 22 \\ 2 \end{vmatrix} + M = 0, \\ AD + BD' + CD'' = 0, \\ AD_1 + BD'_1 + CD''_1 = 0, \end{array} \right.$$

équations qui permettent de déterminer $A, B, C, \dots$ à un facteur près. Les caractéristiques de l'équation (1) supposées distinctes traceront sur la surface un réseau conjugué; on voit donc, contrairement à ce qui se passe dans l'espace ordinaire, qu'il y a, en général, sur une surface, un seul système conjugué.

On peut encore définir ces lignes d'une façon différente. Cherchons l'intersection du *plan* tangent avec le plan infiniment voisin; elle sera évidemment définie par les formules suivantes [en employant les formules (17)] :

$$z = 0, \quad t = 0 \quad (p_{13} du + p'_{13} dv)x - (p_{23} du + p'_{23} dv)y = 0, \\ (p_{14} du + p'_{14} dv)x - (p_{24} du + p'_{24} dv)y = 0;$$

l'équation du réseau conjugué s'obtient en éliminant x, y entre les deux dernières équations; on voit de suite l'analogie avec l'espace à trois dimensions.

Nommons, avec M. Guichard, *réseau de ligne de courbure* ou *réseau O* un réseau conjugué tel que Sx^2 soit solution de l'équation de Laplace (18) relative au réseau. Si l'on adopte cette définition, on voit qu'en général une surface n'a pas de lignes de courbure. La condition pour que l'équation (18) admette la solution Sx^2 est

$$AE + BF + CG = 0$$

ou

$$\begin{vmatrix} E & F & G \\ D & D' & D'' \\ D_1 & D'_1 & D''_1 \end{vmatrix} = 0;$$

on voit alors facilement que l'on peut toujours déterminer les normales à la surface de telle sorte que δ et δ'' soient nuls. Les normales formeront alors des congruences et le plan normal enveloppe une surface développable (voir GUICHARD, *S. M.*, 1896).

A l'aide des formules qui précèdent on peut généraliser un grand nombre de propositions de Géométrie infinitésimale, surfaces applicables, surfaces de Weingarten, etc.; quelques-unes seraient sans intérêt, mais d'autres ont des applications immédiates à la Géométrie ordinaire que nous espérons indiquer prochainement.

SUR UNE CLASSE DE TRANSFORMATIONS DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU SECOND ORDRE:

Par M. J. CLAIRIN.

1. Supposons qu'une équation aux dérivées partielles du second ordre, à deux variables indépendantes,

$$(1) \quad F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0,$$

admette deux transformations infinitésimales de contact (θ) et (θ_1) , qui engendrent un groupe (g) , et désignons par $\varphi_1(x, y, z, p, q)$, $\varphi_2(x, y, z, p, q)$, $\varphi_3(x, y, z, p, q)$ les trois invariants du premier

ordre de (g) ; les équations

$$(2) \quad x' = \varphi_1(x, y, z, p, q), \quad y' = \varphi_2(x, y, z, p, q), \quad z' = \varphi_3(x, y, z, p, q)$$

font correspondre à chaque intégrale de (1) une surface (Σ') ; je me propose de démontrer que ces surfaces (Σ') sont les intégrales d'une équation du second ordre linéaire par rapport aux dérivées secondes.

On a déjà considéré le cas où (h) et (h_1) sont permutables ⁽¹⁾; je rappelle que l'on peut faire très simplement la démonstration en remarquant qu'il suffit d'effectuer une transformation de contact pour remplacer l'équation (1) par une équation qui admet les transformations infinitésimales dont les fonctions caractéristiques sont 1 et x , c'est-à-dire par une équation dont le premier membre ne contient ni z ni p ,

$$(3) \quad \Phi(x, y, q, r, s, t) = 0,$$

tandis que les invariants de (g) deviennent x, y, q . Il est aisé de voir que q satisfait à une équation de la forme annoncée. A une intégrale de cette dernière équation correspondent ∞^2 intégrales de (3). Pour les déterminer il faut intégrer une équation différentielle ordinaire du second ordre; si l'on en connaît une, on en déduit toutes les autres en appliquant les transformations de (g) . Il y a exception si l'équation (3) admet le groupe d'ordre infini

$$x_1 = x, \quad y_1 = y, \quad z_1 = z + X,$$

X désignant une fonction quelconque de x ; la transformation précédente remplace alors l'équation proposée par une équation du premier ordre.

Examinons maintenant le cas où (h) et (h_1) ne sont pas permutables et supposons, ce qui ne restreint pas la généralité, que (h_1) laisse (h) invariante; une transformation de contact permet de donner à leurs fonctions caractéristiques les valeurs 1 et z : le

(1) BÄCKLUND, *Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung* (Mathematische Annalen, t. XV, 1879, p. 54). — GOURSAT, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre*, t. II, p. 242 et suiv.

premier membre de la transformée de l'équation (1),

$$(4) \quad \Psi(x, y, p, q, r, s, t) = 0,$$

ne contient pas z et est homogène par rapport à p, q, r, s, t , les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ se réduisent à $x, y, \frac{p}{q}$. Nous allons montrer que, si l'on prend $\frac{p}{q}$ pour nouvelle fonction inconnue, cette fonction vérifie une équation du second ordre. On a

$$(5) \quad z' = \frac{p}{q}, \quad p' = \frac{qr - ps}{q^2}, \quad q' = \frac{qs - pt}{q^2};$$

si l'on pose

$$p_{i,k} = \frac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i \partial y^k},$$

il vient encore

$$\begin{aligned} r' &= \frac{(qp_{3,0} - pp_{2,1})q - 2s(qr - ps)}{q^3}, \\ s' &= \frac{(qp_{2,1} - pp_{1,2})q - (rt + s^2)q + 2pst}{q^3}, \\ t' &= \frac{(qp_{1,2} - pp_{0,3})q - 2t(qs - pt)}{q^3}. \end{aligned}$$

En éliminant $p_{3,0}, p_{2,1}, p_{1,2}, p_{0,3}$ entre les équations de ce dernier système et les équations

$$\frac{d\Psi}{dx} = 0, \quad \frac{d\Psi}{dy} = 0,$$

on trouve

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \Psi}{\partial r} & \frac{\partial \Psi}{\partial s} & \frac{\partial \Psi}{\partial t} & 0 & \frac{\partial \Psi}{\partial x} + r \frac{\partial \Psi}{\partial p} + s \frac{\partial \Psi}{\partial q} \\ 0 & \frac{\partial \Psi}{\partial r} & \frac{\partial \Psi}{\partial s} & \frac{\partial \Psi}{\partial t} & \frac{\partial \Psi}{\partial y} + s \frac{\partial \Psi}{\partial p} + t \frac{\partial \Psi}{\partial q} \\ -q^2 & pq & 0 & 0 & r'q^3 + 2s(qr - ps) \\ 0 & -q^2 & pq & 0 & s'q^3 + (rt + s^2)q - 2pst \\ 0 & 0 & -q^2 & pq & t'q^3 + 2t(qs - pt) \end{vmatrix} = 0.$$

L'équation qui vient d'être écrite et les équations (4) et (5) sont homogènes par rapport à p, q, r, s, t ; il est possible d'éliminer ces quantités et il reste pour définir z' une équation du second ordre qui contient linéairement r', s', t' .

Si l'équation (4) est de la forme

$$\Psi_0(x, y, \frac{p}{q}, \frac{q^2 r - p^2 s}{q^2}, \frac{qs - p^2 t}{q^2}) = 0,$$

c'est-à-dire si elle admet le groupe d'ordre infini

$$x_1 = x, \quad y_1 = y, \quad z_1 = Z,$$

Z étant une fonction arbitraire de z , $\frac{p}{q}$ satisfait à une équation du premier ordre. C'est du reste le seul cas où les éliminations que nous avons indiquées soient impossibles.

Écartons ce cas particulier et montrons qu'en général à une intégrale de l'équation transformée correspondent ∞^2 intégrales de l'équation primitive qu'on peut déterminer par l'intégration d'équations différentielles ordinaires. z' , p' , q' ayant été remplacées par leurs expressions en fonction de x , y , supposons que les équations (4) et (5) soient résolues par rapport à $\frac{p}{q}$, $\frac{r}{q}$, $\frac{s}{q}$, $\frac{t}{q}$; on a, en particulier,

$$\frac{p}{q} = \alpha(x, y), \quad \frac{s}{q} = \beta(x, y), \quad \frac{t}{q} = \gamma(x, y);$$

on obtient la valeur de q en intégrant

$$\frac{dq}{q} = \beta(x, y) dx + \gamma(x, y) dy;$$

q étant connue, on a p , et z est donnée par l'équation

$$dz = p dx + q dy.$$

Étant donnée une intégrale de l'équation transformée, on obtient toutes les intégrales de l'équation proposée qui lui correspondent, dès que l'on en connaît une, en appliquant à cette intégrale les transformations du groupe (g) .

2. Dans ce qui suit nous supposons simplement que les transformations (h) et (h_1) engendrent un groupe (g') ; pour abrégér, nous désignerons par (e) l'équation de Monge-Ampère obtenue comme il vient d'être expliqué. Je vais montrer qu'à toute trans-

formation infinitésimale (λ) du groupe de (1) distincte de (h) et (h_1) et qui laisse (g) invariant correspond une transformation ponctuelle infinitésimale qui ne change pas (c) ⁽¹⁾. Appelons x_1, y_1, z_1, p_1, q_1 les coordonnées de l'élément transformé de (x, y, z, p, q) par une transformation (Λ) du groupe engendré par (λ) ; à une surface (Σ') définie par les équations (2) correspond la surface (Σ'') représentée par les équations

$$(6) \quad \begin{cases} x'' = \varphi_1(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1), \\ y'' = \varphi_2(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1), \\ z'' = \varphi_3(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1). \end{cases}$$

Naturellement les surfaces (Σ'') satisfont également à l'équation (c) ; d'autre part, si l'on remplace x_1, y_1, z_1, p_1, q_1 par leurs expressions en fonction de x, y, z, p, q , on peut éliminer ces dernières quantités entre les équations (2) et (6) , parce que (Λ) laisse (g) invariant et l'on trouve

$$x'' = \psi_1(x', y', z'), \quad y'' = \psi_2(x', y', z'), \quad z'' = \psi_3(x', y', z');$$

les surfaces (Σ'') et (Σ') se correspondent donc par une transformation ponctuelle. Lorsque le paramètre qui figure dans les équations qui définissent (Λ) varie, cette transformation ponctuelle engendre un groupe à un paramètre qui laisse (c) invariante.

S'il existe plusieurs groupes à deux paramètres qui ne changent pas l'équation (1) , la théorie précédente permet de déduire de cette équation plusieurs équations de Monge-Ampère : je vais montrer que deux équations de Monge-Ampère obtenues en considérant deux groupes (g) , (h) qui ont une transformation infinitésimale commune se correspondent par une transformation de Bäcklund de troisième espèce.

Supposons que la transformation infinitésimale commune ait pour fonction caractéristique 1; l'équation donnée ne dépend pas de z . Appelons x', y', z', p', q' les coordonnées d'un élément du

⁽¹⁾ J'ai démontré dans ma Thèse (1^{re} Partie, n° 7) que certaines transformations (B_2) jouissent d'une propriété analogue, mais je dois rectifier la proposition énoncée ensuite. L'une des transformations infinitésimales du groupe (γ) (toutes les lettres ont la même signification ici que dans le paragraphe indiqué) est la transformation (b) à laquelle ne correspond aucune transformation infinitésimale qui laisse (z) invariante. Si (γ) est un groupe à h paramètres, l'équation (z) admet un groupe à $h - 1$ paramètres.

premier ordre d'une intégrale de l'équation de Monge-Ampère qui correspond au groupe (g') et soient x'', y'', z'', p'', q'' les quantités analogues relatives à une intégrale de l'équation qui correspond à (h) , $x', y', z', p', q', x'', y'', z'', p'', q'$ s'expriment en fonction de x, y, p, q, r, s, t . En éliminant x, y, p, q, r, s, t entre les équations ainsi obtenues et l'équation proposée, il vient quatre relations entre les coordonnées de deux éléments correspondants (x', y', z', p', q') , $(x'', y'', z'', p'', q'')$; il est d'ailleurs évident qu'à une intégrale de l'une des deux équations de Monge-Ampère correspondent ∞^1 intégrales de l'autre.

3. J'indiquerai encore brièvement quelques propriétés très simples de la transformation définie par les équations (2).

Étant donnée une intégrale quelconque de (1), ces équations lui font correspondre une intégrale de (e) , et nous avons vu comment de toute intégrale de (e) on pouvait déduire ∞^2 intégrales de (1) par l'intégration d'équations différentielles ordinaires; par conséquent, si l'une des deux équations est intégrable par la méthode de M. Darboux, la seconde l'est également.

A une caractéristique d'ordre n de (1) correspond une caractéristique d'ordre $n - 1$ de (e) , tandis qu'à une caractéristique d'ordre n de (e) correspondent ∞^2 caractéristiques d'ordre $n + 1$ de (1).

Si l'on sait résoudre le problème de Cauchy pour l'une des deux équations, on sait résoudre ce problème pour l'équation transformée.

Lorsque l'équation proposée possède un système de caractéristiques du premier ordre, la transformation (2) équivaut au produit de deux transformations de Bäcklund. Étant donnée, par exemple, une équation linéaire

$$s + ap + bq = 0,$$

on trouve la même équation en prenant $\frac{p}{q}$ pour nouvelle inconnue, comme nous avons expliqué, et en effectuant successivement une transformation de M. Lucien Lévy et une transformation de Moutard (1).

(1) Voir les *Leçons* de M. GOURSAT, t. II, p. 258

**SUR LA DÉFORMATION DES SURFACES
ET SUR CERTAINES TRANSFORMATIONS DES ÉQUATIONS
AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU SECOND ORDRE;**

Par M. L. RAFFY.

J'ai montré (1) que l'on peut aborder le problème de la déformation des surfaces en partant des équations bien connues

$$(1) \quad \begin{cases} x''_{uu} - A x'_u - A_1 x'_v = \Delta H a, \\ x''_{uv} - B x'_u - B_1 x'_v = \Delta' H a, \\ x''_{vv} - C x'_u - C_1 x'_v = \Delta'' H a, \end{cases}$$

$$(2) \quad a = \sqrt{1 - \frac{G x''_{uu}{}^2 - 2 F x'_u x'_v - E x''_{vv}{}^2}{H^2}},$$

$$(3) \quad \Delta \Delta'' - \Delta'^2 = -k^2 = \frac{1}{R_1 R_2},$$

où R_1 et R_2 sont les rayons de courbure principaux. Les conditions d'intégrabilité du système (1) fournissent les équations

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{\partial \Delta'}{\partial u} - \frac{\partial \Delta}{\partial v} = C \Delta - 2 B_1 \Delta' + A_1 \Delta'', \\ \frac{\partial \Delta'}{\partial v} - \frac{\partial \Delta''}{\partial u} = C \Delta - 2 B \Delta' + A \Delta'', \end{cases}$$

qui sont, avec la relation (3), les *formules fondamentales* de la théorie des surfaces.

Si l'on introduit la courbure moyenne h , on aura

$$(5) \quad 2 H h = G \Delta - 2 F \Delta' + E \Delta''.$$

Pour satisfaire aux relations (3) et (5), j'ai posé (*loc. cit.*)

$$(6) \quad \begin{cases} \Delta = \frac{2 H h - 2 k (E t + F)}{E t^2 + 2 F t + G}, \\ \Delta' = \frac{-2 H h t + k (E t^2 - G)}{E t^2 + 2 F t + G}, \\ \Delta'' = \frac{2 H h t^2 + 2 k (F t - G)}{E t^2 + 2 F t + G}. \end{cases}$$

(1) Sur les formules fondamentales de la théorie des surfaces (Bull. Soc. Math., t. XXV, 1897). — Voir aussi une Note Sur le problème général de la

Substituant ces valeurs de Δ , Δ' , Δ'' dans les conditions (4), on a entre h et la fonction auxiliaire t deux équations aux dérivées partielles du premier ordre qui sont telles qu'en éliminant h'_u on élimine en même temps h'_v . On obtient ainsi h en fonction *explicite* de t , t'_u , t'_v par une équation du premier degré.

La substitution de h dans l'une des équations dont il s'agit conduit à une équation aux dérivées partielles du second ordre pour t ; cette équation est *linéaire* par rapport aux dérivées secondes. Cette *équation en t* peut être considérée comme étant l'équation du problème; car, t étant connu, h , Δ , Δ' , Δ'' le sont aussi et les équations (1) prennent la forme

$$(7) \quad F_i(u, v, x'_u, x'_v, x''_{uv}, x''_{uu}, x''_{vv}) = f_i(u, v, t, t'_u, t'_v) \quad (i = 1, 2, 3)$$

et constituent un système complètement intégrable, déterminant la fonction x .

D'autre part, il est bien connu qu'en éliminant α , Δ , Δ' , Δ'' entre les équations (1), (2) et (3), on obtient l'équation de déformation

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} & (x''_{uu} - Ax'_u - A_1x'_v)(x''_{vv} - Gx_v - G_1x'_v) - (x''_{uv} - Bx'_u - B_1x'_v)^2 \\ & = -k^2 H^2 \left(1 - \frac{Gx'^2_u - 2Fx'_ux'_v - Ex'^2_v}{H^2} \right). \end{aligned} \right.$$

On peut donc passer de cette équation en x à l'équation en t par la transformation que définissent les trois équations (7). D'après ce qui précède, on peut *algébriquement* éliminer à la fois t , t'_u et t'_v entre ces trois équations, ce qui donne l'équation en x (cela tient à ce que t'_u et t'_v n'y figurent que par l'intermédiaire de h ; il suit aussi de là que l'on peut exprimer t et h en fonction des dérivées premières et secondes de x). Au contraire, pour éliminer x , il faut différentier le système (7), et l'on obtient une *seule* équation pour la fonction t , équation qui est du second ordre. Je crois devoir signaler les transformations telles que (7), qui me paraissent mériter une étude approfondie.

J'ajoute que l'on pourrait aussi laisser subsister la fonction h dans les seconds membres des équations (7), qui prendraient alors

la forme $\varphi_i(u, v, h, t)$. En écrivant les conditions d'intégrabilité de l'expression différentielle

$$x''_{uu} du^2 + 2x''_{uv} du dv + x''_{vv} dv^2,$$

on retrouverait les deux équations que nous avons obtenues précédemment en substituant les valeurs de Δ , Δ' , Δ'' dans les conditions (4). Entre ces deux équations, qui sont, comme nous l'avons dit, de la forme

$$(4)' \quad f(u, v, h, h'_u, h'_v, t, t'_u, t'_v) = 0, \quad \varphi(u, v, h, h'_u, h'_v, t, t'_u, t'_v) = 0,$$

nous avons éliminé h . On peut aussi éliminer t . Résolvant par rapport à t'_u , t'_v et identifiant les valeurs de t''_{uv} , on obtient une équation qui détermine t en fonction de u , v de h et de ses dérivées des deux premiers ordres. (Cette équation ne se réduit à une identité que pour les surfaces qui ont même élément linéaire et même courbure moyenne h , c'est-à-dire qui présentent une série continue de déformations conservant leurs courbures principales.) Expriment que la fonction t ainsi définie satisfait aux deux équations (4)', on obtient pour la fonction h deux équations aux dérivées partielles du troisième ordre, qui sont équivalentes à l'équation du second ordre en t , et par suite aussi à l'équation (8).

SUR LES ÉQUATIONS GÉNÉRALES DE L'ÉLASTICITÉ;

Par M. COMBEBIAC.

Les composantes de l'effort qui s'exerce sur l'élément superficiel, en un point appartenant à un milieu élastique, s'expriment par une substitution linéaire homogène en fonction des cosinus directeurs de la normale à l'élément.

Les neuf coefficients, qui devraient ainsi intervenir, ont leur nombre réduit à six, en vertu de la condition que les pressions exercées sur la surface d'une portion infinitésimale de matière doivent donner lieu à une résultante unique pour faire équilibre aux forces d'inertie et aux forces extérieures, lesquelles, supposées appliquées à chaque masse élémentaire, se réduisent en effet à une résultante unique, à des infiniment petits près, d'ordre supérieur à celui du volume de la portion de matière considérée.

Or cette dernière hypothèse est en défaut tout au moins pour une substance aimantée placée dans un champ magnétique. Dans ce cas, une particule, si petite soit-elle, est toujours soumise à un couple.

En désignant par I l'intensité d'aimantation au point considéré, par F la force magnétique en ce point, par θ l'angle formé par les deux directions de la force et de l'aimantation, une particule de volume $d\pi$ est soumise à un couple du même ordre que $d\pi$, dont le moment a pour expression

$$FI \sin \theta d\pi$$

et dont l'axe représentatif a une direction rectangulaire avec celles de la force et de l'aimantation.

On n'aperçoit aucun motif pour exclure *a priori* ce cas de la théorie de l'élasticité.

Pour établir les équations de l'équilibre ou du mouvement du milieu, opérons la décomposition d'Helmholtz sur la substitution linéaire homogène qui donne les expressions des composantes T_x , T_y , T_z de la tension en fonction des cosinus directeurs α , β , γ de la normale à l'élément superficiel, de manière que cette substitution prenne la forme suivante :

$$(1) \quad \begin{cases} T_x = N_1 \alpha - T_3 \beta - T_2 \gamma + M \gamma - N \beta, \\ T_y = T_3 \alpha - N_2 \beta + T_1 \gamma + N \alpha - L \gamma, \\ T_z = T_2 \alpha + T_1 \beta + N_3 \gamma + L \beta - M \alpha. \end{cases}$$

Les équations relatives à une translation virtuelle sont

$$(2) \quad \begin{cases} \rho (X - J_x) = \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T_3}{\partial y} + \frac{\partial T_2}{\partial z} + \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y}, \\ \rho (Y - J_y) = \frac{\partial T_3}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} + \frac{\partial T_1}{\partial z} + \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial z}, \\ \rho (Z - J_z) = \frac{\partial T_2}{\partial x} + \frac{\partial T_1}{\partial y} + \frac{\partial N_3}{\partial y} + \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x}, \end{cases}$$

où ρ représente la densité au point considéré, J_x , J_y , J_z les projections de l'accélération sur les axes de coordonnées, N , Y , Z celles de la force extérieure rapportée à l'unité de masse.

Quant aux équations relatives à une rotation virtuelle autour de l'origine, elles expriment, toutes réductions faites, en suivant

pas à pas le calcul classique, mais en tenant compte de l'existence d'un couple, que les composantes de l'axe représentatif de ce couple sont respectivement égales à

$$2L, \quad 2M, \quad 2N.$$

Il en résulte que, dans les équations (2), les quantités L, M, N représentent le demi-couple extérieur et doivent être considérées comme des fonctions données des coordonnées x, y, z .

On voit que ces équations (2) ne diffèrent des équations générales de l'élasticité écrites sous la forme habituelle que par la présence des termes dépendant de L, M, N .

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 5 FÉVRIER 1902.

PRÉSIDENTE DE M. RAFFY.

Communications :

M. Buhl : *Sur la surface polaire d'une courbe gauche.*

M. Clairin : *Sur les équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre.*

M. Servant : *Sur des formules analogues à celles de Gauss et applicables aux variétés à deux dimensions dans l'espace à quatre dimensions.*

M. L. Lévy : *Sur la surface polaire d'une courbe gauche.*

M. Buhl présente quelques observations à ce sujet.

SÉANCE DU 19 FÉVRIER 1902.

PRÉSIDENTE DE M. RAFFY.

Communications :

M. Clairin : *Sur les transformations de M. Bäcklund.*

M. Bricard : *Sur l'arc de la lemniscate.*

M. Raffy : *Sur les surfaces W qui sont en même temps surfaces de Joachimsthal.*

SÉANCE DU 3 MARS 1902.

PRÉSIDENCE DE M. RAFFY.

Communication :

M. d'Ocagne : *Sur les barycentres cycliques dans les courbes algébriques.*

SÉANCE DU 19 MARS 1902.

PRÉSIDENCE DE M. RAFFY.

Communications :

M. de Donder : *Sur les invariants intégraux.*

M. Clairin : *Sur une classe de transformations des équations aux dérivées partielles du second ordre.*

M. Hadamard présente une remarque *Sur une condition que l'on peut imposer à une surface.* Cette condition, rencontrée par M. Zaremba ⁽¹⁾, est que, A, B, C désignant trois points quelconques de la surface; n_A, n_B, n_C , les normales en ces points, on ait

$$\frac{\cos (BC, n_B)}{\cos (CB, n_C)} \frac{\cos (CA, n_C)}{\cos (AC, n_A)} \frac{\cos (AB, n_A)}{\cos (BA, n_B)} = 1.$$

Elle est vérifiée, comme le remarque M. Zaremba, pour les surfaces du second degré. Mais ce cas est le seul où elle soit remplie. Si, en effet, on y regarde A et B comme fixes, elle équivaut, pour la surface en question (considérée comme lieu du point C) à une équation aux dérivées partielles linéaire, ayant pour caractéristiques des coniques dont le plan passe par AB. Toutes les sections planes de la surface devraient donc être des coniques, ce qui ne peut évidemment être que si cette surface est une quadrique.

⁽¹⁾ *Détermination du cas où les fonctions fondamentales de M. Poincaré sont deductibles de celles de M. Stekloff* (Bulletin de l'Acad. des Sc. de Cracovie, janvier 1902, p. 37).

SÉANCE DU 9 AVRIL 1902.

PRÉSIDENCE DE M. RAFFY.

Correspondance. — M. d'Ocagne adresse une *Notice sur Eugène Vicaire*.

Communications :

M. Servant : *Applications à l'espace ordinaire de formules indiquées par l'auteur dans sa Communication du 5 février.*

M. Raffy : *Sur certains systèmes d'équations simultanées aux dérivées partielles.*

SÉANCE DU 23 AVRIL 1902.

PRÉSIDENCE DE M. RAFFY.

Élections :

MM. René Mesny, présenté par MM. Tissot et Kœnigs,
Lucas-Girardville, présenté par MM. Carvallo et Bricard,
Petrovitch, présenté par MM. Appell et Leau,
Zoukis, présenté par MM. Darboux et Picard,
sont élus membres de la Société à l'unanimité des membres présents.

Communications :

M. Combebiac : *Sur les équations de l'élasticité.*

M. Lecornu : *Sur les petits mouvements d'un corps pesant.*

M. Hadamard : *Observations sur la Communication précédente.*

M. Raffy : *Sur la déformation des surfaces et sur certaines transformations des équations aux dérivées partielles du second ordre.*

MM. Hadamard, Servant et Clairin : *Observations sur la Communication précédente.*

MÉMOIRES.

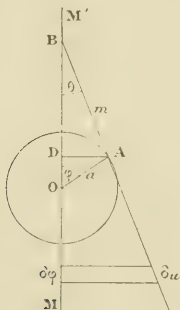
SUR LE CALCUL GRAPHIQUE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES ET DE QUELQUES FONCTIONS ULTRA-ELLIPTIQUES;

Par M. N. DELAUNAY.

Dans la présente Note je propose des constructions graphiques, fort simples, pour le calcul des fonctions elliptiques et de certaines fonctions ultra-elliptiques avec une approximation telle qu'on peut l'exiger d'un procédé graphique et qui, néanmoins, est suffisante pour la plupart des problèmes techniques résolubles par ces fonctions.

1. Soit AB (*fig. 1*) une bielle dont le point A glisse sur un

Fig. 1.



cercle décrit avec un rayon (manivelle) OA, tandis qu'un autre point B de la bielle glisse sur la droite OB menée par le centre O. Posons

$$AB = m; \quad OA = a; \quad \frac{a}{m} = k; \quad AOB = \varphi; \quad ABO = \theta.$$

On aperçoit facilement qu'entre les angles φ et θ existe une relation

$$\sin \theta = k \sin \varphi.$$

Lorsqu'on conçoit φ comme l'amplitude d'un argument u , on a

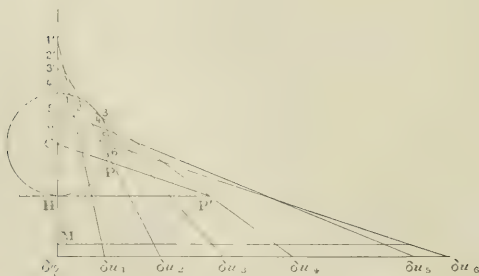
$$\cos \theta = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} = \Delta \varphi = \operatorname{dn} u,$$

$$(1) \quad u = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta \varphi} = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\cos \theta},$$

$$(2) \quad du = \frac{d\varphi}{\cos \theta}.$$

Cette relation (2) nous montre que si l'on prend sur la droite MM' l'accroissement $\delta\varphi$ de l'amplitude φ et que si on la projette sur la bielle à l'aide des perpendiculaires à la droite MM' , on obtient l'accroissement δu de l'argument u . L'accroissement $\delta\varphi$ est la projection orthogonale de l'accroissement δu . En répétant cette construction pour plusieurs valeurs consécutives de φ entre les limites 0 et φ (c'est-à-dire pour les positions de la bielle correspondant à ces valeurs consécutives de φ), on obtient des valeurs consécutives $\delta u_1, \delta u_2, \dots$. En construisant la somme $\sum \delta u$, on obtient l'intégrale elliptique $\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta \varphi}$. Nous nous occuperons

Fig. 2.



plus bas (au n° 2) du degré d'approximation présenté par cette

qu'à $u = K$ qui correspond à $\varphi = \frac{\pi}{2}$. A partir de cette valeur de u on prend les δu en ordre inverse, et ainsi de suite. On obtient ainsi des points de division sur chaque axe, et, en traçant par ces points des parallèles aux axes, on obtient un réseau.

La ligne brisée formée par les diagonales successives des quadrilatères élémentaires du réseau, en partant de l'origine, représente l'intégrale $\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$, puisque les abscisses de cette ligne brisée sont les valeurs de l'argument u , tandis que les ordonnées sont les amplitudes φ approximativement.

En posant $a = 1$, on a sur la figure 1

$$AD = \sin \varphi = \sin am u = sn u,$$

$$OD = \cos \varphi = \cos am u = cn u,$$

$$BD = m \Delta \varphi = m \Delta am u = m dn u.$$

On trouve aisément ces valeurs sur la figure 2. En menant par les points de division de l'axe u les ordonnées égales aux valeurs correspondantes de $sn u$, $cn u$, $m dn u$, on obtient les courbes $y = sn u$, $y = cn u$, $y = m dn u$.

L'aspect de la courbe $y = cn u$ donne lieu à une remarque intéressante : on aperçoit sur la *cosinussoïde* elliptique $y = cn u$ plus de points d'inflexion que n'en présente la sinussoïde ordinaire. L'analyse confirme ce fait. En effet, en égalant à zéro la dérivée seconde de $cn u$, on a

$$(3) \quad \frac{d^2(cn u)}{du^2} = \frac{d(-dn u sn u)}{du} = cn u (k^2 sn^2 u - dn^2 u) = 0.$$

Or on a $k = \frac{1}{m}$, parce qu'on a posé $a = 1$; donc les solutions de l'équation (3) sont

$$cn u = 0 : \quad sn u = \pm m dn u.$$

La première de ces solutions définit des points d'inflexion sur l'axe des u ; les deux autres solutions définissent encore des points d'inflexion correspondant aux abscisses des points d'intersection de la courbe $y = m dn u$ avec les courbes $y = sn u$ et $y = -sn u$.

2. Passons maintenant à l'étude de l'approximation présentée par notre méthode graphique. On peut recourir pour cette étude à la formule célèbre d'Euler

$$(4) \quad \int_a^b f(\varphi) d\varphi = h \left[\frac{f(a)}{2} + f(\varphi_1) + f(\varphi_2) + \dots + \frac{f(b)}{2} \right] \\ - \frac{h^2 \varepsilon}{12} [f'(b) - f'(a)], \quad 1 > \varepsilon > 0,$$

dans laquelle h est l'accroissement de la variable, et $\varphi_p = \varphi_{p-1} + h$, où p est un nombre entier.

Dans notre construction de l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$, on a

$$(5) \quad \begin{cases} f(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}; & f'(\varphi) = \frac{k^2 \sin \varphi \cos \varphi}{(1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}; \\ h = \frac{\pi}{2n}; & a = 0; & b = \frac{p\pi}{2n} \end{cases}$$

et la formule (4) d'Euler devient

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{\pi}{2n} \left[\frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{2n} \right)}} + \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \left(\frac{2\pi}{2n} \right)}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \left(\frac{p\pi}{2n} \right)}} \right] \\ - \frac{\pi}{4n} \left[\frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \left(\frac{p\pi}{2n} \right)}} - 1 \right] - \frac{\pi^2 \varepsilon k^2 \sin \left(\frac{p\pi}{2n} \right) \cos \left(\frac{p\pi}{2n} \right)}{4n^2 \varepsilon^2 \left[1 - k^2 \sin^2 \left(\frac{p\pi}{2n} \right) \right]^{3/2}}.$$

Notre construction graphique nous donne la somme

$$(7) \quad \frac{\pi}{2n} \left[\frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{2n} \right)}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \left(\frac{p\pi}{2n} \right)}} \right].$$

La formule (6) nous enseigne qu'il y faut encore ajouter deux termes $(-\xi_1)$ et $(-\xi_2)$ tels que

$$(8) \quad \xi_1 = \frac{\pi}{4n} \left[\frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \left(\frac{p\pi}{2n} \right)}} - 1 \right]$$

et

$$(9) \quad \xi_2 = \frac{\pi^2 z k^2 \sin\left(\frac{p\pi}{2n}\right) \cos\left(\frac{p\pi}{2n}\right)}{4n^2 (1 - k^2 \sin^2\left(\frac{p\pi}{2n}\right))^{\frac{3}{2}}}.$$

Commençons par le calcul du terme ξ_2 . La valeur maximale de ξ_2 ne peut pas surpasser la valeur maximale de la fonction

$$(10) \quad \frac{\pi^2 z k^2 \sin \varphi \cos \varphi}{4n^2 (1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}$$

parce que $\frac{p\pi}{2n}$ est une valeur particulière de φ . On voit que la dérivée première de (10) se réduit à zéro lorsqu'on a

$$\begin{aligned} \sin \varphi \cos \varphi &= \frac{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \sqrt{\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi}}{k \sqrt{\frac{1}{3}}}, \\ \sin^2 \varphi &= 1 - \frac{1}{k^2} + \frac{\sqrt{k^4 - k^2 + 1}}{k^2}, \\ \cos^2 \varphi &= \frac{1}{k^2} + \frac{\sqrt{k^4 - k^2 + 1}}{k^2}, \end{aligned}$$

$$(11) \quad \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} = \sqrt{1 - k^2} = \sqrt{k^4 - k^2 + 1}.$$

On voit aussi que la valeur maximale de (10) est

$$(12) \quad \frac{\pi^2 z}{4n^2 (1 - \sqrt{1 - k^2} \sqrt{1 - k^2 + k^2 - 1})} > \max \xi_2.$$

Il faut prendre ici le signe (+) devant le radical $\sqrt{k^4 - k^2 + 1}$ du numérateur, parce qu'autrement la valeur (12) serait imaginaire. Il faut, au contraire, prendre ce radical avec le signe (—) au dénominateur, parce qu'autrement l'équation (11) donnerait à $\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}$ une valeur plus grande que l'unité, ce qui est impossible.

La quantité (12) croît avec k et devient très grande pour les valeurs de k voisines de 1. Il faut donc abaisser préalablement le module k à l'aide de la transformation de Landen si k est voisin de 1. Mais la quantité (12) décroît très rapidement avec k ; ainsi,

pour $k = 0,96$ et $n = 12$, la valeur maximale de ξ_2 ne surpasse pas $0,003839$. On peut donc négliger le terme ξ_2 pour $k < 0,9$ si l'on convient d'envisager comme négligeables les erreurs qui ne surpassent pas $\frac{1}{250}$.

Le terme ξ_1 devient maximum pour $p = n$. Mais ce maximum même ne surpasse pas $0,0032$ pour $k = 0,3$, $n = 12$ et devient encore plus petit pour $k < 0,3$. Le terme ξ_1 est donc aussi négligeable pour $k < 0,3$.

Mais pour $k > 0,3$, le terme ξ_1 peut prendre des valeurs qu'on ne pourrait négliger. Dans ce cas, on peut facilement corriger la construction donnée au n° 1. En effet, la formule (8) peut être présentée sous la forme

$$(13) \quad \xi_1 = \frac{\pi}{4n} [\sec \theta - 1],$$

où θ est l'angle ABO (fig. 1) correspondant à $\varphi = \frac{p\pi}{2n}$. Il suffit donc de diminuer les $\delta u_1, \delta u_2, \dots$ obtenus par notre construction, par la soustraction des longueurs $\frac{\pi}{4n} [\sec \theta - 1]$ qu'on construit aisément. Ainsi, par exemple, pour corriger δu_6 on mène par le centre C une parallèle à la bielle correspondante jusqu'à la rencontre avec la tangente au cercle menée par le point H (fig. 2); on porte la longueur $pp' = \sec \theta - 1$ sur le côté d'un angle égal à $\frac{\pi}{4n}$, construit séparément, à partir du sommet, et l'on trace, en prenant $\sec \theta - 1$ pour rayon, un arc rencontrant les côtés de l'angle en t, t' . On aura $tt' = \frac{\pi}{4n} (\sec \theta - 1)$. Il ne reste qu'à soustraire tt' de la somme $\delta u_1 + \delta u_2 + \dots + \delta u_6 = FP_6$ pour avoir $u_6 = FP_6$ qu'on porte sur une parallèle à l'axe des u . On obtient ainsi les points $P_6, P_5, P_4, \dots$ pour la construction du réseau.

On voit sur la figure 3, qui est construite pour $n = 6, k = 0,96$, que les droites $F_6 P_6, F_5 P_5, \dots$ sont parallèles; cela peut faciliter la construction.

En résumé, on a la règle suivante pour le calcul graphique de

$\int_v^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$ si l'on se contente de la division du quart de cercle C en

12 parties égales : 1° pour $k < 0,3$, on exécute la construction telle qu'elle est donnée au n° 1; 2° pour $0,9 > k > 0,3$, on la corrige par la soustraction des longueurs $\frac{\pi}{4n} (\sec \theta - 1)$; 3° ce n'est que pour $k > 0,9$ qu'il peut devenir nécessaire de recourir à la transformation de Landen.

Pour corriger l'erreur commise en prenant, sur la droite MM' et sur l'axe des y , la corde $2 \sin \left(\frac{\pi}{4n} \right)$ au lieu de $\frac{\pi}{2n}$, il faut prendre la longueur π par un des procédés bien connus (par exemple par la méthode de Kochansky qui donne π avec approximation de un dix-millième) et la diviser en 24 parties égales.

3. Pour la construction de l'intégrale elliptique de seconde espèce $\int_0^\varphi \Delta \varphi d\varphi$, il faut porter les longueurs $\frac{\pi}{2n}$ sur les bielles et prendre la somme de leurs projections sur la droite MM'.

Notre procédé graphique est basé sur la simplicité de la construction de la fonction $\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}$ et de la division de $d\varphi$ par cette fonction. Cela permet aussi de construire l'intégrale ultra-elliptique de la forme

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(m_1 - x)(m_2 - x)(m_3 - x) \dots (m_j - x)}} = U,$$

dans laquelle toutes les racines $m_1, m_2, \dots, m_j$ sont réelles. En effet, posons $x = \sin^2 \varphi$; il s'ensuit $dx = 2 \sin \varphi \cos \varphi d\varphi$. Posons

$$k_1^2 = \frac{1}{m_1}, \quad k_2^2 = \frac{1}{m_2}, \quad \dots, \quad k_j^2 = \frac{1}{m_j}.$$

Alors l'intégrale U prend la forme

$$U = 2k_1 k_2 \dots k_j \int_0^\varphi \frac{\sin \varphi \cos \varphi d\varphi}{\sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 \varphi} \sqrt{1 - k_2^2 \sin^2 \varphi} \dots \sqrt{1 - k_j^2 \sin^2 \varphi}}.$$

La quantité $-\frac{\sin \varphi \cos \varphi d\varphi}{\sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 \varphi}}$ n'est autre chose que la différentielle de la fonction $\sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 \varphi} = \cos \theta_1$. Ainsi la différentielle $\frac{\sin \varphi \cos \varphi d\varphi}{\sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 \varphi}}$ peut être facilement construite; c'est le premier fac-

teur qui figure sous le signe de l'intégrale proposée. Il faut le diviser successivement par les radicaux $\sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 \varphi}$, ..., $\sqrt{1 - k_j^2 \sin^2 \varphi}$ pour obtenir la différentielle à intégrer. Cette division peut se faire par une construction analogue à celle donnée au n° 1. Il faut seulement avoir soin de prendre pour chaque k des bielles de différentes longueurs, telles que $m_1, m_2, m_3, \dots, m_j$.

Je crois que cette méthode graphique pourrait être utile aux ingénieurs, parce qu'elle est tout à fait élémentaire et donne, cependant, plusieurs valeurs consécutives des fonctions elliptiques à l'aide de constructions rapides.

SUR LES GROUPES LINÉAIRES, RÉELS ET ORTHOGONAUX:

Par M. LÉON AUTONNE.

Considérons un groupe G_x de substitutions linéaires n -aires, de déterminant un $[j, k = 1, 2, \dots, n]$,

$$A = \left| x_j \sum_k a_{jk} x_k \right|^{-1} [x_j A[x_j]] = [x A[x]].$$

Supposons que les substitutions A soient : 1° réelles, les coefficients a_{jk} étant réels; 2° orthogonales, admettant pour invariant absolu la somme des carrés des variables. On dira que G_x est un groupe linéaire réel et orthogonal.

Changeons de variables, en posant symboliquement $x = r[t]$, c'est-à-dire, en notation ordinaire,

$$x_j = \sum_k r_{jk} t_k.$$

Le nouveau groupe Γ_t , qui est d'ailleurs $r^{-1} G_x$, n'est, en général, plus ni réel, ni orthogonal. Γ_t n'est cependant pas quelconque, car, pour un changement convenable de variables, $t = r^{-1}[x]$, il redevient réel et orthogonal. J'exprimerai plus brièvement cette propriété en disant que Γ_t est réalisable et admet la substitution r pour réalisante.

Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un groupe n -aire Γ , soit réalisable?

La présente Note fournit la réponse complète à la question.

Mon Mémoire *Sur l'Hermitien* (*Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 1902) contient, sur les substitutions linéaires, des considérations d'où la solution de notre problème se déduit assez simplement. Je vais me référer très fréquemment à ce travail; j'y renverrai pour la notation (*loc. cit.*, n° 7), par exemple.

Rappelons brièvement les principales théories dont on va faire usage.

Soit une *matrice* ou Tableau de n^2 coefficients,

$$[j, k = 1, 2, \dots, n],$$

$$A = [a_{jk}] = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ de déterminant } |A| = 1.$$

La matrice $A' = [a_{kj}]$ est la *transposée* de A . $\bar{g}$ étant la conjuguée de l'imaginaire g , on pose $\bar{A} = [\bar{a}_{jk}]$ (*loc. cit.*, n° 1).}

La matrice A définit, sans ambiguïté (*loc. cit.*, n° 2), une *forme bilinéaire*

$$A(x, y) = \sum_{jk} A_{jk} x_j y_k$$

et une *substitution*

$$A \cdot \left[x_j \quad \frac{\partial A(x, y)}{\partial y_j} \right] = |x| \quad A[x].$$

La matrice

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

définit la forme bilinéaire $E(x, y) = \sum x_j y_j$ et la substitution *unité*.

La même lettre A peut désigner la matrice, la forme bilinéaire et la substitution. Les formules du calcul symbolique (FROBENIUS, *J. f. r. u. a. m.*, t. 84, p. 1) sont ainsi susceptibles (*loc. cit.*, n° 4) d'une triple interprétation.

Si l'on pose $x = L[\xi]$, $y = M[\eta]$, les formes bilinéaires

$$A(x, y) \quad \text{et} \quad \bar{A}(x, \bar{y})$$

deviennent respectivement (*loc. cit.*, n° 5)

$$M'AL(\xi, \eta) \quad \text{et} \quad \bar{L}'\bar{A}L(\xi, \bar{\eta}).$$

Une matrice, forme bilinéaire ou substitution, A est

symétrique,	si	$A' = A$;
réelle,	si	$\bar{A} = A$;
orthogonale,	si	$A'A = E$;
unitaire,	si	$A'A = E$;
enfin hermitienne,	si	$A' = A,$

l'expression $A(x, \bar{x})$ devant être, de plus, dans ce dernier cas, un *hermitien*, c'est-à-dire toujours positive.

Les matrices réelles, orthogonales ou unitaires forment évidemment un groupe réel, orthogonal ou unitaire.

Si A est hermitienne, il existe (*loc. cit.*, n° 25) une, et une seule, hermitienne $a = A^{\frac{1}{2}}$ telle que $a^2 = A$. Si un groupe G admet pour invariant absolu un hermitien $H(x, \bar{x})$, le groupe transformé

$$H^{\frac{1}{2}}GH^{-\frac{1}{2}}$$

par l'hermitienne $H^{-\frac{1}{2}}$ est unitaire (*loc. cit.*, n° 31).

Tout cela rappelé, voici la proposition qui résume le problème :

THÉORÈME. — *Pour qu'un groupe n-aire Γ_t puisse, par un choix convenable de variables, être rendu réel et orthogonal, les conditions suivantes sont nécessaires et suffisantes :*

I. Γ_t possède deux invariants absolus, un hermitien $H(t, \bar{t})$ et une forme quadratique n-aire

$$[p_{jk} = p_{kj}] \quad P = \sum_{j,k} p_{jk} t_j t_k$$

de déterminant un.

II. Γ_t ayant été rendu unitaire (en le transformant par

l'hermitienne $H^{-\frac{1}{2}}$), dans l'expression transformée P la matrice $P = [p_{jk}]$ symétrique est unitaire.

Si Γ_L possède plus d'une réalisante, les divers groupes $G_x, G_y, \dots$ réels et orthogonaux, auxquels on ramène Γ_L , sont les transformés l'un de l'autre par des substitutions réelles et orthogonales. On peut donc ne pas considérer $G_x, G_y, \dots$ comme distincts. Il suffira de se procurer, d'une manière quelconque, une seule réalisante.

Je construis effectivement cette dernière dans le cas particulier, assez étendu du reste, où, dans le groupe Γ_L , une substitution A au moins a toutes les racines de son équation caractéristique

$$|\lambda E - A| = 0$$

distinctes.

Un résumé des présentes recherches a été inséré aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* du 17 mars 1902.

Je passe maintenant à la démonstration du théorème.

1. Je ne considère pas comme distincts deux groupes réels et orthogonaux, transformés l'un de l'autre par une substitution réelle et orthogonale.

Je nomme *réalisable* tout groupe n -aire qui devient réel et orthogonal après transformation par une substitution *réalisante* convenablement choisie. Je vais poursuivre la construction des groupes réalisables.

2. LEMME I. — *Des trois propriétés, réalité, unitarité, orthogonalité, que possède éventuellement une matrice A , deux quelconques assurent toujours la troisième.*

En effet, des trois relations

$$A = A, \quad \text{réalité,}$$

$$A A = E, \quad \text{orthogonalité,}$$

$$\bar{A}' A = E, \quad \text{unitarité,}$$

deux quelconques assurent toujours la troisième.

LEMME II. — *Toute matrice est le produit d'une unitaire par une hermitienne.*

Soit la matrice A . La matrice $\bar{A}'A$ est hermitienne (*loc. cit.*, n° 27) et sa racine carrée h (*loc. cit.*, n° 25) aussi est hermitienne. On a

$$\bar{A}'A = h^2 \quad \text{et} \quad h^{-1}\bar{A}'A h^{-1} = E \quad \text{ou} \quad (\overline{A h^{-1}})'A h^{-1} = E.$$

La matrice $A h^{-1} = u$ est donc unitaire et il vient

$$A = u h, \quad \text{C. Q. F. D.}$$

On a du reste aussi

$$A^{-1} = h^{-1} u^{-1}.$$

h^{-1} est hermitienne (*loc. cit.*, n° 24) et u^{-1} est unitaire. On peut donc dire aussi que toute matrice est le produit d'une hermitienne par une unitaire.

3. Considérons maintenant un groupe Γ_t , exprimé en n variables $t_1, t_2, \dots, t_n$. Par hypothèse, Γ_t est réalisable et, posant

$$t = r^{-1}[x],$$

on a un groupe G_x , exprimé en n variables $x_1, \dots, x_n$, lequel G_x est réel et orthogonal. La substitution r^{-1} sera dite *réalisante*.

G_x , étant réel et orthogonal, admet deux invariants absolus, savoir :

I. L'hermitien $E(x, \bar{x}) = \sum x \bar{x}$ (car toute substitution de G_x , étant réelle et orthogonale, est aussi unitaire, par le lemme I du 2°);

II. Le polynome quadratique $E(x, x) = \sum x^2$.

En vertu de la relation précédente

$$t = r^{-1}[x] \quad \text{ou} \quad x = r[t],$$

l'hermitien $E(x, \bar{x})$ devient l'hermitien $\bar{r}' r(t, \bar{t})$ et le polynome quadratique $E(x, x)$ devient le polynome quadratique

$$r' r(t, t) = \sum_{jk} p_{jk} t_j t_k = P(t, t),$$

où P désigne la matrice symétrique

$$\left\{ \begin{matrix} k, j = 1, 2, \dots, n \end{matrix} \right\} \quad P = [p_{jk}] = [p_{kj}].$$

4. Nous pouvons donc énoncer le résultat suivant : *Tout groupe réalisable Γ_t possède deux invariants absolus, un hermitien et une forme quadratique.*

Cherchons si la réciproque est vraie.

5. Je dis que l'on peut, sans restreindre la généralité, n'envisager que des groupes réalisables Γ_t unitaires.

r étant une réalisante, posons, conformément au lemme II du n° 2,

$$r = uh,$$

L'invariant absolu hermitien, qui est, d'après le n° 3, $\bar{r}'r(t, \bar{t})$, devient

$$h^2(t, \bar{t}).$$

Transformons Γ_t par l'hermitienne h^{-1} . L'hermitien $h^2(t, \bar{t})$ devient l'hermitien $E(t, \bar{t})$ et, par conséquent, Γ_t devient unitaire.

C'est ce que je supposerai toujours dorénavant.

Cela revient à supposer unitaires la réalisante r , pour que $\bar{r}'r$ puisse être identique à E , et aussi la matrice symétrique $P = r'r$ (n° 3).

6. Nous allons montrer que *tout groupe unitaire Γ_t qui admet pour invariant absolu une forme quadratique*

$$\sum_{jk} p_{jk} t_j t_k, \quad p_{jk} = p_{kj},$$

où la matrice symétrique

$$P = [p_{jk}]$$

est unitaire, est réalisable.

Il suffira évidemment de construire une réalisante.

Cette proposition est bien la réciproque de celle du n° 4, car le second invariant absolu est déjà, par unitarité, l'hermitien $E(t, \bar{t})$.

7. La matrice unitaire symétrique P admet une canonisante (*loc. cit.*, n° 22) unitaire λ et a pour forme canonique P_0 ,

$$P = \lambda^{-1} P_0 \lambda,$$

$$P_0 = [t_j, \quad c_j t_j],$$

où $|c_j| = 1$ (*loc. cit.*, n° 20, *in fine*).

Mettons en évidence les c_j égaux; on écrira, $i = \sqrt{-1}$,

$$\begin{aligned} c_1 &= c_2 = c_3 = \dots = c_m = e^{i\varphi}, \\ c_{m+1} &= c_{m+2} = \dots = c_{m+m'} = e^{i\psi}, \\ c_{m+m'+1} &= \dots = c_{m+m'+m''} = e^{i\omega}, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

$\varphi, \psi, \omega, \dots$ étant des arcs réels, tous distincts, compris entre 0 et 2π ,

On vérifiera sans peine la proposition suivante :

LEMME. — *Pour qu'une substitution n-aire Λ soit échangeable à P_0 , il faut et il suffit que l'on ait*

$$\Lambda = L_m L_{m'} L_{m''} \dots$$

où $L_m, L_{m'}, L_{m''}, \dots$ sont respectivement une m -aire, une m' -aire, une m'' -aire, ... quelconques, effectuées, savoir, respectivement,

$$\begin{array}{lll} L_m & \text{sur} & t_1, \quad t_2, \quad \dots, \quad t_m; \\ L_{m'} & \text{sur} & t_{m+1}, \quad \dots, \quad t_{m+m'}; \\ L_{m''} & \text{sur} & t_{m+m'+1}, \quad \dots, \quad t_{m+m'+m''}; \\ \dots & \dots & \dots\dots\dots \end{array}$$

Ce lemme résulte immédiatement de théories, bien connues, de M. Jordan.

8. Sont symétriques : P par hypothèse et P_0 comme canonique. Il vient (n° 7)

$$P = \lambda^{-1} P_0 \lambda = P' = \lambda' P_0 \lambda'^{-1}, \quad P_0 = \lambda \lambda' P_0 (\lambda \lambda')^{-1};$$

$\lambda \lambda'$ est échangeable à P_0 et l'on écrira

$$\Lambda = \lambda \lambda',$$

Λ ayant l'expression qui figure au lemme du n° 7.

9. Considérons maintenant la canonique unitaire

$$\Theta_0 = |t_j, \quad -t_j t_j|.$$

où (voir n° 7)

$$\begin{aligned} d_1 &= d_2 = \dots = d_m = e^{\frac{i\varphi}{2}}, \\ d_{m+1} &= d_{m+2} = \dots = d_{m+m'} = e^{\frac{i\psi}{2}}, \\ d_{m+m'+1} &= \dots = d_{m+m'+m''} = e^{\frac{i\omega}{2}}, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

les arcs $\frac{\varphi}{2}, \frac{\psi}{2}, \frac{\omega}{2}, \dots$ sont tous inégaux.

On a évidemment $\Theta_0^2 = P_0$ et Λ est échangeable à Θ_0 .

Posons

$$\Theta = \lambda^{-1} \Theta_0 \lambda, \quad \text{comme} \quad P = \lambda^{-1} P_0 \lambda;$$

on a aussi

$$\Theta^2 = P.$$

Je dis que Θ est *symétrique*.

Considérons, en effet,

$$\Theta' \Theta^{-1} = \lambda' \Theta_0 \lambda'^{-1} \lambda^{-1} \Theta_0^{-1} \lambda = \lambda' \Theta_0 \Lambda^{-1} \Theta_0^{-1} \lambda$$

et, comme $\Lambda = \lambda \lambda'$ est échangeable à Θ_0 ,

$$\Theta' \Theta^{-1} = \lambda' \Lambda^{-1} \lambda = E \quad \text{et} \quad \Theta' = \Theta. \qquad \text{c. q. f. d.}$$

10. On reprendra donc un groupe unitaire Γ_t ayant pour invariant absolu quadratique l'expression

$$P(t, t),$$

où la matrice unitaire symétrique $P = \Theta^2$.

Posons

$$t = \Theta^{-1}[x] \quad \text{ou} \quad x = \Theta[t];$$

Γ_t se transforme en un groupe unitaire G_x , lequel admet pour invariant quadratique l'expression

$$\Theta^{-1} P \Theta^{-1}(x, x) = \Theta^{-1} \Theta^2 \Theta^{-1}(x, x) = E(x, x) = \sum x^2.$$

G_x est orthogonal; il est déjà unitaire, donc (lemme I du n° 2) G_x est réel. Γ_t est réalisable et Θ est une réalisante.

11. Nous avons, au n° 5, rendu Γ_t unitaire, en le transformant par l'hermitienne h^{-1} , h étant la racine carrée de son hermitien,

invariant absolu,

$$H(t, \bar{t}) = \bar{r} r(t, \bar{t}).$$

Nous pouvons donc résumer toute la discussion précédente dans un théorème qui est la proposition annoncée au commencement du présent travail.

THÉORÈME. — *Pour qu'un groupe n-aire Γ_t puisse, par un choix convenable de variables, être rendu orthogonal et réel, les conditions suivantes sont nécessaires et suffisantes :*

1° Γ_t possède deux invariants absolus, un hermitien $H(t, \bar{t})$ et une forme quadratique n-aire, de déterminant un,

$$P = \sum_{jk} p_{jk} t_j t_k, \quad p_{jk} = p_{kj};$$

2° Γ_t ayant été rendu unitaire (en le transformant par l'hermitienne $H^{-\frac{1}{2}}$) dans l'expression transformée, P , la matrice n-aire symétrique

$$P = [p_{jk}]$$

est unitaire.

12. Γ_t satisfaisant aux conditions du théorème, nous avons construit la réalisante Θ , laquelle est connue dès qu'on possède la matrice P et une de ses canonisantes.

Existe-t-il pour Γ_t encore d'autres réalisantes?

Supposons qu'il en existe deux, r et s , de façon qu'en posant

$$x = r[t], \quad y = s[t],$$

on obtienne deux groupes G_x et G_y , tous deux réels et orthogonaux.

On aura (n° 3)

$$P(t, t) = r' r(t, t) = s' s(t, t), \quad r'^{-1} s' s r^{-1} = (s r^{-1})' s r^{-1} = 1;$$

la matrice $u = s r^{-1}$ est orthogonale. D'ailleurs, $y = u[x]$.

Je dis que u est réelle. Il suffira (lemme I du n° 2) de montrer que u est unitaire. Or, cela est évident, car u , transformant l'un dans l'autre les groupes réels et orthogonaux G_x et G_y , transforme l'un dans l'autre les deux hermitiens $E(x, \bar{x})$, et $E(y, \bar{y})$.

u étant réelle et orthogonale, les groupes G et $\mathfrak{G}$ ne sont pas distincts (n° 1).

Il est donc inutile de chercher d'autres réalisantes que Θ .

Il suffira même de se procurer une réalisante r quelconque.

La manière la plus simple d'avoir r est de poser $x = r(t)$ de façon que l'expression $\sum x^2$ s'identifie avec le polynôme quadratique P en $t_1, \dots, t_n$. r , bien entendu, doit être unitaire.

Alors, en effet, en transformant Γ_t par r^{-1} , on a un groupe G_x qui est unitaire, comme Γ_t , et, de plus, orthogonal; donc, G_x est aussi réel.

13. Le calcul effectif d'une réalisante unitaire ne présente aucune difficulté dans un cas particulier, assez étendu du reste. C'est lorsque le groupe réalisable unitaire Γ_t possède au moins une substitution A , pour laquelle l'équation caractéristique

$$f(\varphi) = |\varphi E - A| = 0$$

a ses n racines distinctes. Le polynôme $f(\varphi)$ est évidemment à coefficients réels.

Ces racines sont, par unitarité, de la forme e^{iz} . A cause de la réalité du polynôme $f(\varphi)$, s'il y a une racine e^{iz} , il y aura une racine e^{-iz} . Tous les arcs réels z et $-z$ sont distincts. Aucun d'eux n'est égal à π , car l'équation caractéristique, en vertu de $|A| = 1$, possède la racine -1 avec un degré pair de multiplicité.

Nous supposerons A mise sous forme canonique et nous distinguerons deux cas :

$$\begin{aligned} n = 2m & \quad \text{— pair,} \\ n = 2m - 1 & \quad \text{— impair.} \end{aligned}$$

14. Prenons $n = 2m$. Eu égard à ce qui vient d'être dit, on peut écrire

$$A = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 e^{i\alpha_1} \\ z_1 & z_2 e^{-i\alpha_1} \end{pmatrix} \quad l = 1, 2, \dots, m,$$

où

$$t_1 = y_1, \quad t_2 = z_1, \quad t_3 = y_2, \quad t_4 = z_2, \quad \dots;$$

les arcs α sont tous distincts; aucun d'eux n'est ni 0 ni π .

Le polynôme quadratique P est un invariant absolu vis-à-vis

de A. On vérifie de suite que

$$P = 2 \sum_l p_l y_l z_l$$

et l'on a la matrice symétrique

$$P = \begin{pmatrix} 0 & p_1 & 0 & 0 & . & . . . \\ p_1 & 0 & 0 & 0 & . & . . . \\ 0 & 0 & 0 & p_2 & . & . . . \\ 0 & 0 & p_2 & 0 & . & . . . \\ . & . & . & . & 0 & . . . \end{pmatrix}.$$

Par hypothèse,

$$(1) \quad \begin{aligned} 1 &= |P|^2 = (-1)^m \prod_l p_l^2, \\ \prod_l p_l^2 &= (-1)^m. \end{aligned}$$

Par unitarité on a, par un calcul facile,

$$(2) \quad \begin{aligned} \bar{P}P &= \begin{pmatrix} |p_1|^2 & 0 & & . . . \\ 0 & |p_1|^2 & & . . . \\ . . . & . . . & |p_3|^2 & . . . \end{pmatrix} = E \\ 1 &= |p_1| = |p_2| = . . . = |p_m|, \\ p_l &= e^{i\varpi_l}, \end{aligned}$$

ϖ_l = arc réel compris entre 0 et 2π . Eu égard à (1), on a

$$2 \sum_l \varpi_l = m\pi = 2M\pi, \quad M = \text{entier}.$$

15. Introduisons maintenant une transformation

$$t = q[x], \quad |q| = 1$$

en posant

$$y_l = \mu_l \frac{x_l + ix'_l}{\sqrt{2}}, \quad z_l = \mu_l \frac{ix_l + x'_l}{\sqrt{2}}.$$

La condition $|q| = 1$ donne

$$(3) \quad \prod_l \mu_l^2 = 1,$$

et l'unitarité donne, par un calcul aisé,

$$1 = \mu_l \bar{\mu}_l = |\mu_l|^2, \quad |\mu_l| = 1, \quad \mu_l = e^{i\tilde{\varpi}_l}.$$

Le polynome P devient

$$P_1 = \sum_l p_l \mu_l^2 (x_l^2 + x_l'^2).$$

q est une réalisante dès que P_1 est, à un facteur constant K près, la somme des carrés des variables x et x' (n° 12). Il faut donc déterminer les paramètres μ par la condition

$$(4) \quad K = p_l \mu_l^2 = e^{i(\varpi_l + 2\varphi_l)};$$

sous le bénéfice de (3), (4) donne

$$\prod_l p_l = K^m,$$

et, eu égard à (1),

$$(5) \quad K^{2m} = (-1)^m.$$

Si m est pair, on prendra, pour avoir (4),

$$K = 1, \quad \varphi_l = -\frac{\varpi_l}{2}.$$

Si m est impair, on prendra, à cause de (4),

$$K = i, \quad \varphi_l = -\frac{\varpi_l}{2} + \frac{\pi}{4}.$$

La réalisante est construite.

16. Supposons enfin que n est impair, $n = 2m + 1$.

On écrira, eu égard aux explications du n° 13, et remarquant que 1 est racine de l'équation caractéristique,

$$\Lambda = \begin{vmatrix} t_0 & t_0 \\ y_l & y_l e^{i\alpha_l} \\ z_l & z_l e^{-i\alpha_l} \end{vmatrix} \quad l = 1, 2, \dots, m,$$

$y_1 = t_1, z_1 = t_2, y_2 = t_3, \dots$; les arcs réels α sont tous distincts, compris entre 0 et 2π et $\neq 0, 2\pi$ ou π .

Comme au n° 14, on voit que le polynome P est

$$P = p_0 t_0^2 + 2 \sum_l p_l y_l u_l;$$

la matrice P est

$$P = \begin{pmatrix} p_0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & p_1 & \dots \\ 0 & p_1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

$$1 = |P| = p_0 (-1)^m \prod_l p_l^2,$$

$$(6) \quad \prod_l p_l^2 = (-1)^m p_0^{-1}.$$

Par unitarité,

$$1 = p_0 \bar{p}_0 = |p_0|^2 = p_l \bar{p}_l = |p_l|^2,$$

$$|p_0| = |p_l| = 1, \quad p_0 = e^{i\varpi_0}, \quad p_l = e^{i\varpi_l},$$

les arcs ϖ étant compris entre 0 et 2π . Eu égard à (6),

$$\varpi_0 + 2 \sum_l \varpi_l = m\pi + 2M\pi, \quad M = \text{entier}.$$

17. Introduisons maintenant une transformation

$$t = q[x], \quad |q| = 1,$$

en posant

$$t_0 = \mu_0 x_0,$$

$$y_l = \mu_l \frac{x_l + ix'_l}{\sqrt{2}}, \quad z_l = \mu_l \frac{ix_l + x'_l}{\sqrt{2}}.$$

La condition $|q| = 1$ donne

$$(7) \quad 1 = \mu_0 \prod_l \mu_l^2, \quad \prod_l \mu_l^2 = \mu_0^{-1}.$$

L'unitarité donne

$$1 = \mu_0 \bar{\mu}_0 = |\mu_0|^2 = \mu_l \bar{\mu}_l = |\mu_l|^2,$$

$$|\mu_0| = |\mu_l| = 1; \quad \mu_0 = e^{i\varphi_0}, \quad \mu_l = e^{i\varphi_l}.$$

Le polynome P devient

$$P_1 = p_0 \mu_0^2 x_0^2 + i \sum_l p_l \mu_l^2 (x_l^2 + {}^2x'_l).$$

q est une réalisante dès que

$$(8) \quad p_0 \mu_0^2 = ip_l \mu_l^2 = e^{i(\varpi_0 + 2\varphi_0)} = ie^{i(\varpi_l + 2\varphi_l)}.$$

Eu égard à (6) et (7), il vient

$$p_0^m x_0^{2m} = i^m x_0^{-1} \prod_l p_l, \quad i^m \prod_l p_l = p_0^m x_0^{2m+1},$$

$$(9) \quad (p_0 x_0^2)^{2m+1} = 1.$$

On prendra $p_0 x_0^2 = 1$, et, pour satisfaire à (8),

$$z_0 = -\frac{\pi_0}{2}, \quad z_l = -\frac{\pi_l}{2}.$$

18. Si, dans toute substitution du groupe réalisable, l'équation caractéristique a des racines multiples, le calcul d'une réalisante est analogue, mais beaucoup plus compliqué.

SUR LES PROPRIÉTÉS ARITHMÉTIQUES DES FONCTIONS ENTIÈRES ET QUASI ENTIÈRES;

Par M. EDMOND MAILLET.

I.

Les polynômes $F(x)$ à coefficients rationnels jouissent de diverses propriétés que l'on pourrait chercher à étendre aux fonctions entières et quasi entières (1). Ainsi :

1° Le produit de deux polynômes à coefficients rationnels a ses coefficients rationnels;

2° Si x est rationnel ou algébrique, $F(x)$ l'est également;

3° Si b est rationnel ou algébrique, $F(x+b) = 0$, ordonné suivant les puissances croissantes de x , a ses coefficients rationnels ou algébriques.

Dans quelle mesure ces propriétés existent-elles pour les fonctions entières ou quasi entières? Nous ne prétendons pas traiter ici la question d'une façon absolument générale. Nous pourrions néanmoins, par des exemples suffisamment étendus, basés surtout sur la considération des fonctions quasi algébriques,

(1) Pour la signification de ce mot, voir notre Communication du 17 février 1902 à l'Académie des Sciences.

mettre en lumière la différence profonde qui existe arithmétiquement entre les trois catégories de fonctions : polynômes, fonctions entières, fonctions quasi entières.

Dans les exemples que nous indiquons, si la première propriété peut subsister pour les fonctions entières, les deux autres ne subsistent pas. Enfin, aucune n'est vraie pour les fonctions quasi entières.

Nous terminons en montrant qu'il y a une infinité de fractions continues non algébriques dont l'ensemble a la puissance du continu et qui sont racines d'équations de la forme

$$1 - \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n = 0,$$

où les c_n sont rationnels et décroissent suffisamment vite avec n ⁽¹⁾.

II.

FONCTIONS ENTIÈRES.

Considérons la fonction entière $e^x - a$ où a est rationnel. On sait, d'après les théorèmes d'Hermite et de M. Lindemann sur le nombre e , que e^x , par suite $e^x - a$ ne peut être algébrique que si x est transcendant ⁽⁴⁾. Donc les racines de $e^x - a = 0$ sont transcendentes. Il y a là une véritable réciprocité.

De même $e^{x+b} = e^b \left(1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \dots \right)$ a tous ses coefficients transcendents si b est rationnel ou algébrique. Enfin, les racines d'une fonction entière peuvent être rationnelles sans que ses coefficients le soient. Exemple :

$$\sin \pi z = \pi z \Pi \left(1 - \frac{z^2}{k^2} \right) = \frac{\pi z}{1} - \frac{\pi^3 z^3}{3!} + \frac{\pi^5 z^5}{5!} + \dots$$

⁽¹⁾ Un résumé de la présente Note a été communiqué à l'Académie des Sciences (19 mai 1902). Sa lecture exige seulement la connaissance du *Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique*, de notre Note du *Journal de Mathématiques* (1901) sur les équations transcendentes, et de notre Mémoire des *Acta mathematica* (1902) sur les nombres e et π et les équations transcendentes. On peut rapprocher avec intérêt de ce qui suit diverses Notes de M. P. Staeckel (*Math. Ann.*, t. 46, p. 513, *Comptes rendus*, 1907, mars 1899, et *Jahrb. der Deuts. Mat. Ver.*, t. XI, 1902).

Considérons de la même manière une fonction quasi algébrique

$$X(x) = \sum_0^{\infty} \frac{a_n}{t_n} x^n$$

où $|a_n|$ est limité et où t_n croît suffisamment vite avec n , a_n et t_n étant entiers : c'est ce que nous pouvons appeler *une fonction $X(x)$ quasi algébrique*. Si x est rationnel, $X(x)$ est transcendant : les racines de $X(x) = 0$ sont donc irrationnelles : nous savons déjà d'ailleurs qu'elles sont transcendentes ⁽¹⁾. Il y a encore là une véritable réciprocité.

On en conclut que la deuxième et la troisième des propriétés des polynômes indiquées au § I ne subsistent pas ici.

Au contraire, il est très possible que la première propriété subsiste, à condition de définir avec précision la divisibilité des fonctions entières. En tout cas, le produit de deux fonctions entières à coefficients rationnels est évidemment une fonction entière à coefficients rationnels.

III.

FONCTIONS QUASI ENTIÈRES.

Nous allons voir, au contraire, qu'aucune de ces trois propriétés ne paraît subsister pour les fonctions quasi entières que nous avons surtout en vue ici.

Nous allons d'abord établir le théorème suivant :

THÉORÈME I. — *Soit l'équation réciproque*

$$(1) \quad f(z) + f\left(\frac{1}{z}\right) = a,$$

où a est rationnel, et $f(z)$ est une fonction entière à coefficients rationnels. Par la transformation $u = z + \frac{1}{z}$ on obtient l'équation équivalente $\varphi(u) = a$, où $\varphi(u)$ est une fonction entière.

- 1° Si $f(z) = e^z$, φ a tous ses coefficients transcendants ;
- 2° Si $f(z)$ est une fonction $X(x)$, c'est-à-dire une fonction

⁽¹⁾ En sorte que si ξ est algébrique, $X(\xi)$ est transcendant.

entière à coefficients $c_n = \frac{s_n}{t_n}$ rationnels, et si $|s_n| \leq \sigma_n$, les σ_n étant donnés, on peut toujours choisir un mode de croissance des t_n suffisamment rapide pour que $\varphi(u)$ ait tous ses coefficients transcendants.

Posons

$$\begin{aligned} z + \frac{1}{z} &= u, \\ z^2 - 2uz + 1 &= 0, \\ z &= u \pm \sqrt{u^2 - 1}. \end{aligned}$$

L'équation (1) devient

$$(2) \quad f(u + \sqrt{u^2 - 1}) + f(u - \sqrt{u^2 - 1}) = a.$$

Le premier membre, si l'on pose $\sqrt{u^2 - 1} = y$, ne change pas quand on y change y en $-y$. Ce sera donc une fonction paire de y , par suite une fonction bien déterminée de u et n'ayant qu'une valeur pour chaque valeur de u , c'est-à-dire une fonction monodrome. Le premier membre ne devient infini que pour $z = 0$ ou ∞ , c'est-à-dire $u = \infty$; c'est donc une fonction entière de u (1).

L'équation (2) est une équation entière

$$(2^{bis}) \quad \varphi(u) = a$$

équivalente à (1) grâce à la transformation $z + \frac{1}{z} = u$.

Mais cette équation (2^{bis}) n'aura probablement pas ses coefficients rationnels ou même algébriques en général. Nous citerons à cet égard deux exemples :

$$1^o \quad f(z) = e^z;$$

(1) devient

$$\begin{aligned} e^z + e^{\frac{1}{z}} &= a; \\ \varphi(u) &= e^{u + \sqrt{u^2 - 1}} + e^{u - \sqrt{u^2 - 1}} = 2e^u \cosh \sqrt{1 - u^2} = 2e^u \psi(u) \\ &= \varphi(0) + \frac{u}{1} \varphi'(0) + \frac{u^2}{2!} \varphi''(0) + \dots \end{aligned}$$

(1) La transformation $z + \frac{1}{z} = u$ rejette les points critiques de (1) à l'infini.

$\varphi(0)$, $\varphi'(0)$, ... seront évidemment des fonctions linéaires à coefficients rationnels de $\cos 1$ et $\sin 1$. Ainsi

$$\begin{aligned}\varphi(0) &= 2 \cos 1, \\ \varphi'(0) &= [2e^u \psi'(u) + 2e^u \psi'(u)]_{u=0} = 2\psi'(0) = 2 \cos 1, \\ &\dots\dots\dots\end{aligned}$$

D'une manière générale

$$\varphi^{(k)}(u) = 2e^u \psi^{(k)}(u) + 2C_k^1 e^u \psi^{(k-1)}(u) + \dots + 2e^u \psi^{(k)}(u)$$

et

$$\varphi^{(k)}(0) = 2\psi^{(k)}(0) + \dots = 2 \cos 1 + \dots$$

chacun des termes du dernier membre contenant en facteur $\cos 1$ ou $\sin 1$ multiplié par un nombre rationnel; $\varphi^{(k)}(0)$ n'est d'ailleurs pas nul en général, sans quoi $\varphi(u)$ se réduirait à un polynome, ce qui est absurde. $\varphi^{(k)}(0)$ est alors de la forme

$$A \cos 1 + B \sin 1,$$

A et B étant rationnels et l'un des deux $\neq 0$.

Les coefficients de $\varphi(u)$ sont alors tous transcendants. En effet,

$$\begin{aligned}\cos x &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}; \\ \cos 1 &= \frac{e^i + e^{-i}}{2}\end{aligned}$$

ne peut être algébrique, car e^i le serait, ce qui est impossible, d'après M. Lindemann, puisque i l'est; $\sin 1 = \sqrt{1 - \cos^2 1}$ est transcendant ainsi que $A \cos 1 + B \sin 1$, sans quoi $\cos 1$ serait algébrique. Donc $\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}$ est algébrique.

Ceci démontre la première partie du théorème.

2° Ce qui précède n'est pas un cas unique : nous allons montrer que, dans un cas très étendu, l'équation (2^{bis}) a ses coefficients tous transcendants, bien que l'équation (1) ait ses coefficients tous rationnels.

Soient

$$\begin{aligned}f(z) &= c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n + \dots, \\ \varphi(u) &= 2c_0 + c_1 \left(z + \frac{1}{z}\right) + \dots + c_n \left(z^n + \frac{1}{z^n}\right) + \dots\end{aligned}$$

Dès lors,

$$\gamma(u) = 2c_0 + c_1 u + c_2(u^2 - 2) + \dots + c_{2p} B_{2p} + c_{2p+1} B_{2p+1} + \dots$$

Le coefficient de u^q est de la forme

$$\gamma_q = c_q \delta_0^{(q)} + c_{q+1} \delta_1^{(q+1)} + c_{q+2} \delta_2^{(q+2)} + \dots + c_{q+i} \delta_i^{(q+i)} + \dots$$

D'ailleurs, $\delta_i^{(q+i)}$ est limité en fonction de $q+i$ et croît moins vite, pour une valeur donnée de $q+i$, qu'une certaine fonction $\gamma_i(q+i)$, quels que soient q et i . Ceci va nous suffire pour montrer que si les c_n décroissent assez vite avec $\frac{1}{n}$ et sont convenablement choisis, les nombres γ_q sont en général transcendants.

En effet, nous raisonnerons encore comme l'a fait Liouville pour montrer l'existence de nombres transcendants.

Si $f(x) = 0$ est une équation algébrique irréductible de degré k à coefficients entiers,

$$\frac{P_{q+i}^{(q)}}{Q_{q+i}^{(q)}} = c_q \delta_0^{(q)} + \dots + c_{q+i} \delta_i^{(q+i)},$$

avec

$$c_{q+i} = \frac{s_{q+i}}{t_{q+i}},$$

$P_{q+i}^{(q)}$, $Q_{q+i}^{(q)}$ entiers premiers entre eux, s_{q+i} et t_{q+i} étant limités en fonction de $q+i$, ainsi que $P_{q+i}^{(q)}$, $Q_{q+i}^{(q)}$; $Q_{q+i}^{(q)}$ divise le dénominateur commun à $c_q, \dots, c_{q+i}$.

Soit $|s_q| < \sigma_q$, quel que soit q , le mode de croissance des σ_q étant donné. Nous supposons le mode de croissance des t_q assez rapide pour que

$$\left| z - \frac{P_{q+i}^{(q)}}{Q_{q+i}^{(q)}} \right| < 2 |c_{q+i+1} \delta_i^{(q+i+1)}|,$$

quels que soient q et i . La chose est toujours possible, car, pour chaque valeur de $q+i$, le nombre d'inégalités auxquelles doit satisfaire c_{q+i+1} est limité.

On a, pour $q+i$ assez grand,

$$f\left(\frac{P_{q+i}^{(q)}}{Q_{q+i}^{(q)}}\right) > \frac{A}{Q_{q+i}^{q+k}} > \frac{1}{Q_{q+i}^{q+k}} \quad (A \text{ entier } \neq 0),$$

ou, *a fortiori*,

$$(3) \quad \left| \frac{P_{q+i}^{(q)}}{Q_{q+i}^{(q)}} - \xi \right| M \geq \frac{1}{Q_{q+i}^{(q,k)}},$$

si $\left| \xi - \frac{P_{q+i}^{(q)}}{Q_{q+i}^{(q)}} \right|$ est < la demi-différence entre deux racines de $f(x) = 0$.

M a une limite inférieure fonction de q pour toutes les équations où les coefficients et le degré sont $\leq q + i$. Donc,

$$\left| \frac{P_{q+i}^{(q)}}{Q_{q+i}^{(q)}} - \xi \right| = r_{q+i}$$

a une limite inférieure λ_{q+i} fonction de $q + i$. Si t_{q+i} croît suffisamment vite avec $q + i$, on peut toujours prendre t_{q+i+1} assez grand pour que r_{q+i} soit $< \frac{1}{M t_{q+i}^k}$ dès que $q + i$ est assez grand, quel que soit q , c'est-à-dire pour que (3) soit impossible. En effet, il suffira

$$(4) \quad 2 | c_{q+i+1} \delta_i^{q+i+1} | < \lambda_{q+i}.$$

Donnant alors à q dans γ_q les valeurs 0, 1, 2, ..., $q + i = q'$, on obtient pour r_{q+i} , et, par suite, λ_{q+i} , $q' + 1$ valeurs; de même pour δ_i^{q+i+1} , si on laisse $q + i$ constant: il suffira de prendre $|c_{q+i+1}| < \text{la plus petite des valeurs } \frac{\lambda_{q+i}}{2 \delta_i^{q+i+1}}$ correspondantes pour que (3) soit impossible pour $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{q+i}$, par suite pour que $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{q+i}$ soient transcendants.

On peut donc déterminer un mode de croissance assez rapide des t_j pour que tous les γ_j soient transcendants (1). c. q. r. d.

Nous allons maintenant établir le théorème suivant :

(1) On pourrait montrer d'une façon analogue que γ_q de module < 1 ne peut être racine d'une équation $\sum_{n=0}^{\infty} \theta_n x^{\varpi_n} = 0$ quand les θ_n décroissent assez vite ou quand les ϖ_n croissent assez vite, pourvu que les numérateurs des θ_n aient leur croissance limitée.

THÉORÈME II. — Soit

$$\sum_0^{\infty} c_n z^n + \sum_0^{\infty} \frac{c_n^0}{z^n} = \sum_0^{\infty} \frac{a_n}{t_n} z^n \sum_0^{\infty} \frac{a_n^0}{t_n^0} \frac{1}{z^n}$$

une fonction quasi entière avec un point singulier essentiel à l'origine : si $|a_n| \leq x_n$, $|a_n^0| \leq x_n^0$, les x_n , x_n^0 étant donnés, on peut toujours choisir un mode de croissance assez rapide des t_n , t_n^0 pour que $\sum_0^{\infty} c_n z^n$ et $\sum_0^{\infty} \frac{c_n^0}{z^n}$ aient tous leurs coefficients transcendants quand a_n , a_n^0 , t_n , t_n^0 sont entiers.

Soient

$$\varphi(z) = \sum_0^{\infty} b_n z^n, \quad \varphi_0\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_0^{\infty} \frac{b_n^0}{z^n},$$

$\varphi(z)$ et $\varphi_0(z)$ étant des fonctions entières à coefficients rationnels,

$$b_n = \frac{a_n}{t_n}, \quad b_n^0 = \frac{a_n^0}{t_n^0} \quad (a_n, a_n^0, t_n, t_n^0 \text{ entiers}).$$

On sait que le produit

$$\varphi(z) \varphi_0\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_0^{\infty} c_n z^n + \sum_0^{\infty} \frac{c_n^0}{z^n}.$$

On a

$$c_\lambda = \sum_0^{\infty} b_{n+\lambda} b_n^0 = \sum_0^{\infty} \frac{a_{n+\lambda}}{t_{n+\lambda}} \frac{a_n^0}{t_n^0},$$

$$c_\lambda^0 = \sum_0^{\infty} b_n b_{n+\lambda}^0 = \sum_0^{\infty} \frac{a_{n+\lambda}^0}{t_{n+\lambda}^0} \frac{a_n}{t_n}.$$

D'après ce qu'on a vu dans la démonstration du théorème précédent, c_λ et c_λ^0 étant précisément de la forme γ_q , on peut toujours prendre un mode de croissance suffisamment rapide des t_n , t_n^0 , quand les x_n , x_n^0 sont donnés, pour que c_λ et c_λ^0 soient transcendants.

Remarque. — c_λ , c_λ^0 décroissent alors aussi vite qu'on veut avec $\frac{1}{\lambda}$, pourvu que b_n , b_n^0 décroissent suffisamment vite avec $\frac{1}{n}$.

Donc, ici,

$\sum_0^{\infty} c_n z^n$, $\sum_0^{\infty} c_n^0 z^n$ sont quasi algébriques quand $\sum_0^{\infty} b_n^0 z^n$, $\sum_0^{\infty} b_n^1 z^n$ le sont.

Il convient, avant d'aller plus loin, de chercher à étendre ceci aux fonctions quasi entières générales. Il nous suffira de considérer les fonctions quasi entières

$$F(z) = f(z) + f_0\left(\frac{1}{z}\right) = f_1\left(\frac{1}{z-a_1}\right) = \varphi(z) \varphi_0\left(\frac{1}{z}\right) \varphi_1\left(\frac{1}{z-a_1}\right),$$

où l'on suppose que $\varphi(z)$, $\varphi_0(z)$, $\varphi_1(z)$ sont des fonctions algébriques à coefficients rationnels.

Les produits $\varphi(z) \varphi_0\left(\frac{1}{z}\right)$, $\varphi(z) \varphi_1\left(\frac{1}{z-a_1}\right)$, $\varphi_0\left(\frac{1}{z}\right) \varphi_1\left(\frac{1}{z-a_1}\right)$ ont encore leurs coefficients transcendants : on le voit comme tout à l'heure.

Nous allons établir le théorème suivant :

THÉORÈME III. — Soit la fonction quasi entière

$$F(z) = \sum_0^{\infty} c_n z^n + \sum_0^{\infty} \frac{c_n^0}{z^n} + \sum_0^{\infty} \frac{c_n^1}{(z-a_1)^n} = \sum_0^{\infty} b_n z^n \sum_0^{\infty} \frac{b_n^0}{z^n} \sum_0^{\infty} \frac{b_n^1}{(z-a_1)^n}$$

(a_1 rationnel) où les b_n , b_n^0 , b_n^1 sont rationnels et égaux à

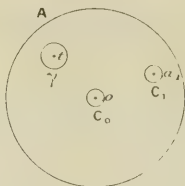
$$\frac{s_n}{t_n}, \frac{s_n^0}{t_n^0}, \frac{s_n^1}{t_n^1}, \quad \text{avec} \quad |s_n| < \tau_n, \quad |s_n^0| < \tau_n^0, \quad |s_n^1| < \tau_n^1,$$

les $\tau_n, \tau_n^0, \tau_n^1$ étant donnés, on peut toujours choisir un mode de croissance assez rapide des t_n, t_n^0, t_n^1 pour que le premier membre possède autant de coefficients transcendants que l'on veut.

En effet, considérons un cercle C_0 de petit rayon r_0 ayant pour centre l'origine, un cercle C_1 de petit rayon r_1 ayant pour centre a_1 , un cercle γ de petit rayon ρ ayant pour centre un point t quelconque du plan extérieur à C_0 et C_1 , et enfin le cercle A de rayon R aussi grand qu'on veut ayant pour centre l'origine et contenant t .

La fonction $\frac{F(z)}{z-t}$ est monodrome à l'intérieur de la région S for-

mée du cercle A diminué des cercles C_0 , C_1 , γ . On aura



$$\int_A \frac{F(z)}{z-t} dz = \int_{C_0} + \int_{C_1} + \int_{\gamma}.$$

On a le long de A

$$\frac{1}{z-t} = \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{t}{z}} = + \frac{1}{z} \left(1 + \frac{t}{z} + \frac{t^2}{z^2} + \dots \right),$$

car $\text{mod} \left| \frac{t}{z} \right| < 1$.

Le long de C_0 ,

$$\frac{1}{z-t} = \frac{1}{t} \frac{1}{\frac{z}{t}-1} = - \frac{1}{t} \left(1 + \frac{z}{t} + \frac{z^2}{t^2} + \dots \right).$$

car $\left| \frac{z}{t} \right|$ y est < 1 ;

Le long de C_1

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-t} &= \frac{1}{z-a_1-(t-a_1)} = \frac{1}{t-a_1} \frac{1}{\frac{z-a_1}{t-a_1}-1} \\ &= - \frac{1}{t-a_1} \left(1 + \frac{z-a_1}{t-a_1} + \dots \right), \end{aligned}$$

car $\left| \frac{z-a_1}{t-a_1} \right|$ y est < 1 .

Dès lors,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} &= 2\pi i F(t), \\ \int_A &= \int_A \frac{F dz}{z} - \frac{1}{t} \int_A \frac{F dz}{z^2} + \dots \\ &= \int_{C_0} - \frac{1}{t} \int_{C_0} F dz - \frac{1}{t^2} \int_{C_0} z F dz - \frac{1}{t^3} \int_{C_0} z^2 F dz - \dots \\ &= \int_{C_1} - \frac{1}{t-a_1} \int_{C_1} F dz - \frac{1}{(t-a_1)^2} \int_{C_1} (z-a_1) F dz + \dots \end{aligned}$$

On en conclura la valeur des coefficients $c_n, c_n^{(0)}, c_n^{(1)}$ de f, f_0, f_1 . Ainsi

$$c_n^{(0)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} z^{n-1} F(z) dz.$$

Il reste à prouver que si $\varphi, \varphi_0, \varphi_1$ sont quasi algébriques à coefficients rationnels, $c_n^{(0)}$ est transcendant. Or, soit

$$\varphi(z) = \sum_0^{\infty} b_n z^n,$$

et b_μ le premier des coefficients b_n qui soit $\neq 0$. Soit encore aux environs de $z = 0$

$$\varphi_1\left(\frac{1}{z-a_1}\right) = \Phi(z) = \frac{z^k}{k!} \frac{\Phi^{(k)}(0)}{k!} + \frac{z^{k+1}}{(k+1)!} \frac{\Phi^{(k+1)}(0)}{(k+1)!} + \dots,$$

si $\Phi^{(k)}(z)$ est la première des dérivées de Φ qui ne s'annule pas pour $z = 0$. On aura

$$\varphi_1\left(\frac{1}{z-a_1}\right) = z^k \left(\frac{\Phi^{(k)}(0)}{k!} + \dots \right)$$

et, si $|z|$ est suffisamment petit le long de C_0 ,

$$c_n^{(0)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} b_{\mu+1} (1-z) \frac{\Phi^{(k)}(0)}{k!} (1-z') \varphi_0\left(\frac{1}{z}\right) z^{n-1+\mu+k} dz,$$

$|\varepsilon|, |\varepsilon'|$ étant aussi petits qu'on veut. On en conclut

$$c_n^{(0)} = \frac{\Phi^{(k)}(0)}{k!} b_\mu b_{n+\mu+k}, \quad k \text{ étant fini et } \neq 0.$$

Il suffira donc que $\Phi^{(k)}(0)$ soit transcendant pour que $c_n^{(0)}$ le soit. Or

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \varphi_1\left(\frac{1}{z-a_1}\right), \\ \Phi'(z) &= \left(\frac{1}{z-a_1}\right)^2 \varphi_1'\left(\frac{1}{z-a_1}\right), \\ \Phi''(z) &= \varphi_1''\left(\frac{1}{z-a_1}\right) \left(\frac{1}{z-a_1}\right)^3 + 2 \varphi_1'\left(\frac{1}{z-a_1}\right) \left(\frac{1}{z-a_1}\right)^3, \\ &\dots\dots\dots \\ \Phi^{(k)}(z) &= \varphi_1^{(k)}\left(\frac{1}{z-a_1}\right) P_k^k + \varphi_1^{(k-1)}\left(\frac{1}{z-a_1}\right) P_{k-1}^k + \dots \end{aligned}$$

$P_k^k, P_{k-1}^{k-1}, \dots$ étant des polynômes en $\frac{1}{z-a_1}$ de degré limité en $\frac{1}{z-a_1}$ au numérateur et au dénominateur.

Or

$$\varphi_1 \left(\frac{1}{z-a_1} \right) = \sum_0^{\infty} \frac{b_n^{(1)}}{(z-a_1)^n},$$

.....,

$$\varphi_1^k \left(\frac{1}{z-a_1} \right) = \sum_0^{\infty} \frac{b_n^{(1)} n(n+1) \dots (n+k-1)}{(z-a_1)^{n+k}}.$$

Alors

$$\begin{aligned} \Phi^{(k)}(0) &= \varphi_1^{(k)} \left(-\frac{1}{a_1} \right) P_k^k \left(-\frac{1}{a_1} \right) \dots \dots = \sum_0^{\infty} \frac{b_n^{(1)}}{(-a_1)^n} P_0^k \left(-\frac{1}{a_1} \right) + \dots \\ &+ \sum_0^{\infty} \frac{b_n^{(1)} n(n+1) \dots (n+k-1)}{(-a_1)^{n+k}} P_k^k \left(-\frac{1}{a_1} \right) = \sum_0^{\infty} b_n^{(1)} Q_n^k(a_1). \end{aligned}$$

Or

$$P_k^k = \left(\frac{1}{z-a_1} \right)^{2k} = \frac{1}{a_1^{2k}},$$

qui est $\neq 0$.

Pour les valeurs de n qui dépassent une limite assez grande, $\Phi^{(k)}(0)$ est de la forme

$$\sum \frac{b_n^{(1)}}{(-a_1)^{n+k}} P_k^k \left(-\frac{1}{a_1} \right) n^k (1 - \varepsilon_n) = \sum \frac{b_n^{(1)}}{(-a_1)^{3k+n}} n^k (1 + \varepsilon_n),$$

ε_n étant aussi petit qu'on veut, pourvu que n soit assez grand, mais étant rationnel quel que soit n . Le coefficient de $b_n^{(1)}$ est donc $\neq 0$ dès que n dépasse une certaine limite.

D'après ce que nous avons vu dans la démonstration du théorème I, si $b_n^{(1)} = \frac{s_n^{(1)}}{t_n^{(1)}}$ avec $|s_n^{(1)}| < \sigma_n^{(1)}$, et si $\sigma_n^{(1)}$ est limité en fonction de n , pour un mode de croissance suffisamment rapide de $t_n^{(1)}$ avec n , $\Phi^{(k)}(0)$ est de la forme γ_q et, par suite, est transcendant ainsi que $c_n^{(0)}$.

Nous en concluons finalement le théorème annoncé, sans même chercher à étudier la nature des c_n et $c_n^{(1)}$. C. Q. F. D.

Remarque. — On peut abrégier la démonstration en s'appuyant sur cette propriété des fonctions quasi algébriques à coefficients

rationnels : $\varphi_1 \left(-\frac{1}{a_1} \right)$ est transcendant, par suite $\neq 0$, quand a_1 est rationnel; il en résulte de suite $k \neq 0$.

Nous allons maintenant chercher à montrer que les équations $F(z) = a$ à coefficients rationnels comme a [$F(z)$ étant de la même forme qu'au théorème III, mais les c_n, c_n^0, c_n^1 étant rationnels] ne possèdent aucune racine algébrique ou encore que $F(\zeta)$ est transcendant quand ζ est algébrique, pourvu que les c_n, c_n^0, c_n^1 soient rationnels et que les t_n, t_n^0, t_n^1 satisfassent à des conditions semblables de croissance (1).

THÉORÈME IV. — *Soit la fonction quasi entière*

$$F(z) = \sum_0^{\infty} c_n x^{\pi_n} = \sum_0^{\infty} \frac{c_n^0}{x^{\pi_n^0}} + \sum_0^{\infty} \frac{c_n^1}{(x - a_1)^{\pi_n^1}},$$

à coefficients rationnels $\neq 0$ ainsi que a (les π étant entiers),

$$c_n = \frac{s_n}{t_n}, \quad c_n^0 = \frac{s_n^0}{t_n^0}, \quad c_n^1 = \frac{s_n^1}{t_n^1},$$

avec

$$|s_n| \leq \tau_n, \quad |s_n^0| \leq \tau_n^0, \quad |s_n^1| \leq \tau_n^1.$$

Les $\tau_n, \tau_n^0, \tau_n^1$ étant donnés, on peut toujours, pour toutes les fonctions F où les s satisfont aux conditions ci-dessous, choisir un même mode de croissance assez rapide de t_n, t_n^0, t_n^1 pour que les fonctions F n'aient aucune racine algébrique; autrement dit, pour que $F(\zeta)$ soit transcendant dès que ζ est algébrique (2).

En effet, soit $F(\zeta)$ racine d'une équation algébrique irréductible

$$\Phi = A_0 + A_1 x + \dots + A_{n_1} x^{n_1} = 0,$$

(1) La fonction $F(z)$ du théorème III ne possède évidemment aucune racine algébrique, puisque aucune des trois fonctions dont elle est le produit n'en possède.

(2) Un théorème similaire a été établi par nous pour les fonctions entières dans un autre Mémoire (*Acta mathematica*, 1900).

à coefficients entiers, ζ étant algébrique et racine d'une équation algébrique irréductible à coefficients entiers

$$Y^v = B_0 + B_1 X + \dots + B_v X^v = 0,$$

$$(5) \quad [A_0], \dots, [A_{n_1}], [B_0], \dots, [B_v], [\zeta^v],$$

n_1, v étant au plus égaux à une fonction A_n du nombre n arbitraire, mais qui croît au moins aussi vite que le nombre n .

Supposons encore qu'en changeant la notation on ait

$$F(\varepsilon) = \sum_0^\infty c_n x^{\overline{\tau}_n} = \sum_0^\infty \frac{c_n^{(0)}}{x^{\overline{\tau}_n^{(0)}}} = \sum_0^\infty \frac{c_n^{(1)}}{\alpha_1 x^{\overline{\tau}_n^{(1)}}},$$

les $c_n, c_n^{(0)}, c_n^{(1)}$ étant ici tous $\neq 0$, les $\overline{\tau}_n, \overline{\tau}_n^{(0)}, \overline{\tau}_n^{(1)}$ entiers et α_1 étant un nombre rationnel quelconque dont le numérateur et le dénominateur sont limités et $\leq n$.

Posons encore

$$F_n(\varepsilon) = \sum_0^n c_n x^{\overline{\tau}_n} = \sum_0^n \frac{c_n^{(0)}}{x^{\overline{\tau}_n^{(0)}}} = \sum_0^n \frac{c_n^{(1)}}{\alpha_1 x^{\overline{\tau}_n^{(1)}}}.$$

Enfin supposons $\tau_n, \tau_n^{(0)}, \tau_n^{(1)}$ constamment croissants avec n et $\leq A_n$. Soient enfin

$$F_n(\zeta) = F_n, \quad F(\zeta) = F_n + \varepsilon_n.$$

Si le mode de décroissance des $c_n, c_n^{(0)}, c_n^{(1)}$ est suffisamment rapide, on aura toujours

$$|\varepsilon_n| < E_n,$$

E_n étant la plus grande des quantités

$$6 |c_{n+1}| A_n^{\overline{\tau}_n}, \quad 6 |c_{n+1}^{(0)}| A_n^{\overline{\tau}_{n+1}^{(0)}}, \quad 6 |c_{n+1}^{(1)}| A_n^{\overline{\tau}_{n+1}^{(1)}}.$$

Considérons alors

$$(6) \quad \Phi(F_n + \varepsilon_n) = 0 = \Phi(F_n) + \varepsilon_n M.$$

On peut toujours prendre n assez grand et $c_{n+1}, c_{n+1}^{(0)}, c_{n+1}^{(1)}$ assez

petits pour que $|\varepsilon_n|$ soit plus petit que la demi-différence entre deux racines de toutes les équations irréductibles $\Phi = 0$ satisfaisant aux conditions (5). M est alors ici limité inférieurement en fonction de $A_0, A_1, \dots, A_{n_1}$, par suite de n_1 . On aura

$$|\varepsilon_n M| = |\Phi(F_n)|, \\ (7) \quad \varepsilon_{n+1} = \frac{\Phi(F_n)}{M},$$

et

$$\Phi(F_n) \neq 0.$$

Considérons toutes les valeurs de $\Phi(F_n)$ correspondant aux valeurs de ξ , des A , des B , de n et τ satisfaisant à (5) et aux diverses valeurs des s aux τ correspondants. Leur nombre est limité en fonction de n . $\Phi(F_n)$ a donc en fonction de n une limite inférieure qui ne dépend que de $c_0, c_1, \dots, c_n, c_0^{(0)}, \dots, c_n^{(0)}, c_0^{(1)}, \dots, c_n^{(1)}, a_1$, des ϖ et de A_n . Finalement, le mode de croissance des $s_i, s_i^{(0)}, s_i^{(1)}, t_i, t_i^{(0)}, t_i^{(1)}$ étant donné jusqu'à l'indice n , $\Phi(F_n)$ a une limite inférieure fonction de n pour toutes les valeurs des $s_i^{(j)} \leq \tau_i^{(j)}$; $|\varepsilon_n|$ peut être pris aussi petit qu'on veut pourvu que $c_{n+1}, c_{n+1}^{(0)}, c_{n+1}^{(1)}$ soient suffisamment petits, c'est-à-dire assez petits pour que (7) soit impossible, par suite (6).

Supposons maintenant donné le mode de croissance des τ . D'après ce qui précède, on peut toujours déterminer un mode de croissance des $t_i, t_i^{(0)}, t_i^{(1)}$ suffisamment rapide pour que, dès que n est assez grand, le raisonnement ci-dessus soit applicable quels que soient Φ et Ψ supposés choisis *a priori*. Le théorème en résulte immédiatement.

C. Q. F. D.

Enfin, soit b rationnel; si

$$F(z) = b + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n = b + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n''}{(z-b)^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n'}{(b-c_1-z)^n} \\ = f(z-b) + f_0\left(\frac{1}{z-b}\right) + f_1\left(\frac{1}{z-b-c_1}\right),$$

on a

$$f(z-b) = f(b) + \frac{z}{1} f'(b) + \frac{z^2}{1.2} f''(b) + \dots \\ f^{(k)}(b) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n b^{n-k} \quad (n = 1, \dots, n = k-1).$$

Les coefficients de $f(z + b)$ développé suivant les puissances croissantes de z sont encore tous transcendants.

En résumé, nous trouvons ici en défaut pour les fonctions quasi entières les propriétés essentielles des polynomes à coefficients entiers que nous avons signalées dans le § I.

IV.

Soit

$$F(z) = \sum_0^{\infty} c_n x^{\tau_n} = c_0 + c_1 x^{\tau_1} + \dots = 0$$

une équation quasi algébrique à coefficients rationnels : si le mode de croissance des c_n est suffisamment rapide, toute racine de

$$F_n(z) = 0 = \sum_0^n c_n x^{\tau_n}$$

est très voisine d'une racine correspondante de F . Dès lors, on peut penser à tirer parti de cette remarque pour l'étude du développement en fraction continue des racines de $F(z)$. Nous allons établir la propriété suivante :

THÉORÈME V. — *Soit la fraction continue*

$$Z = a_0 + \frac{1}{a_1 + \dots + \frac{1}{a_n + \dots}}$$

où, sur h quotients incomplets consécutifs, il y en a toujours un au moins qui croît au delà de toute limite et suffisamment vite quand son indice augmente indéfiniment, les autres restant limités.

On peut déterminer une équation à coefficients rationnels de la forme

$$1 + \sum_0^n c_n x^n = 0$$

ayant Z pour racine; les c_n décroîtront aussi vite et leurs numérateurs croîtront aussi vite que l'on voudra, pourvu que la

croissance des quotients incomplets ci-dessus soit assez rapide.

Enfin, si la croissance de ces quotients est assez rapide, $\mathbb{Z}$ n'est pas algébrique; l'ensemble des fractions $\mathbb{Z}$ non algébrique a la puissance du continu et est distinct de l'ensemble analogue des nombres transcendants racines des équations quasi algébriques

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{t_n} x^n = 0$$

où $|a_n|$ entier limité, t_n entier croissant suffisamment vite avec n .

En effet, considérons l'équation

$$F_1(x) = 1 + c_1 x = 0$$

en supposant $c_0 = 1$: F_1 a la racine ⁽¹⁾

$$x = -\frac{1}{c_1} = \frac{p_1}{q_1}.$$

Soit

$$F_2(x) = 1 + c_1 x + c_2 x^2 = 0;$$

F_2 aura une racine $\frac{p_2}{q_2}$ rationnelle si l'on détermine c_2 par la condition

$$F_2\left(\frac{p_2}{q_2}\right) = 0,$$

$$c_2 = -\frac{1 + c_1 \frac{p_2}{q_2}}{\left(\frac{p_2}{q_2}\right)^2} = -\frac{1 + \frac{q_1}{p_1} \frac{p_2}{q_2}}{\left(\frac{p_2}{q_2}\right)^2} = -\frac{p_1 q_2 + q_1 p_2}{p_1 q_2 \left(\frac{p_2}{q_2}\right)^2};$$

c_2 sera aussi petit qu'on veut pourvu que $\frac{p_1}{q_1} - \frac{p_2}{q_2}$ le soit, car

$$c_2 = -\frac{\frac{p_1}{q_1} - \frac{p_2}{q_2}}{\frac{p_1}{q_1} \left(\frac{p_2}{q_2}\right)^2}.$$

Nous poserons $p_1 q_2 - p_2 q_1 = \varepsilon_1$ ($|\varepsilon_1|$ entier $\leq A$, A étant limité), ce qui est toujours possible pour des valeurs de p_2 et q_2 aussi grandes qu'on veut si p_1, q_1 sont premiers entre eux deux

⁽¹⁾ $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \dots, \frac{p_n}{q_n}, \dots$ sont, dans ce qui suit, des fractions irréductibles.

à deux. Les développements en fraction continue de $\frac{P_1}{q_1}, \frac{P_2}{q_2}$ sont d'ailleurs limités. On déterminera de la même manière $c_3, c_4, \dots$ de façon que

$$F_k(x) = 1 + c_1 x + \dots + c_k x^k$$

ait une racine $\frac{P_k}{q_k}$ rationnelle aussi voisine qu'on veut de $\frac{P_{k-1}}{q_{k-1}}$ avec

$$P_{k-1} q_k - P_k q_{k-1} = \varepsilon_{k-1},$$

q_k étant aussi grand qu'on veut par rapport à q_{k-1} .

Considérons

$$F_{k+1}(x) = 1 + c_1 x + \dots + c_{k+1} x^{k+1} + \alpha$$

qui a pour racine $\frac{P_{k+1}}{q_{k+1}}$, et développons $\frac{P_{k+1}}{q_{k+1}}$ en fraction continue.

Nous supposons que $\frac{P_{k+1}}{q_{k+1}}$ possède tous les quotients incomplets de $\frac{P_k}{q_k}$. On a

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{P_k}{q_k} = \frac{P_{k+1}}{q_{k+1}} - \frac{P_k q_{k+1} - P_{k+1} q_k}{q_k q_{k+1}} = \frac{\varepsilon_k}{q_k q_{k+1}}, \\ \frac{P_k}{q_k} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_{n_k} + \frac{P'_k}{q'_k}}}}} \end{array} \right.$$

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{P_{k+1}}{q_{k+1}} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_{n_k} + \frac{P'_{n_k} y_{n_k}}{q'_{n_k} y_{n_k} - P'_{n_k-1}}}}} \\ \frac{P_k}{q_k} = \frac{P_{k+1}}{q_{k+1}} - \frac{P'_{n_k} (q'_{n_k} y_{n_k} - q'_{n_k-1})}{q'_{n_k} (q'_{n_k} y_{n_k} + q_{n_k-1})} = \frac{P_{n_k} q'_{n_k-1} - q'_{n_k} P'_{n_k-1}}{q'_{n_k} (q'_{n_k} y_{n_k} + q'_{n_k-1})} = \frac{1 - 1 y_{n_k-1}}{q'_{n_k} (q'_{n_k} y_{n_k} + q'_{n_k-1})}. \end{array} \right.$$

Pour que la différence $\frac{P_k}{q_k} - \frac{P_{k+1}}{q_{k+1}}$ soit aussi petite qu'on veut par rapport à q_k^{-1} , il faut que q_{k+1} puisse être pris aussi grand qu'on veut, par suite aussi y_{n_k} .

Soit

$$y_{n_k} = a_{n_k+1} + \frac{1}{a_{n_k+2} + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_{n_k+1}}}}.$$

Nous pourrions toujours déterminer c_{k+1} de façon que $F_{k+1}(x)$ ait pour racine $\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$. On aura

$$\begin{aligned} F_k \left(\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} \right) &= 1 + c_1 \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} + \dots + c_{k+1} \left(\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} \right)^{k+1} \\ &= F_k \left(\frac{p_k}{q_k} + \tau_i \right) + c_{k+1} \left(\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} \right)^{k+1} \\ &= \tau_i F'_k \left(\frac{p_k}{q_k} + \theta_1 \tau_i \right) = c_{k+1} \left(\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} \right)^{k+1}, \end{aligned}$$

si $\tau_i = \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} - \frac{p_k}{q_k}$.

τ_i étant aussi petit qu'on veut et $\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$ étant limité, c_{k+1} est aussi petit qu'on veut. La série

$$F = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$$

a donc des coefficients qui décroissent aussi vite qu'on veut; F_k a alors une racine $\frac{p_k}{q_k}$ différant d'aussi peu qu'on veut de $\frac{p_k}{q_k}$ et qui tend vers Z quand k croît indéfiniment, d'après un théorème connu (1).

Ici

$$c_{k+1} = - \left(\frac{q_{k+1}}{p_{k+1}} \right)^{k+1} F_k \left(\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} \right).$$

Le dénominateur de la quantité rationnelle $F_k \left(\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} \right)$ est de la forme

$$\gamma q_{k+1}^k,$$

et γ est limité en fonction de k . On peut toujours prendre q_{k+1} assez grand pour que c_{k+1} ait son numérateur aussi grand qu'on veut. Les séries

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$$

ainsi obtenues ne sont pas de la forme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{t_n} x^n$$

(1) *Comptes rendus*, 9 décembre 1901, et *Acta mathematica*, 1902.

$|a_n|$ étant un entier limité. Cela devait être, car nous avons vu ⁽¹⁾ que pour ces dernières le développement en fraction continue d'une racine a la croissance de ses quotients incomplets limités. L'ensemble obtenu diffère donc de l'ensemble des racines de ces équations; il a d'ailleurs aussi la puissance du continu, puisqu'on peut attribuer à chacun des quotients incomplets de Z au moins deux valeurs distinctes ⁽²⁾.

SUR UN GROUPE DE TRANSFORMATIONS;

Par M. E. GOURSAT.

1. Dans son Mémoire *Sur la transformation des fonctions abéliennes* (*Comptes rendus*, 1855) M. Hermite a considéré un groupe de substitutions linéaires, où figurent seize nombres entiers a_i, b_i, c_i, d_i ($i = 0, 1, 2, 3$), liées par les six relations

$$(1) \quad \begin{cases} a_0 d_3 + b_0 c_3 - c_0 b_3 - d_0 a_3 = 1, \\ a_1 d_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2 - d_1 a_2 = 1, \\ a_0 d_1 + b_0 c_1 - a_1 d_0 - b_1 c_0 = 0, \\ a_0 d_2 + b_0 c_2 - a_2 d_0 - b_2 c_0 = 0, \\ a_1 d_3 + b_1 c_3 - a_3 d_1 - b_3 c_1 = 0, \\ a_2 d_3 + b_2 c_3 - a_3 d_2 - b_3 c_2 = 0. \end{cases}$$

Ce même groupe joue un rôle important dans un grand nombre de travaux publiés depuis, par exemple dans le Mémoire de M. Picard *Sur les fonctions hyperabéliennes*, et dans les Mémoires de M. Humbert *Sur les fonctions abéliennes*. Quand on applique à une équation aux dérivées partielles du second ordre de Monge-Ampère une transformation de contact, on est conduit à considérer un groupe de substitutions linéaires, dont les coefficients ont exactement la même expression que ceux de M. Hermite, mais où a_i, b_i, c_i, d_i ne sont plus des nombres entiers. Il m'a semblé intéressant de signaler ce rapprochement entre deux parties, en apparence si éloignées, des Mathématiques.

⁽¹⁾ *Comptes rendus*, 15 avril 1901, et *Journal de Mathématiques*, 1901, p. 47.

⁽²⁾ BOREL, *Leçons sur la Théorie des fonctions*, p. 33.

C'est la forme même des conditions (1) qui a été le point de départ de cette remarque. Si, en effet, on pose, dans ces relations,

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{\partial X}{\partial x}, & b_0 &= \frac{\partial X}{\partial y}, & c_0 &= \frac{\partial X}{\partial q}, & d_0 &= \frac{\partial X}{\partial p}, \\ a_1 &= \frac{\partial Y}{\partial x}, & b_1 &= \frac{\partial Y}{\partial y}, & c_1 &= \frac{\partial Y}{\partial q}, & d_1 &= \frac{\partial Y}{\partial p}, \\ a_2 &= \frac{\partial Q}{\partial x}, & b_2 &= \frac{\partial Q}{\partial y}, & c_2 &= \frac{\partial Q}{\partial q}, & d_2 &= \frac{\partial Q}{\partial p}, \\ a_3 &= \frac{\partial P}{\partial x}, & b_3 &= \frac{\partial P}{\partial y}, & c_3 &= \frac{\partial P}{\partial q}, & d_3 &= \frac{\partial P}{\partial p}, \end{aligned}$$

X, Y, P, Q étant des fonctions des quatre variables x, y, p, q , elles deviennent

$$(2) \quad \begin{cases} (X, Y) = 0, & (X, Q) = 0, & (Y, P) = 0, & (P, Q) = 0, \\ (P, X) = 1, & (Q, Y) = 1, \end{cases}$$

la parenthèse (u, v) ayant la signification habituelle

$$(u, v) = \frac{\partial u}{\partial p} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial p} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial q} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial q} \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Ces conditions bien connues expriment que

$$P dX - Q dY - (p dx + q dy)$$

est une différentielle exacte ⁽¹⁾ $d\Omega$, et les formules

$$\begin{aligned} x' &= X(x, y, p, q), \\ y' &= Y(x, y, p, q), \\ p' &= P(x, y, p, q), \\ q' &= Q(x, y, p, q) \end{aligned}$$

définissent une transformation de contact en (x, p) .

2. Considérons maintenant une transformation de contact

⁽¹⁾ Voir, par exemple, mes *Leçons sur les équations aux dérivées partielles du premier ordre*, page 283.

générale définie par les formules

$$(3) \quad \begin{cases} x' = X(x, y, z, p, q), \\ y' = Y(x, y, z, p, q), \\ z' = Z(x, y, z, p, q), \\ p' = P(x, y, z, p, q), \\ q' = Q(x, y, z, p, q), \end{cases}$$

et posons

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dx} &= a_0, & \frac{dX}{dy} &= b_0, & \frac{\partial X}{\partial p} &= d_0, & \frac{\partial X}{\partial q} &= e_0, \\ \frac{dY}{dx} &= a_1, & \frac{dY}{dy} &= b_1, & \frac{\partial Y}{\partial p} &= d_1, & \frac{\partial Y}{\partial q} &= e_1, \\ \frac{dP}{dx} &= a_3, & \frac{dP}{dy} &= b_3, & \frac{\partial P}{\partial p} &= d_3, & \frac{\partial P}{\partial q} &= e_3, \\ \frac{dQ}{dx} &= a_2, & \frac{dQ}{dy} &= b_2, & \frac{\partial Q}{\partial p} &= d_2, & \frac{\partial Q}{\partial q} &= e_2, \end{aligned}$$

où

$$\frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} + P \frac{\partial}{\partial z}, \quad \frac{d}{dy} = \frac{\partial}{\partial y} + q \frac{\partial}{\partial z}.$$

Les formules (3) définissant une transformation de contact, on a l'identité

$$dZ = P dX + Q dY + z(dx + p dy + q dy).$$

z étant une fonction de x, y, z, p, q , et les conditions

$$\begin{aligned} [X, Y] &= 0, & [X, Q] &= 0, & [Y, P] &= 0, & [P, Q] &= 0, \\ [P, X] &= p, & [Q, Y] &= q, \end{aligned}$$

où $[u, v]$ représente le crochet jacobien

$$[u, v] = \frac{\partial u}{\partial p} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial p} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial q} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial q} \frac{\partial u}{\partial y},$$

peuvent s'écrire, avec une notation abrégée,

$$(4) \quad \begin{cases} (ad)_{01} + (bc)_{01} = 0, \\ (ad)_{02} + (bc)_{02} = 0, \\ (ad)_{13} + (bc)_{13} = 0, \\ (ad)_{23} + (bc)_{23} = 0, \\ (ad)_{03} + (bc)_{03} = (ad)_{12} + (bc)_{12} = z; \end{cases}$$

on a posé

$$\begin{aligned}(ad)_{ij} &= a_i d_j - a_j b_i, \\ (bc)_{ij} &= b_i c_j - b_j c_i,\end{aligned}$$

les indices i, j pouvant prendre les valeurs 0, 1, 2, 3. A ces relations on peut en ajouter d'autres de même forme, qui en sont des conséquences *algébriques*. Pour les obtenir facilement, posons, en désignant par u_1, u_2, u_3, u_4 quatre indéterminées,

$$(5) \quad \begin{cases} v_1 = d_3 u_1 + d_2 u_2 - d_0 u_3 - d_1 u_4, \\ v_2 = c_3 u_1 + c_2 u_2 - c_0 u_3 - c_1 u_4, \\ v_3 = a_3 u_1 + a_2 u_2 + a_0 u_3 + a_1 u_4, \\ v_4 = b_3 u_1 + b_2 u_2 + b_0 u_3 + b_1 u_4; \end{cases}$$

on en tire, en les ajoutant après les avoir multipliées respectivement par a_i, b_i, d_i, c_i ($i = 0, 1, 2, 3$), et en tenant compte des formules (4),

$$\begin{aligned}\rho u_1 &= a_0 v_1 + b_0 v_2 + c_0 v_3 + d_0 v_4, \\ \rho u_2 &= a_1 v_1 + b_1 v_2 + c_1 v_3 + d_1 v_4, \\ \rho u_3 &= a_2 v_1 + b_2 v_2 + c_2 v_3 + d_2 v_4, \\ \rho u_4 &= a_3 v_1 + b_3 v_2 + c_3 v_3 + d_3 v_4.\end{aligned}$$

En remplaçant u_1, u_2, u_3, u_4 par les valeurs précédentes dans les formules (5), on doit évidemment être conduit à des identités, puisque v_1, v_2, v_3, v_4 sont arbitraires comme u_1, u_2, u_3, u_4 . En écrivant qu'il en est ainsi, on est conduit aux relations

$$\begin{aligned}(ad)_{03} - (ad)_{12} &= \rho, & (bd)_{03} - (bd)_{12} &= 0, & (cd)_{03} - (cd)_{12} &= 0, \\ (ac)_{03} - (ac)_{12} &= 0, & (bc)_{03} - (bc)_{12} &= \rho, & (dc)_{03} - (dc)_{12} &= 0, \\ (ab)_{03} + (ab)_{12} &= 0, & (ac)_{03} + (ac)_{12} &= 0, & (ad)_{03} + (ad)_{12} &= \rho, \\ (ab)_{03} - (ab)_{12} &= 0, & (bc)_{03} + (bc)_{12} &= \rho, & (bd)_{03} + (bd)_{12} &= 0.\end{aligned}$$

qui se réduisent à six :

$$(6) \quad \begin{cases} (ac)_{03} - (ac)_{12} = 0, \\ (bd)_{03} + (bd)_{12} = 0, \\ (cd)_{03} + (cd)_{12} = 0, \\ (ab)_{03} + (ab)_{12} = 0, \\ (ad)_{03} + (ad)_{12} = (bc)_{03} - (bc)_{12} = \rho, \end{cases}$$

les expressions $(ac)_{ij}$, $(cd)_{ij}$, $(bd)_{ij}$, $(ab)_{ij}$ se définissant comme $(ad)_{ij}$ et $(bc)_{ij}$.

Les relations (6) sont absolument équivalentes aux relations (4) et, en les comparant, on en déduit que l'on a

$$(7) \quad (ad)_{12} = (bc)_{01}, \quad (ad)_{03} = (bc)_{12}.$$

3. Calculons encore les formules qui définissent la transformation de contact prolongée (3), en nous bornant aux éléments du second ordre. Lorsque l'élément (x, y, z, p, q) décrit une multiplicité M_2 , ayant pour support ponctuel une surface S , l'élément (X, Y, Z, P, Q) décrit également une multiplicité M'_2 , et nous supposons que M'_2 a pour support ponctuel une autre surface Σ . Soient

$$(8) \quad z = f(x, y)$$

l'équation de la surface (S) et

$$(9) \quad Z = F(X, Y)$$

l'équation de la surface Σ . Nous poserons

$$\begin{aligned} r &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, & s &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, & t &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \\ R &= \frac{\partial^2 F}{\partial X^2}, & S &= \frac{\partial^2 F}{\partial X \partial Y}, & T &= \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2}; \end{aligned}$$

pour prolonger la transformation (3), il s'agit de calculer R, S, T au moyen de x, y, z, p, q, r, s, t . Ces quantités se déduisent des deux relations

$$(10) \quad dP = R dX + S dY, \quad dQ = S dX + T dY,$$

qui deviennent, en développant les différentielles dX, dY, dP, dQ , et employant la notation convenue pour les dérivées partielles,

$$\begin{aligned} & a_3 dx + b_3 dy + d_3(r dx + s dy) + c_3(s dx + t dy) \\ &= R[a_0 dx + b_0 dy + d_0(r dx + s dy) + c_0(s dx + t dy)] \\ &+ S[a_1 dx + b_1 dy + d_1(r dx + s dy) + c_1(s dx + t dy)], \\ & a_2 dx + b_2 dy + d_2(r dx + s dy) + c_2(s dx + t dy) \\ &= S[a_0 dx + b_0 dy + d_0(r dx + s dy) + c_0(s dx + t dy)] \\ &+ T[a_1 dx + b_1 dy + d_1(r dx + s dy) + c_1(s dx + t dy)]. \end{aligned}$$

En égalant les coefficients de dx et de dy dans les deux membres, on parvient aux quatre égalités

$$(11) \quad \begin{cases} R(a_0 - d_0 r - c_0 s) - S(a_1 - d_1 r - c_1 s) = a_3 - d_3 r - c_3 s, \\ R(b_0 - d_0 s - c_0 t) - S(b_1 - d_1 s - c_1 t) = b_3 - d_3 s - c_3 t. \end{cases}$$

$$(12) \quad \begin{cases} S(a_0 - d_0 r - c_0 s) - T(a_1 - d_1 r - c_1 s) = a_2 - d_2 r - c_2 s, \\ S(b_0 - d_0 s - c_0 t) - T(b_1 - d_1 s - c_1 t) = b_2 - d_2 s - c_2 t. \end{cases}$$

Des deux premières formules (11) on tire

$$(13) \quad R = \frac{(ab)_{31} - (db)_{31}r - (ac)_{31}t - [(ad)_{13} - (cb)_{31}]s + (dc)_{31}(rt - s^2)}{(ab)_{01} - (db)_{01}r - (ac)_{01}t - [(ad)_{01} - (cb)_{01}]s + (dc)_{01}(rt - s^2)},$$

$$(14) \quad S = \frac{(ab)_{03} - (db)_{03}r - (ac)_{03}t - [(ad)_{03} - (cb)_{03}]s + (dc)_{03}(rt - s^2)}{(ab)_{01} - (db)_{01}r - (ac)_{01}t - [(ad)_{01} - (cb)_{01}]s + (dc)_{01}(rt - s^2)},$$

des formules (12) on tire de même

$$(14)^{bis} \quad S = \frac{(ab)_{21} - (db)_{21}r - (ac)_{21}t - [(ad)_{21} - (cb)_{21}]s + (dc)_{21}(rt - s^2)}{(ab)_{01} - (db)_{01}r - (ac)_{01}t - [(ad)_{01} - (cb)_{01}]s + (dc)_{01}(rt - s^2)},$$

$$(15) \quad T = \frac{(ab)_{02} - (db)_{02}r - (ac)_{02}t - [(ad)_{02} - (cb)_{02}]s + (dc)_{02}(rt - s^2)}{(ab)_{01} - (db)_{01}r - (ac)_{01}t - [(ad)_{01} - (cb)_{01}]s + (dc)_{01}(rt - s^2)},$$

les valeurs de S fournies par les formules (14) et (14)^{bis} sont identiques en tenant compte des relations (6) et (7).

Des formules (11) et (12) on tire également

$$(16) \quad RT - S^2 = \frac{(ab)_{32} - (db)_{32}r - (ac)_{32}t - [(cb)_{32} - (ad)_{32}]s + (dc)_{32}(rt - s^2)}{(ab)_{01} - (db)_{01}r - (ac)_{01}t - [(cb)_{01} - (ad)_{01}]s + (dc)_{01}(rt - s^2)}.$$

On pourrait aussi inversement résoudre les équations (11) et (12) par rapport à r, s, t . Observons pour cela qu'on peut les écrire

$$(11)^{bis} \quad \begin{cases} r(d_1 - d_0 R - d_1 S) - s(c_1 - c_0 R - c_1 S) = -a_3 + a_0 R + a_1 S, \\ r(d_2 - d_0 S - d_1 T) - s(c_2 - c_0 S - c_1 T) = -a_2 + a_0 S + a_1 T, \end{cases}$$

$$(12)^{bis} \quad \begin{cases} s(d_3 - d_0 R - d_1 S) - t(c_3 - c_0 R - c_1 S) = -b_3 + b_0 R + b_1 S, \\ s(d_2 - d_0 S - d_1 T) - t(c_2 - c_0 S - c_1 T) = -b_2 + b_0 S + b_1 T; \end{cases}$$

on peut les déduire des formules (11) et (12) en permutant r et R , s et S , t et T , a_0 et $-d_3$, c_0 et d_1 , a_1 et $-c_3$, b_0 et $-d_2$, b_1 et $-c_2$, b_3 et a_2 , sans changer les lettres a_3 , b_2 , c_1 , d_0 . On obtiendra donc $r, s, t, rt - s^2$ en fonction de $R, S, T, RT - S^2$ en effectuant les mêmes permutations dans les formules (13), (14), (15) et (16).

Les transformations de contact formant un groupe, il est clair que les substitutions définies par les formules (13) à (16), où les coefficients a_i, b_i, c_i, d_i sont des quantités quelconques, vérifiant les relations (4), forment également un groupe (*).

4. Étant donnée une équation de Monge-Ampère

$$(17) \quad u'_1(r't' - s'^2) + u'_2r' + u'_3t' - u'_4 - u'_5s' = 0,$$

dont les coefficients sont des fonctions de x', y', z', p', q' , si on lui applique la transformation de contact définie par les formules (3), elle se change en une équation de même forme

$$(18) \quad u_1(rt - s^2) + u_2r + u_3t - u_4 - u_5s = 0,$$

dont les coefficients s'exprimeront au moyen de $u'_1, u'_2, u'_3, u'_4, u'_5$ par les formules suivantes :

$$(19) \quad \begin{cases} u_1 = (dc)_{32}u'_1 - (dc)_{31}u'_2 - (dc)_{02}u'_3 - (dc)_{01}u'_4 - (dc)_{03}u'_5, \\ u_2 = (db)_{32}u'_1 - (db)_{31}u'_2 - (db)_{02}u'_3 - (db)_{01}u'_4 - (db)_{03}u'_5, \\ u_3 = (ac)_{32}u'_1 - (ac)_{31}u'_2 - (ac)_{02}u'_3 - (ac)_{01}u'_4 - (ac)_{03}u'_5, \\ u_4 = (ab)_{32}u'_1 - (ab)_{31}u'_2 - (ab)_{02}u'_3 - (ab)_{01}u'_4 - (ab)_{03}u'_5, \\ u_5 = 2(ad)_{12}u'_1 + 2(ad)_{31}u'_2 - 2(ad)_{02}u'_3 + 2(ad)_{01}u'_4 - (ad)_{03} + (cb)_{03} \} u'_5. \end{cases}$$

Les substitutions linéaires définies par ces formules (19) forment encore un groupe pour lequel

$$u_5^2 = 4u_2u_3 + 4u_1u_4$$

(*) Pour retrouver le groupe de transformations considéré par M. Hermite, il suffit de changer, dans les formules (13 à 16), r en G , s en H , t en G' , R en G_1 , S en H_1 , T en G'_1 , et de permuter en outre les coefficients a_i, b_i, c_i, d_i de telle façon que les lignes du Tableau

$$\begin{array}{cccc} a_0 & b_0 & d_0 & c_1 \\ a_1 & b_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 & c_1 \\ a_3 & b_3 & d_3 & c_2 \end{array} \quad ,$$

se changent en colonnes et *vice versa*, ce qui remplace les relations (*) par les relations équivalentes (6).

est un invariant; on vérifie en effet que l'on a

$$(20) \quad u_{xx} = \{u_2 u_1 + \{u_1 u_3 = \varphi^2\} u_3^2 - 4u_2' u_3' + 4u_1' u_3'\}.$$

Ce résultat s'explique aisément *a priori* puisque la relation

$$u_3^2 - 4u_2' u_3' + 4u_1' u_3' = 0$$

exprime que les deux systèmes de caractéristiques de l'équation (17) sont confondus. Si l'on suppose $\varphi = 1$, le groupe (19) est identique au groupe formé par les substitutions linéaires qui reproduisent une forme quadratique.

Parmi les covariants que l'on peut associer à l'équation du second ordre, il en est un de très simple qui a une signification intéressante, c'est l'expression

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} W(\varphi, \psi) &= u_1 \left(\frac{d\varphi}{dx} \frac{d\psi}{dy} - \frac{d\varphi}{dy} \frac{d\psi}{dx} \right) + u_2 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial q} \frac{d\psi}{dx} - \frac{\partial\psi}{\partial q} \frac{d\varphi}{dx} \right) \\ &- u_3 \left(\frac{d\varphi}{dx} \frac{\partial\psi}{\partial p} - \frac{d\psi}{dy} \frac{\partial\varphi}{\partial p} \right) + u_4 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial p} \frac{\partial\psi}{\partial q} - \frac{\partial\psi}{\partial p} \frac{\partial\varphi}{\partial q} \right) \\ &- \frac{u_5}{2} \left(\frac{d\varphi}{dx} \frac{\partial\psi}{\partial p} + \frac{d\psi}{dx} \frac{\partial\varphi}{\partial p} + \frac{\partial\varphi}{\partial q} \frac{d\psi}{dy} + \frac{\partial\psi}{\partial q} \frac{d\varphi}{dy} \right), \end{aligned} \right.$$

où φ et ψ sont des fonctions quelconques de x, y, z, p, q . Si l'on cherche à quelles conditions doivent satisfaire les deux fonctions $\varphi(x, y, z, p, q)$ et $\psi(x, y, z, p, q)$ pour que les deux équations

$$(22) \quad \varphi(x, y, z, p, q) = a, \quad \psi(x, y, z, p, q) = b,$$

où a et b sont deux constantes arbitraires, forment un système complètement intégrable, dont toutes les intégrales vérifient l'équation du second ordre (17), on trouve qu'il faut et il suffit que l'on ait

$$[\varphi, \psi] = 0, \quad W(\varphi, \psi) = 0.$$

5. La méthode suivie plus haut, pour prouver que les deux systèmes de relations (4) et (6) sont équivalents, peut se généraliser aisément. Considérons un système de $4n^2$ quantités

$$A_i^h, \quad B_i^h, \quad C_i^h, \quad D_i^h \quad (i, h = 1, 2, \dots, n)$$

satisfaisant aux relations

$$(23) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_i (A_i^k C_i^h - A_i^h C_i^k) &= 0, \\ \sum_i (B_i^k D_i^h - B_i^h D_i^k) &= 0, \\ \sum_i (A_i^k D_i^h - B_i^h C_i^k) &= 0, \quad h \neq k, \\ \sum_i (A_i^h D_i^h - B_i^h C_i^h) &= \rho. \end{aligned} \right.$$

les indices h et k étant constants dans toutes les sommations indiquées. Soient $u_1, u_2, \dots, u_n, v_1, v_2, \dots, v_n$ un système de $2n$ indéterminées auxiliaires; posons

$$(24) \quad \left\{ \begin{aligned} \rho U_1 &= A_1^1 u_1 + \dots + A_1^h u_h + \dots + A_1^n u_n + B_1^1 v_1 + \dots + B_1^n v_n, \\ \rho U_i &= A_i^1 u_1 + \dots + A_i^h u_h + \dots + A_i^n u_n + B_i^1 v_1 + \dots + B_i^n v_n, \\ \rho U_n &= A_n^1 u_1 + \dots + A_n^h u_h + \dots + A_n^n u_n + B_n^1 v_1 + \dots + B_n^n v_n. \end{aligned} \right.$$

$$(25) \quad \left\{ \begin{aligned} \rho V_1 &= C_1^1 u_1 + \dots + C_1^h u_h + \dots + C_1^n u_n + D_1^1 v_1 + \dots + D_1^n v_n, \\ \rho V_i &= C_i^1 u_1 + \dots + C_i^h u_h + \dots + C_i^n u_n + D_i^1 v_1 + \dots + D_i^n v_n, \\ \rho V_n &= C_n^1 u_1 + \dots + C_n^h u_h + \dots + C_n^n u_n + D_n^1 v_1 + \dots + D_n^n v_n. \end{aligned} \right.$$

On déduit de ces formules, en tenant compte des relations (23),

$$(26) \quad \left\{ \begin{aligned} u_h &= D_1^h U_1 + \dots + D_n^h U_n - B_1^h V_1 - \dots - B_n^h V_n, \\ v_h &= A_1^h V_1 - \dots - A_n^h V_n - C_1^h U_1 - \dots - C_n^h U_n \\ &\quad (h = 1, 2, \dots, n); \end{aligned} \right.$$

en substituant ces expressions de u_h et de v_h dans les formules (24) et en observant que U_i et V_k sont des quantités arbi-

traires, comme u_i et v_k , on est conduit aux relations

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_h (A_i^h B_h^h - A_h^h B_i^h) = 0, \\ \sum_h (C_i^h B_h^h - C_h^h B_i^h) = 0, \\ \sum_h (A_h^h D_i^h - B_h^h C_i^h) = 0, \quad h \neq i, \\ \sum_h (A_i^h D_i^h - B_i^h C_i^h) = \varphi, \end{array} \right.$$

l'indice h étant le seul qui varie dans les sommations indiquées.

On rencontre des systèmes de relations de la forme précédente dans la théorie générale des transformations de contact. Soient $Z, X_1, X_2, \dots, X_n, P_1, P_2, \dots, P_n, 2n+1$ fonctions des $2n+1$ variables indépendantes $z, x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n$ telles que l'on ait identiquement

$$(28) \quad dZ = P_1 dX_1 + \dots + P_n dX_n + \varphi (dz - p_1 dx_1 - \dots - p_n dx_n),$$

où φ est une fonction de $z, x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n$. Cette relation (28) est équivalente à $2n+1$ relations distinctes que l'on peut écrire

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial Z}{\partial z} = P_1 \frac{\partial X_1}{\partial z} + \dots + P_n \frac{\partial X_n}{\partial z} = \varphi, \\ \frac{dZ}{dx_h} = \sum_i P_i \frac{\partial X_i}{\partial x_h} \\ \frac{\partial Z}{\partial p_h} = \sum_i P_i \frac{\partial X_i}{\partial p_h} \end{array} \right. \quad (h = 1, 2, \dots, n).$$

Si l'on regarde dans ces formules Z comme une fonction inconnue, les conditions d'intégrabilité conduisent à des relations que l'on peut mettre sous la forme (23) en posant

$$\begin{aligned} A_i^h &= \frac{\partial X_i}{\partial x_h}, & B_i^h &= \frac{\partial X_i}{\partial p_h}, \\ C_i^h &= \frac{\partial P_i}{\partial x_h}, & D_i^h &= \frac{\partial P_i}{\partial p_h}. \end{aligned}$$

Les relations équivalentes (27) sont précisément les relations bien connues

$$\begin{aligned} [X_i, X_k] &= 0, & [P_i, P_k] &= 0, & [P_i, X_k] &= 0 & (i \neq k), \\ [P_i, X_i] &= \rho, \end{aligned}$$

qui se trouvent ainsi établies d'une façon très naturelle.

SUR LE GENRE DES FONCTIONS ENTIÈRES :

Par M. EUGÈNE FABRY.

1. Soit

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + \dots$$

une fonction entière de genre fini. On sait que $\frac{\log |c_n|}{n}$ tend vers 0, et que $\frac{\log |c_n|}{n \log n}$ a une limite supérieure négative, lorsque n devient infini: soit $-\frac{1}{\rho}$ cette plus grande limite. De sorte que, quel que soit ε , on aura $\sqrt[n]{|c_n|} \leq n^{\varepsilon - \frac{1}{\rho}}$ à partir d'une valeur déterminée de n , et $\sqrt[n]{|c_n|} > n^{\varepsilon - \frac{1}{\rho}}$ pour une infinité de valeurs de n . Le genre de la fonction $f(x)$ dépend, en général, de l'ordre de grandeur des coefficients c_n . Si ρ n'est pas entier, $f(x)$ est d'ordre ρ et son genre est le nombre entier p immédiatement inférieur à ρ , c'est-à-dire que la fonction peut se mettre sous la forme

$$f(x) = e^{G(x)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{a_n}\right) e^{\frac{x}{a_n} + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{a_n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{p} \left(\frac{x}{a_n}\right)^p}$$

où G est un polynôme de degré au plus égal à p .

Si ρ est un nombre entier, et si $n^{\frac{1}{\rho}} \sqrt[n]{|c_n|}$ ne tends pas vers 0, la fonction est de genre ρ . Mais si $n^{\frac{1}{\rho}} \sqrt[n]{|c_n|}$ tend vers 0, le genre peut être ρ ou $\rho - 1$.

Dans un important Mémoire, publié récemment (*Acta Societatis scientiarum fennicae*, t. XXXI), M. Lindelöf s'est proposé de préciser la détermination du genre d'une fonction entière donnée par son développement en série. Il cherche si, lorsque ρ est en-

tier, $n^{\frac{1}{p}} \sqrt[p]{|c_n|}$ tendant vers 0, le genre, qui est ρ ou $\rho - 1$, ne serait pas lié à la convergence ou divergence de la série $\sum (\sqrt[p]{|c_n|})^2$, et il arrive à une conclusion négative en montrant qu'il existe d'une part des fonctions de genre ρ telles que $\sum (\sqrt[p]{|c_n|})^\rho$ soit une série convergente, d'autre part des fonctions telles que cette série soit divergente, et qui sont de genre $\rho - 1$. Cela montre bien que le genre ne dépend pas uniquement de l'ordre de grandeur des coefficients c_n , puisque, lorsque ρ n'est pas entier, le genre ρ augmente avec l'ordre de grandeur de $|c_n|$.

M. Lindelöf donne les exemples suivants :

1° La fonction $f(x) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{n(\log n)^2}\right)$ où $1 < x \leq 2$ est de genre 0, et cependant la série $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$ est divergente ;

2° La fonction $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{n^2 \log n^2}\right)^{n^2}$, pour laquelle $\sqrt[n]{|c_n|}$ est une série convergente, est de genre 1.

Cependant M. Lindelöf, tout en indiquant les raisons qui doivent faire admettre ces résultats comme très probables, n'en donne pas une démonstration rigoureuse. Je me propose ici de compléter ces résultats, en démontrant en toute rigueur les faits signalés.

2. Considérons d'abord le premier exemple. Soit, d'une façon plus générale, une fonction de genre 0, n'ayant que des racines négatives

$$f(x) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{a_n}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

a_n représente une suite de quantités positives qui croissent avec n , et $\sum \frac{1}{a_n}$ est une série convergente. On a

$$c_n = \sum \sum \dots \sum \frac{1}{a_{\nu_1} a_{\nu_2} \dots a_{\nu_n}}$$

où $0 < \nu_1 < \nu_2 < \dots < \nu_n$, soit

$$S = n! c_n = \sum \sum \dots \sum \frac{1}{\alpha_{\nu_1} \alpha_{\nu_2} \dots \alpha_{\nu_n}}$$

où $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n$ sont des nombres entiers arbitraires, mais tous différents.

Posons

$$A = \sum_1^\infty \sum_2^\infty \dots \sum_n^\infty \frac{1}{\alpha_{\nu_1} \alpha_{\nu_2} \dots \alpha_{\nu_n}}$$

où $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n$ peuvent être quelconques, pourvu que

$$\nu_1 \geq 0, \quad \nu_2 \geq 1, \quad \dots, \quad \nu_n \geq n-1.$$

On a $S > A$. En effet S et A ont des termes communs; A contient en plus les termes où deux indices sont égaux, tandis que S contient en plus les termes où l'un des indices est tel que $\nu_p < p$. On peut faire correspondre ces termes non communs de façon que tout terme de S soit supérieur au terme correspondant de A . Pour cela, soit un terme de S tel que $\nu_p = p' < p$ et $\nu_{p'} > p$, on remplacera ν_p par $\nu_{p'}$ pour avoir le terme correspondant de A . Inversement si, dans un terme de A , $\nu_p = \nu_{p'} \geq p > p'$, on remplacera ν_p par p' pour avoir le terme de S correspondant.

Plus généralement si, dans un terme S , on a $\nu_p = p' < p$, $\nu_{p'} = p''$, $\nu_{p''} = p'''$, ..., on remplacera ν_p par la première des quantités $p', p'', p''', \dots$ qui est au moins égale à p . En opérant ainsi sur chaque indice $\nu_p < p$, on a un terme de A correspondant et inférieur au terme de S . Inversement, dans un terme de A , soit $\nu_p = \nu_{p'}, p > p'$, aucun autre indice entre ν_p et $\nu_{p'}$ n'étant égal à ν_p . Si aucun indice ν du terme considéré n'est égal à p' on remplacera ν_p par p' . Sinon, soit $\nu_{p''} = p'$ l'indice de rang inférieur égal à p' ; $\nu_{p'''} = p''$ l'indice de rang inférieur égal à p'' ; et ainsi de suite jusqu'à $\nu_{p_k} = p_{k-1}$, aucun indice du terme considéré n'étant égal à p_k . On a alors

$$p > p' < p'' > \dots > p_k.$$

On remplacera ν_p par p_k , et en opérant ainsi sur chaque indice du terme de A , on retrouve le terme correspondant de S . Les termes non communs de A et de S se correspondent ainsi deux à

deux, chaque terme de l'une des suites correspond à un seul terme de l'autre, et le terme de S est toujours supérieur au terme de A. Comme ces suites sont des séries convergentes, il en résulte que $S > A$.

$$c_n > \frac{1}{n!} \sum_1^{\infty} \frac{1}{a_{\gamma}} \sum_2^{\infty} \frac{1}{a_{\gamma}} \sum \dots \sum_n^{\infty} \frac{1}{a_{\gamma}} > \frac{1}{n!} \left(\sum_n^{\infty} \frac{1}{a_{\gamma}} \right)^n > \left(\frac{e}{n} \right)^n \frac{1}{e \sqrt{n}} \left(\sum_n^{\infty} \frac{1}{a_{\gamma}} \right)^n$$

$$\sqrt[n]{c_n} > \frac{e}{n} \left(1 - \frac{2 + \log n}{2n} \right) \sum_n^{\infty} \frac{1}{a_{\gamma}}.$$

Soit $a_n = \varphi(n)$ fonction croissante de n ; on a encore

$$\sqrt[n]{c_n} > \frac{e}{n} \left(1 - \frac{2 + \log n}{2n} \right) \int_n^{\infty} \frac{dx}{\varphi(x)}.$$

Pour la fonction

$$f(x) = \prod_{n_0}^{\infty} \left[1 + \frac{x}{n (\log n)^2} \right] \quad (1 \leq x \leq 2),$$

$$\int_n^{\infty} \frac{dx}{x (\log x)^2} = \frac{1}{(x-1) (\log n)^{2-1}},$$

$$\sqrt[n]{c_n} > \frac{e}{x-1} \left[1 - \frac{2 + \log n}{n} \right] \frac{1}{n (\log n)^{2-1}}.$$

Ici $\rho = 1$, la série $\sum \sqrt[n]{c_n}$ est divergente, bien que la fonction soit de genre 0.

Le même résultat s'applique à la fonction

$$f(x) = \prod_{n_0}^{\infty} \left[1 + \frac{x}{n (\log n)^2 (\log \log n)^2} \right] \quad (0 \leq x \leq 1),$$

car ici

$$\int_n^{\infty} \frac{dx}{x \log^2 x (\log \log x)^2} = \frac{1}{1 - \frac{2}{\log \log n}} \int_n^{\infty} \frac{1 - \frac{2}{\log \log x}}{x \log^2 x (\log \log x)^2} dx$$

$$= \frac{1}{\log n (\log \log n)^2 \left(1 + \frac{2}{\log \log n} \right)}$$

$$\sqrt[n]{c_n} > \frac{e}{n \log n (\log \log n)^2} \left(1 - \frac{2}{\log \log n} - \frac{2 + \log n}{2n} \right).$$

3. Nous allons maintenant étudier le genre de la fonction

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{x}{n^2 \log(n^2)} \right]^{n^2}.$$

Ici $\sqrt[n]{c_n} = \frac{1}{n \log n}$ lorsque n est un carré, $\sqrt[n]{c_n} = 0$ si n n'est pas un carré. On a $\rho = 1$, $n \sqrt[n]{c_n} = \frac{1}{\log n}$ ou 0, et tend vers 0. Représentons par $a_1 a_2 \dots a_n \dots$ les zéros de la fonction: nous allons démontrer que la série $\sum |a_n|^{-1}$ est divergente, et il en résultera que la fonction est de genre 1, bien que la série $\sum \sqrt[n]{c_n} = \sum \frac{1}{n^2 \log(n^2)}$ soit convergente.

Considérons la série plus générale

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{n^{\alpha} \log^{\beta} n} \right)^{n^{\gamma}} = \sum u_n$$

où $\log n_0 > 1$, γ et α étant des nombres entiers, $\alpha\gamma > 2$ et $\beta > 0$. Si $\gamma = n^{\alpha\gamma}$, $\frac{\log |c_{\gamma}|}{\gamma \log \gamma} = -\frac{1}{\gamma} - \frac{\log \gamma + \beta \log \log n}{\alpha\gamma \log n}$ tend vers $-\frac{1}{\gamma}$ et $\gamma^{\frac{1}{\gamma}} \sqrt[n]{c_{\gamma}} = \frac{1}{\gamma \log^{\beta} n}$ tend vers 0. La série $\sum (\sqrt[n]{c_{\gamma}})^{\gamma} = \sum \frac{1}{n^{\alpha\gamma} \log^{\beta\gamma} n}$ est convergente. Nous allons voir que la fonction est cependant de genre ρ .

On a

$$\frac{d \log u_n}{dn} = n^{\alpha\gamma-1} \left(\alpha\gamma \log \frac{x}{n^{\alpha}} + \alpha^2 \gamma \log n + \alpha \beta \gamma \log \log n - \alpha - \frac{\beta}{\log n} \right);$$

la dérivée de ce dernier facteur par rapport à n est

$$= \frac{1}{n} \left(\alpha^2 \gamma + \frac{\alpha \beta \gamma}{\log n} - \frac{\beta}{\log^2 n} \right) < 0.$$

Il en résulte que, pourvu que x soit plus grand que

$$\frac{1}{\gamma n_0^{\alpha} \log^{\beta} n_0} e^{\frac{\beta}{\alpha\gamma} \log^2 n_0},$$

u_n augmente avec n , puis diminue constamment. Si x est choisi

de façon que $u_{n+1} = u_{n-1}$, u_n sera le plus grand terme. On a alors

$$\begin{aligned} \log x = \log \gamma &= \alpha \log(n+1) + \beta \log \log(n+1) + (n-1)^{\alpha\beta} \frac{\alpha \log \frac{n-1}{n-1} - \beta \log \frac{\log \frac{n-1}{n-1}}{\log \frac{n-1}{n-1}}}{(n+1)^{\alpha\beta} - (n-1)^{\alpha\beta}} \\ &= \alpha \log n + \beta \log \log n + \log \gamma + \frac{1}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha\beta \log n} + \frac{\alpha(2\alpha\beta-3)}{6n^2} + \dots \end{aligned}$$

Donnons à $\log|x|$ la valeur plus simple obtenue en négligeant les termes infiniment petits par rapport à $\frac{1}{n}$ et soit

$$x = \gamma n^{\alpha} \log^{\beta} n e^{\frac{1}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha\beta \log n} + o(1)}.$$

Pour toute valeur de ν , positive ou négative, on a

$$\begin{aligned} \log \left| \frac{u_{n+\nu}}{u_n} \right| &= \frac{(n+\nu)^{\alpha\beta} - n^{\alpha\beta}}{\beta} = \alpha(n+\nu)^{\alpha\beta} \log \frac{n+\nu}{n} \\ &= \beta \left[(n+\nu)^{\alpha\beta} \log \frac{\log n + \nu}{\log n} - \frac{(n+\nu)^{\alpha\beta} - n^{\alpha\beta}}{\alpha\beta \log n} \right], \end{aligned}$$

dont le coefficient de β a le signe de

$$= \log \frac{\log(n+\nu)}{\log n} = \frac{1 - \left(\frac{n}{n+\nu} \right)^{\alpha\beta}}{\alpha\beta \log n},$$

dont la dérivée par rapport à ν

$$= \frac{1}{(n+\nu)^{\alpha\beta+1}} \left[\frac{n^{\alpha\beta}}{\log n} - \frac{(n+\nu)^{\alpha\beta}}{\log(n+\nu)} \right]$$

a le signe de $-\nu$, car $n+\nu > n_0$, le coefficient de β est donc négatif, et

$$\log \left| \frac{u_{n+\nu}}{u_n} \right| = \frac{(n+\nu)^{\alpha\beta} - n^{\alpha\beta}}{\beta} = \alpha(n+\nu)^{\alpha\beta} \log \frac{n+\nu}{n}.$$

Lorsque $\nu > 0$, on en déduit

$$\log \left| \frac{u_{n+\nu}}{u_n} \right| < \frac{\alpha^2 \nu}{2} \nu^2 n^{\alpha\beta-2},$$

car la différence

$$\frac{(n+\nu)^{\alpha\beta} - n^{\alpha\beta}}{\beta} = \alpha(n+\nu)^{\alpha\beta} \log \frac{n+\nu}{n} + \frac{\alpha^2 \nu}{2} \nu^2 n^{\alpha\beta-2},$$

qui s'annule avec ν , a pour dérivée

$$x^2 \rho n^{x\rho-1} \left[\frac{\nu}{n} - \left(\frac{n-\nu}{n} \right)^{x\rho-1} \log \frac{n-\nu}{n} \right] - x^2 \rho n^{x\rho-1} \left(\frac{\nu}{n} - \frac{n-\nu}{n} \log \frac{n-\nu}{n} \right) < 0.$$

Lorsque $\nu < 0$, $\frac{\nu}{n}$ peut varier entre 0 et -1 , et l'on a

$$-\log \frac{n-\nu}{n} > -\frac{\nu}{n} > -\frac{\nu}{n} \frac{1 - (x\rho - 1) \frac{\nu}{n}}{\left(1 - \frac{\nu}{n}\right)^{x\rho-1}}.$$

Il en résulte que la fonction

$$\frac{(n-\nu)^{x\rho} - n^{x\rho}}{x\rho} - (n-\nu)^{x\rho} \log \frac{n-\nu}{n} - \frac{x\rho}{2} \nu^2 \left(1 - \frac{x\rho-1}{3} \frac{\nu}{n}\right) n^{x\rho-2}$$

croît lorsque $\frac{\nu}{n}$ varie de -1 à 0, et, par suite, reste négative, et

$$\begin{aligned} \log \left| \frac{u_{n+\nu}}{u_n} \right| &< \frac{(n-\nu)^{x\rho} - n^{x\rho}}{\rho} - x(n-\nu)^{x\rho} \log \frac{n-\nu}{n} \\ &< -\frac{x^2 \rho}{2} \nu^2 n^{x\rho-2} \left(1 - 2 \frac{x\rho-1}{3} \frac{\nu}{n}\right). \end{aligned}$$

Supposons d'abord $x\rho = 2$, $x = 2$ si $\rho = 1$, ou $x = 1$ si $\rho = 2$.
Lorsque $\nu > 0$, on a

$$\left| \frac{u_{n+\nu}}{u_n} \right| < e^{-\nu^2},$$

si $\nu < 0$,

$$\left| \frac{u_{n+\nu}}{u_n} \right| < e^{-\nu^2 \left(1 - \frac{2\nu}{3n}\right)}$$

$$\left| \frac{u_{n-1} + u_{n-2} + \dots + u_{n-\nu}}{u_n} \right| < e^{-1} + e^{-2^2} + \dots + e^{-\nu^2} + \dots < 0,4.$$

Si $\nu < \sqrt{n}$

$$\left| \frac{u_{n+\nu}}{u_n} \right| < e^{-\nu^2 \left(1 - \frac{2\nu}{3\sqrt{n}}\right)},$$

$\left| \frac{u_{n-1} + u_{n-2} + \dots + u_{n-\nu}}{u_n} \right|$ sera inférieur à une quantité qui, lorsque

n augmente indéfiniment, a pour limite $\sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-\nu^2}$.

Enfin, si ν est compris entre n et $\sqrt[n]{n}$,

$$\left| \frac{u_{n-\nu}}{u_n} \right| \leq e^{-\frac{\nu^2}{3}} < e^{-\frac{n}{3}},$$

$$\left| \frac{u_{n_0} + u_{n_0+1} + \dots + u_{n-\nu}}{u_n} \right| \leq n e^{-\frac{n}{3}},$$

expression qui tend vers 0 lorsque n devient infini.

Donc, lorsque n dépasse une limite bien déterminée, le module de $f(x) - u_n$ est inférieur au module de u_n .

Lorsque la variable x décrit la circonférence de rayon $\gamma n^{\frac{1}{2}} \log^{\frac{\beta}{2}} n e^{\frac{1}{2} + \frac{\beta}{2\gamma \log n}}$, les arguments de $f(x)$ et de $\left(\frac{x}{\gamma n^{\frac{1}{2}} \log^{\frac{\beta}{2}} n} \right)^{n^{\frac{\rho}{2}}}$ ont la même variation, et ces deux fonctions ont, dans ce cercle, le même nombre de racines, c'est-à-dire $n^{\frac{\rho}{2}}$. Entre les deux circonférences de rayons

$$\gamma n^{\frac{1}{2}} \log^{\frac{\beta}{2}} n e^{\frac{1}{2} + \frac{\beta}{2\gamma \log n}} \quad \text{et} \quad \gamma (n+1)^{\frac{1}{2}} \log^{\frac{\beta}{2}} (n+1) e^{\frac{1}{2} + \frac{\beta}{2\gamma \log (n+1)}},$$

il y a donc $(n+1)^{\frac{\rho}{2}} - n^{\frac{\rho}{2}}$ racines. Et la série $\sum_{n_1}^{\infty} \left| \frac{1}{a_{n_1}} \right|^{\eta}$ est comprise entre les deux séries

$$\sum \frac{(n+1)^{\frac{\rho}{2}} - n^{\frac{\rho}{2}}}{\left(\gamma n^{\frac{1}{2}} \log^{\frac{\beta}{2}} n e^{\frac{1}{2} + \frac{\beta}{2\gamma \log n}} \right)^{\eta}} \quad \text{et} \quad \sum \frac{n^{\frac{\rho}{2}} - (n-1)^{\frac{\rho}{2}}}{\left(\gamma n^{\frac{1}{2}} \log^{\frac{\beta}{2}} n e^{\frac{1}{2} + \frac{\beta}{2\gamma \log n}} \right)^{\eta}}$$

qui sont convergentes ou divergentes en même temps que la série

$$\sum \frac{n^{\frac{\rho}{2}-1}}{(n^{\frac{1}{2}} \log^{\frac{\beta}{2}} n)^{\eta}};$$

ces séries sont donc convergentes si $\eta > \rho$, ou si $\eta = \rho$, $\beta \rho > 1$.

La fonction $f(x)$ est donc d'ordre ρ ; elle sera de genre $\rho - 1$ si $\beta \rho > 1$, car alors les séries $\sum \frac{1}{n \log^{\frac{\beta}{2}} n}$, $\sum \left| \frac{1}{a_n} \right|^{\rho}$ sont convergentes. Elle est de genre ρ si $\beta \rho \leq 1$.

Ainsi lorsque $\beta \rho > 1$, $f(x)$ est une fonction de genre ρ telle que la série $\sum \left(\sqrt[n]{c_n} \right)^{\rho} = \sum \left(\frac{1}{\gamma n^{\frac{1}{2}} \log^{\frac{\beta}{2}} n} \right)^{\rho}$ converge.

En particulier $\sum \left[\frac{x}{n^2 \log(n^2)} \right]^{n^2}$ est de genre 1, $\sum \left(\frac{x}{n \log^{\beta} n} \right)^{n^2}$ est de genre 2 si $\beta < \frac{1}{2}$.

Si $\alpha\varphi > 2$, $n^{\alpha\varphi-2}$ augmente indéfiniment avec n , et les relations précédentes montrent que, lorsque

$$|x| = \gamma n^{\alpha} \log^{\beta} n e^{\frac{1}{\varphi} + \frac{\beta}{\alpha\varphi \log n}},$$

$\frac{f(x) - u_n}{u_n}$ tend vers 0 lorsque n devient infini. Cela permet de généraliser les résultats précédents en supposant que les exposants des termes non nuls de $f(x)$ ne suivent pas une loi aussi régulière.

4. Soit

$$f(x) = \sum \left(\frac{x}{\gamma n^{\alpha} \log^{\beta} n} \right)^{P_n}$$

où les exposants entiers P_n augmentent de façon que l'on ait

$$\frac{P_n - n^{\alpha\varphi-2}}{n^{\alpha\varphi-2}} = k + \left(\frac{x\varphi}{\gamma} \right)^2,$$

φ est encore un nombre entier, α et β des quantités positives quelconques, et l'on suppose $\alpha\varphi > 2$.

Soit encore

$$x = \gamma n^{\alpha} \log^{\beta} n e^{\frac{1}{\varphi} + \frac{\beta}{\alpha\varphi \log n}} e^{i\omega n},$$

on a

$$|u_n| = e^{\left(\frac{1}{\varphi} + \frac{\beta}{\alpha\varphi \log n} \right) n^{\alpha} - k n^{\alpha\varphi-2}}.$$

$$\log \left| \frac{u_{n+\nu}}{u_n} \right| \leq \frac{(n+\nu)^{\alpha\varphi}}{\varphi} \left[1 - \left(\frac{n}{n+\nu} \right)^{\alpha\varphi} - \alpha\varphi \log \frac{n+\nu}{n} \right] - \frac{k}{\varphi} n^{\alpha\varphi-2} \left(1 + \frac{\beta}{\alpha \log n} \right) \\ - k(n+\nu)^{\alpha\varphi-2} \left[\frac{1}{\varphi} + \frac{\beta}{\alpha\varphi \log n} - \alpha \log \frac{n+\nu}{n} - \beta \log \frac{\log n + \nu}{\log n} \right].$$

Mais si ν croît de $-n$ à 0 et $+\infty$, $\frac{1 - \left(\frac{n}{n+\nu} \right)^{\alpha\varphi}}{\log \frac{n+\nu}{n}}$ décroît constamment de $+\infty$ à $\alpha\varphi$ et 0.

Donc, si $\nu \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} \frac{1 - \left(\frac{n}{n+\nu}\right)^{\alpha\rho}}{\log \frac{n+\nu}{n}} - \frac{1 - \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-\alpha\rho}}{\log \frac{n+1}{n}} &< \frac{\alpha\rho}{n} \left[1 - \frac{\alpha\rho+1}{2n} + \frac{(\alpha\rho+1)(\alpha\rho+2)}{3n^2} \right] \left(n - \frac{1}{2}\right) \\ &< \alpha\rho \left[1 - \frac{\alpha\rho}{2n} + \frac{(\alpha\rho+1)^2}{3n(2n-1)} \right] \end{aligned}$$

et pourvu que l'on ait $n > \frac{1}{2} + \frac{(\alpha\rho+1)^2}{3\alpha\rho}$, on en déduit

$$\log \left| \frac{u_{n+\nu}}{u_n} \right| < (n+\nu)^{\alpha\rho-2} \left\{ -\frac{\alpha}{2} \left[\alpha\rho - \frac{(\alpha\rho+1)^2}{3(2n-1)} \right] + \frac{\nu k}{\rho} + \frac{2k\beta}{\alpha\rho \log n} + \frac{k\nu}{n} + \frac{k\beta\nu}{n \log n} \right\}.$$

Expression de la forme $(n+\nu)^{\alpha\rho-2} (\mu - \lambda\nu)$ où $\lambda - \mu$ a pour limite

$$\frac{\alpha^2 \rho}{2} - \frac{2k}{\rho} > 0;$$

il existe donc une valeur de n à partir de laquelle $\lambda - \mu$ est positif et $n^{\alpha\rho-2}(\lambda - \mu)$ augmente indéfiniment. On peut donc supposer $n^{\alpha\rho-2}(\lambda - \mu)$ aussi grand que l'on voudra pourvu que n dépasse une valeur déterminée, et l'on pourra poser

$$\log \left| \frac{u_{n+\nu}}{u_n} \right| < \mu - \lambda\nu \quad \text{où} \quad e^{\lambda-\mu} \cdot \theta > 3$$

$$\left| \frac{u_{n+1} + u_{n+2} + \dots}{u_n} \right| < \sum_{\nu=1}^{\infty} e^{\mu-\lambda\nu} < \frac{1}{\theta-1} < \frac{1}{2}.$$

On a de même, si $\nu < 1$,

$$\frac{\left(\frac{n}{n-\nu}\right)^{\alpha\rho} - 1}{\log \frac{n}{n-\nu}} - \frac{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{\alpha\rho} - 1}{\log \left(\frac{n}{n-1}\right)} > \frac{\alpha\rho \left(1 + \frac{\alpha\rho-1}{2n}\right)}{n \left[\frac{1}{n} + \frac{1}{2(n-1)^2}\right]} > \alpha\rho \left[1 + \frac{\alpha\rho}{2n} - \frac{\alpha\rho-5}{4(n-1)^2} \right]$$

$$\begin{aligned} \log \left| \frac{u_{n-\nu}}{u_n} \right| &< (n-\nu)^{\alpha\rho} \log \frac{n}{n-\nu} \left[-\frac{\alpha^2 \rho}{2n} + \alpha \frac{\alpha\rho-5}{4(n-1)^2} \right] \\ &+ \frac{2k}{\rho} n^{\alpha\rho-2} \left(1 + \frac{\beta}{\alpha \log n} \right) + k(n-\nu)^{\alpha\rho-3} \nu \left(\alpha + \frac{\beta}{\log n-\nu} \right). \end{aligned}$$

Supposons $\frac{\gamma}{n} < \varepsilon$ et $n > 2 + \frac{1}{2} + \frac{5}{2\alpha\varphi}$, on en déduit

$$\log \left| \frac{u_{n-\gamma}}{u_n} \right| \leq n^{\alpha\varphi-2} \left(1 - \frac{\gamma\alpha}{2} (1-\varepsilon)^{\alpha\varphi} \left[\alpha\varphi - \frac{\alpha\varphi - 5}{2(n-1)^2} n \right] \right. \\ \left. + \frac{2k}{\varphi} \left(1 + \frac{\beta}{2 \log n} \right) + k \frac{\gamma}{n} \left[\alpha - \frac{\beta}{\log n(1-\varepsilon)} \right] \right).$$

On peut choisir ε assez petit pour que, à partir d'une valeur déterminée de n , lorsque $\gamma < n\varepsilon$, on ait encore

$$\log \left| \frac{u_{n-\gamma}}{u_n} \right| \leq \mu - \lambda\gamma \\ \left| \frac{u_{n-1} + u_{n-2} + \dots + u_{n-\gamma}}{u_n} \right| \leq \frac{e^{\mu-\lambda}}{1-e^{-\lambda}} = \frac{1}{1-e^{-1}} \leq \frac{1}{\lambda}.$$

D'autre part, si $\gamma > n\varepsilon$,

$$\log \left| \frac{u_{n-\gamma}}{u_n} \right| = \frac{n^{\alpha\varphi}}{\varphi} \left(1 - 1 + (1-\varepsilon)^{\alpha\varphi} [1 - \alpha\varphi \log(1-\varepsilon)] \right. \\ \left. - \frac{\gamma k}{n^2} \left(1 + \frac{\beta}{2 \log n} \right) + \frac{k\varphi\gamma}{n^2(n-\gamma)} \left(\frac{n-\gamma}{n} \right)^{\alpha\varphi-2} \left(\alpha - \frac{\beta}{\log(n-\gamma)} \right) \right) \\ (1-\varepsilon)^{\alpha\varphi} [1 - \alpha\varphi \log(1-\varepsilon)] \leq 1 - \frac{\alpha^2\varphi^2\varepsilon^2}{2} = 1.$$

Soit $\varepsilon' < \frac{(\alpha\varphi\varepsilon)^2}{2\varphi}$; lorsque n dépasse une valeur déterminée, on aura

$$\log \frac{u_{n-\gamma}}{u_n} = n^{\alpha\varphi}\varepsilon', \\ \left| \frac{u_{n-1} + \dots + u_{n-\gamma}}{u_n} \right| \leq n e^{-\varepsilon'n^{\alpha\varphi}}$$

qui tend vers 0. Il existe donc une valeur de n à partir de laquelle, lorsque $|x| = \gamma_n = \gamma n^\alpha \log^\beta n \cdot n^{\frac{1}{\varphi} + \frac{\beta}{2\varphi \log n}}$, $\left| \frac{f(x)}{u_n} - 1 \right|$ reste plus petit que 1.

Il en résulte encore que les fonctions $f(x)$ et $\left(\frac{x}{\gamma n^\alpha \log^\beta n} \right)^{\frac{1}{\varphi}}$ ont, dans la circonférence de rayon γ_n , p_n racines, et $p_{n+1} - p_n$ entre les deux circonférences de rayons γ_{n+1} et γ_n .

La série $\sum \left| \frac{1}{a_n} \right|^\beta$ est comprise entre les deux séries

$$\sum \frac{p_{n+1} - p_n}{\gamma_n^\beta} \quad \text{et} \quad \sum \frac{p_n - p_{n-1}}{\gamma_n^\beta};$$

ou entre

$$\sum \frac{(n+1)^{\alpha\rho} - n^{\alpha\rho} \cdot k \{ (n+1)^{\alpha\rho-2} - n^{\alpha\rho-2} \}}{\left(\gamma n^{\alpha} \log^{\beta} n \cdot n^{\rho} + \frac{1}{\alpha\rho} \log n \right)^{\theta}}$$

et

$$\sum \frac{n^{\alpha\rho} - (n-1)^{\alpha\rho} - k \{ n^{\alpha\rho-2} - (n-1)^{\alpha\rho-2} \}}{\left(\gamma n^{\alpha} \log^{\beta} n \cdot n^{\rho} + \frac{1}{\alpha\rho} \log n \right)^{\theta}}$$

qui sont convergentes et divergentes en même que $\sum \frac{n^{\alpha\rho-1}}{(n^{\alpha} \log^{\beta} n)^{\theta}}$.
On en déduit que $f(x)$ est d'ordre ρ , et de genre ρ si $\rho \geq 1$.

Ainsi, lorsque $\alpha > \frac{2}{\rho}$, $\beta \leq \frac{1}{\rho}$, on a une fonction de genre ρ , telle que la série $\sum \left(\frac{n}{c_n} \right)^{\rho}$ soit convergente.

SUR L'APPROXIMATION DES RACINES RÉELLES DES ÉQUATIONS;

Par M. A. PELLET.

Étant donnés deux nombres a et b comprenant une seule racine X de l'équation $f(x) = 0$, pour appliquer la méthode d'approximation de Newton, on suppose qu'entre ces limites aucune des trois premières dérivées de $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ ne s'annule, et l'on part de la limite a , qui donne pour $f(x)$ et $f''(x)$ des valeurs de même signe. Alors la quantité $a - \frac{f(a)}{f'(a)} = a_1$ est comprise entre a et X , la racine, mais la différence $X - a_1$ peut être d'un module bien supérieur à celui de $\frac{f(a)}{f'(a)}$, de sorte que l'application de la méthode est peu avantageuse. Il n'en est plus ainsi si l'on suppose en outre remplie la condition

$$f'^2(a) - 2f(a)f''(a) = 0.$$

Alors la fonction $f'^2(x) - 2f(x)f''(x)$, qui est positive pour $x = a$ et $x = X$, et dont la dérivée $-2f(x)f'''(x)$ ne s'annule pas entre ces limites, est positive de $x = a$ à $x = b$; et l'on en déduit que, pour toute valeur x comprise entre a et X , les deux quantités

$$x - \frac{f(x)}{f'(x)}, \quad x - 2 \frac{f(x)}{f'(x)}$$

comprennent entre elles la racine X . Ainsi $X - a_1$ est alors de même signe et de module moindre que $-\frac{f'(a_1)}{f''(a_1)}$, comme aussi que $-\frac{f'(a_1)}{f''(a_1)}$, par suite que $-\frac{Mf''(a_1)}{f''(a_1) - Mf''(a_1)} - \frac{f'(a_1)}{f''(a_1)}$, M étant de même signe et de module au moins égal au module maximum de $f''(x)$ entre a et X .

Supposons $f(a)$ et $f(b)$ positifs, $f'(a)$ et $f'(b)$ de signes contraires, et $f''(x)$ positif et allant en croissant de a à b . S'il y a une racine X entre a et b , on a

$$f(a) - (X - a)f'(a) - (X - a)^2 \frac{f''(\xi)}{2} = 0,$$

ξ étant un nombre intermédiaire entre a et b . Il en résulte que X rend négatives les expressions

$$(1) \quad \begin{cases} f(a) - f'(a)(r - a) - \frac{f''(a)}{2}(r - a)^2, \\ f(b) - f'(b)(r - b) - \frac{f''(a)}{2}(r - b)^2; \end{cases}$$

et positives les expressions

$$(2) \quad \begin{cases} f(a) - f'(a)(r - a) - \frac{f''(b)}{2}(r - a)^2, \\ f(b) - f'(b)(r - b) - \frac{f''(b)}{2}(r - b)^2. \end{cases}$$

D'autre part, $f'(a) - 2f(a)f''(a)$ étant positive, la racine la plus voisine de a doit être comprise entre $a - \frac{f'(a)}{f''(a)}$ et $a - 2\frac{f'(a)}{f''(a)}$. Ainsi, dans cet intervalle il doit y avoir des quantités rendant négatives les expressions (1) et positives les expressions (2), sans quoi il n'y a pas de racine de l'équation $f(x) = 0$ entre a et b .

SUR UNE PROPRIÉTÉ TRÈS GÉNÉRALE DES DÉTERMINANTS:

Par M. A. AURIC.

Considérons un système de n équations linéaires à n inconnues

$$(1) \quad a_i^0 = a_i^1 x_1 + a_i^2 x_2 + \dots + a_i^p x_p + \dots + a_i^n x_n \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Appelons D''_n le déterminant formé par les coefficients et D''_n le déterminant obtenu en remplaçant les éléments de la dernière colonne

$$\alpha_1^n \quad \alpha_2^n \quad \dots \quad \alpha_n^n$$

respectivement par

$$\alpha_1^0 \quad \alpha_2^0 \quad \dots \quad \alpha_n^0.$$

Appelons de même D_q^q le déterminant obtenu en ne considérant que les q premières inconnues et les q premières équations, et D_q^i le déterminant formé en remplaçant, dans D_q^q ,

$$\alpha_1^q \quad \alpha_2^q \quad \dots \quad \alpha_q^q$$

respectivement par

$$\alpha_1^i \quad \alpha_2^i \quad \dots \quad \alpha_q^i.$$

Soit $D''_n(\alpha_\lambda^\mu)$ le déterminant obtenu en supprimant dans D''_n la ligne λ et la colonne μ .

Posons

$$\theta_i^i = \frac{D''_n}{D''_n}, \quad \theta_{ij}^i = \frac{D''_n}{D''_n},$$

ce qui suppose

$$D''_n \neq 0, \quad D_q^q \neq 0.$$

Dans notre Mémoire sur les équations linéaires, nous avons mis la solution du système (1) sous la forme générale

$$x_p = \sum_0^{n-p} \theta_{p+k}^0 T_{p+k}^{p+k}.$$

en posant

$$T_{p+k}^{p+k} = \sum (-1)^{\lambda} \theta_{p+\lambda_1}^{p+\lambda_1} \theta_{p+\lambda_2}^{p+\lambda_2} \dots \theta_{p+\lambda_r}^{p+\lambda_r},$$

avec

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_r = k \quad (\lambda_i \neq 0).$$

Il est facile de montrer, en donnant à α_i^0 des valeurs spéciales,

$$\alpha_i^0 = 0 \quad \text{si} \quad i \neq p+k,$$

$$\alpha_i^0 = 1 \quad \text{si} \quad i = p+k,$$

que l'on a

$$T_{p+k}^{p+k} = \frac{D_{p+k}^{p+k}(\alpha_{p+k}^0)}{D_{p+k}^{p+k}(\alpha_{p+k}^0)}.$$

On a dès lors la relation très générale que nous voulions établir

$$\frac{D_{p+k}^{p+k}(\alpha_{p+k}^{p+k})}{D_{p+k}^{p+k}(\alpha_{p+k}^{p+k})} = \sum (-1)^{\lambda_1} \frac{D_p^{p+\lambda_1} D_{p+\lambda_1}^{p+\lambda_1+\lambda_2} \dots D_{p+\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_r}^{p+k}}{D_p^{p+\lambda_1} D_{p+\lambda_1}^{p+\lambda_1} \dots D_{p+k-\lambda_r}^{p+k}}$$

avec

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_r = k \quad (\lambda_i \geq 0).$$

Les symboles T_p^{p+k} et θ_p^{p+k} sont tout à fait réciproques; on a en effet les relations suivantes :

$$\theta_p^{p+k} = \sum (-1)^{\lambda_1} T_p^{p+\lambda_1} T_{p+\lambda_1}^{p+\lambda_1+\lambda_2} \dots T_{p+\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_r}^{p+k}$$

avec

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_r = k \quad (\lambda_i \neq 0),$$

$$\sum_{k=0}^{h-1} \theta_p^{p+k} T_{p+k}^{p+k} = \sum_{k=0}^{h-1} T_p^{p+k} \theta_{p+k}^{p+k} = 0.$$

On a de même

$$x_p = \sum_0^{n-p} \theta_{p+k}^0 T_{p+k}^{p+k},$$

$$\theta_p^0 = \sum_0^{n-p} x_p \theta_{p+k}^{p+k}.$$

Comme application prenons le cas simple de $k = 2$; on aura immédiatement

$$\frac{D_{p+2}^{p+2}(\alpha_{p+2}^{p+2})}{D_{p+2}^{p+2}(\alpha_{p+2}^{p+2})} = \frac{D_p^{p+1} D_{p+1}^{p+1}}{D_p^{p+1} D_{p+1}^{p+1}} = \frac{D_p^{p+2}}{D_p^{p+2}}$$

et en écrivant les déterminants du second membre, comme les mineurs de D_{p+2}^{p+2} , il vient

$$D_{p+2}^{p+2}(\alpha_{p+2}^{p+2}) D_{p+2}^{p+2}(\alpha_{p+1}^{p+1} \alpha_{p+2}^{p+2}) = D_{p+2}^{p+2}(\alpha_{p+1}^{p+1} \alpha_{p+2}^{p+2}) D_{p+2}^{p+2}(\alpha_{p+2}^{p+2}) \\ - D_{p+2}^{p+2}(\alpha_{p+1}^{p+1} \alpha_{p+2}^{p+1}) D_{p+2}^{p+2}(\alpha_{p+2}^{p+2} \alpha_{p+2}^{p+1}),$$

ou, sous la forme d'un déterminant,

$$D_{p+2}^{p+2}(\alpha_{p+2}^{p+2}) D_{p+2}^{p+2}(\alpha_{p+1}^{p+1} \alpha_{p+2}^{p+2}) = \begin{vmatrix} D_{p+2}^{p+2}(\alpha_{p+2}^{p+2} \alpha_{p+2}^{p+1}) & D_{p+2}^{p+2}(\alpha_{p+2}^{p+2} \alpha_{p+1}^{p+1}) \\ D_{p+2}^{p+2}(\alpha_{p+2}^{p+2} \alpha_{p+2}^{p+2}) & D_{p+2}^{p+2}(\alpha_{p+2}^{p+2} \alpha_{p+2}^{p+1}) \end{vmatrix}.$$

On reconnaît alors une propriété bien connue des déterminants (voir p. 11 du Mémoire précité).

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 7 MAI 1902.

PRÉSIDENTE DE M. RAFFY.

Communications :

M. Demoulin : *Sur la déformation des conoïdes droits.*

M. Fontené : *Sur un système gauche articulé.*

SÉANCE DU 21 MAI 1902.

PRÉSIDENTE DE M. RAFFY.

Communications :

M. Demoulin : *Détermination des familles ou des couples de courbes parallèles superposables.*

M. Duporeq : *Observations sur la Communication précédente.*

M. Maillet : *Sur les propriétés arithmétiques des fonctions entières et quasi entières.*

M. Zoukis : *Sur certaines formules relatives aux fonctions homogènes.*

SÉANCE DU 4 JUIN 1902.

PRÉSIDENTE DE M. RAFFY.

Communications :

M. Clairin : *Sur les caractéristiques des équations aux dérivées partielles du $n^{\text{ième}}$ ordre.*

M. Laisant : *Sur les courbes funiculaires.*

M. Lecornu et M. Raffy présentent quelques observations sur la Communication précédente.

M. Lecornu : *Sur une question de Cinématique.*

M. Perrin : *Sur le calcul des racines des équations numériques.*

SÉANCE DU 18 JUIN 1902.

PRÉSIDENTE DE M. RAFFY.

Communication :

M. Raffy : *Sur le problème de la déformation des surfaces.*

MÉMOIRES.

SUR QUELQUES FORMULES DES FONCTIONS HOMOGÈNES ET SUR LA DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME QUI S'Y RATTACHE;

Par M. ARISTIDE ZOUKIS.

I.

1. Soit $F(x, w)$ une fonction homogène d'un degré quelconque m par rapport à x, w . En adoptant la notation connue $F_{p,q}(x, w)$ des dérivées, on aura la formule

$$(A) \quad (e + h)^n \sum_{p=0}^{p=n} \frac{(\alpha - e)^p w^{n-p}}{p! (n-p)!} F_{p, n-p}(\alpha + e + h, w) \\ = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{(m-n+k) \dots (m-n+1)}{k!} \\ \cdot e^k h^{n-k} \sum_{p=0}^{p=n-k} \frac{\alpha^p w^{n-k-p}}{p! (n-k-p)!} F_{p, n-k-p}(\alpha + e + h, w),$$

dans laquelle les quantités α, e, h, w sont tout à fait arbitraires, n peut prendre toute valeur positive entière et

$$\frac{(m-n+k) \dots (m-n+1)}{k!} = 1 \quad \text{pour} \quad k=0.$$

Si l'on pose, pour une valeur quelconque de α ,

$$F(\alpha - x, w) = \varphi(x, w),$$

la formule (A) prendra la forme plus simple

$$(e + h)^n \sum_{p=0}^{p=n} \frac{e^p w^{n-p}}{p! (n-p)!} \varphi_{p, n-p}(e - h, w) \\ = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{(m-n+k) \dots (m-n+1)}{k! (n-k)!} e^k h^{n-k} w^{n-k} \varphi_{0, n-k}(e - h, w),$$

sous laquelle elle peut être démontrée de la manière suivante. On voit d'abord qu'elle est vraie pour $n = 0$. De même, pour $n = 1$, elle est aussi vraie, à cause de l'égalité

$$m \varphi(e + h, w) = (e + h) \varphi_{1,0}(e + h, w) + w \varphi_{0,1}(e + h, w).$$

Il ne reste donc plus à démontrer que cette formule, étant vraie pour n , l'est aussi pour $n + 1$. En effet, si l'on suppose vraie la formule pour n et si on l'applique sur la fonction φ et sur la fonction $\varphi_{0,1}$ du degré $m - 1$, en ajoutant les résultats multipliés, le premier par $(m - n)e$, et le second par αh , et en ayant égard à l'égalité connue

$$\begin{aligned} (m - n) \varphi_{p,n-p}(e + h, w) \\ = (e + h) \varphi_{p+1,n-p}(e + h, w) + w \varphi_{p,n+1-p}(e + h, w), \end{aligned}$$

on aura la formule pour $n + 1$.

2. Si l'on suppose entière la fonction homogène $F(x, w)$ et si l'on pose

$$F(a + e + h - x, w) = f(a + x, w) \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{1}{z},$$

on aura

$$\frac{1}{z^m} F[a + e + h + (a + e)z, w + wz] = f(a + h + \alpha y, w + wy),$$

$$\frac{1}{z^m} F(a + e + h + \alpha z, w + wz) = f(a + e + h + \alpha y, w + wy)$$

et en égalant les coefficients de $\frac{1}{z^m} z^k = \frac{1}{z^{m-k}}$ et de y^{m-k} ($0 \leq k \leq m$)

$$\begin{aligned} & \sum_{p=0}^{p=k} \frac{(a + e)^p w^{k-p}}{p! (k - p)!} F_{p,k-p}(a + e + h, w) \\ &= \sum_{p=0}^{p=m-k} \frac{\alpha^p w^{m-k-p}}{p! (m - k - p)!} f_{p,m-k-p}(a + h, w), \\ & \sum_{p=0}^{p=k} \frac{\alpha^p w^{k-p}}{p! (k - p)!} F_{p,k-p}(a + e + h, w) \\ &= \sum_{p=0}^{p=m-k} \frac{\alpha^p w^{m-k-p}}{p! (m - k - p)!} f_{p,m-k-p}(a + e + h, w). \end{aligned}$$

D'après ces égalités, la formule (A), après un changement de e en h et *vice versa* et puis de f en F , donnera la formule

$$(B) \quad \left\{ \begin{aligned} & (e+h)^n \sum_{p=0}^{p=m-n} \frac{\alpha^p w^{m-n-p}}{p!(m-n-p)!} F_{p,m-n-p}(\alpha+e, w) \\ &= \sum_{k=0}^{k=n} \frac{(m-n+k) \dots (m-n+1)}{k!} \\ & \quad \times e^{n-k} h^k \sum_{p=0}^{p=m-n+k} \frac{\alpha^p w^{m-n+k-p}}{p!(m-n+k-p)!} F_{p,m-n+k-p}(\alpha+e+h, w). \end{aligned} \right.$$

Cette formule n'est vraie que pour des fonctions entières, ce qui devient évident si l'on suppose $e = 0$.

3. Il est aisé de voir que

$$\begin{aligned} & \sum_{p=0}^{p=k} \frac{(\alpha+e)^p w^{k-p}}{p!(k-p)!} F_{p,k-p}(\alpha+e+h, w), \\ & \sum_{p=0}^{p=k} \frac{\alpha^p w^{k-p}}{p!(k-p)!} F_{p,k-p}(\alpha+e, w), \\ & \sum_{p=0}^{p=k} \frac{\alpha^p w^{k-p}}{p!(k+p)!} F_{p,k-p}(\alpha+e+h, w) \end{aligned}$$

sont respectivement les coefficients de z^k dans les développements suivant les puissances de z des fonctions

$$(a) \quad (z+1)^m F\left(\alpha+e+\frac{h}{z+1}, w\right) = F[\alpha+e+h+(\alpha+e)z, w+wz],$$

$$(b) \quad (z+1)^m F\left(\alpha-\frac{e}{z+1}, w\right) = F(\alpha+e+az, w+wz),$$

$$(c) \quad (z+1)^m F\left(\alpha-\frac{e+h}{z+1}, w\right) = F(\alpha+e+h+az, w+wz),$$

qui sont les transformées de la fonction $F(x, w)$ par les formules

$$x = \alpha+e+\frac{h}{z+1}, \quad x = \alpha+\frac{e}{z+1}, \quad x = \alpha+\frac{e+h}{z+1}.$$

Cela posé, la formule (A) nous donne la proposition.

PROPOSITION I. — La fonction $F(x, w)$ étant homogène d'un

degré quelconque m par rapport à x, w ; si on la transforme par les formules

$$x = a - e + \frac{h}{z+1}, \quad x = a + \frac{e+h}{z+1}$$

et l'on considère les deux fonctions transformées (a) et (c), le coefficient de x^n (n est tout entier positif) dans le développement suivant les puissances de z de la fonction (a), multiplié par $(e+h)^n$ est égal à la somme des $n+1$ coefficients des puissances $z^0, z^1, \dots, z^n$, dans le développement suivant les puissances de z de la fonction (c); quand ces coefficients seront respectivement multipliés par

$$\frac{m(m-1) \dots (m-n+1)}{n!} e^n, \quad \frac{(m-1) \dots (m-n+1)}{(n-1)!} e^{n-1} h, \dots, \\ \frac{m-n+1}{1!} e h^{n-1}, \quad h^n.$$

De même, la formule (B), qui n'est vraie que pour des fonctions entières, nous donne la proposition.

PROPOSITION II. — La fonction $F(x, w)$ étant un polynôme entier homogène du degré m par rapport à x, w ; si on la transforme par les formules

$$x = a + \frac{e}{z-1}, \quad x = a + \frac{e-h}{z-1}$$

et l'on considère les fonctions transformées (b) et (c); le coefficient de z^{m-n} ($0 \leq n \leq m$), dans le développement suivant les puissances de z de la fonction (b), multiplié par $(e+h)^n$, est égal à la somme des $n+1$ coefficients des puissances $z^m, z^{m-1}, \dots, z^{m-n}$, dans le développement suivant les puissances de z de la fonction (c); quand ces coefficients seront respectivement multipliés par

$$\frac{m(m-1) \dots (m-n+1)}{n!} h^n, \quad \frac{(m-1) \dots (m-n+1)}{(n-1)!} h^{n-1} e, \dots, \\ \frac{m-n+1}{1!} h e^{n-2}, \quad e^n.$$

4. Soit $\varphi(x_1, \dots, x_i, w)$ une fonction homogène d'un degré quelconque m par rapport aux $i+1$ variables $x_1, \dots, x_i, w$ et

considérons la fonction

$$F(x, w) = \varphi[f^{(1)}(x, 1), \dots, f^{(i)}(x, 1)],$$

dans laquelle les fonctions

$$f^{(1)}(x, 1), \dots, f^{(i)}(x, 1)$$

sont telles que la fonction $F(x, w)$ soit d'un degré déterminé $\pi.m$ par rapport à x . Transformons cette fonction successivement par les formules

$$x = a + e + \frac{h}{z+1}, \quad x = a + \frac{e}{z+1}, \quad x = a - \frac{e+h}{z+1},$$

et considérons les fonctions transformées

$$\begin{aligned} (a) \quad & \left\{ \begin{aligned} & (z+1)^{\pi.m} F\left(a + e + \frac{h}{z+1}, w\right) \\ & = (z+1)^{\pi.m} \varphi\left[f^{(1)}\left(a + e + \frac{h}{z+1}, 1\right), \dots, f^{(i)}\left(a + e + \frac{h}{z+1}, 1\right), w\right], \end{aligned} \right. \\ (b) \quad & \left\{ \begin{aligned} & (z+1)^{\pi.m} F\left(a + \frac{e}{z+1}, w\right) \\ & = (z+1)^{\pi.m} \varphi\left[f^{(1)}\left(a + \frac{e}{z+1}, 1\right), \dots, f^{(i)}\left(a + \frac{e}{z+1}, 1\right), w\right], \end{aligned} \right. \\ (c) \quad & \left\{ \begin{aligned} & (z+1)^{\pi.m} F\left(a - \frac{e+h}{z+1}, w\right) \\ & = (z+1)^{\pi.m} \varphi\left[f^{(1)}\left(a - \frac{e+h}{z+1}, 1\right), \dots, f^{(i)}\left(a - \frac{e+h}{z+1}, 1\right), w\right]. \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Dans les cas où l'on peut développer ces fonctions suivant les puissances de z , en appliquant la proposition I et la proposition II, si $F(x, w)$ est un polynôme entier par rapport à x , on aura toutes les formules qui dérivent des propositions I et II.

Dans ce qui suit, nous n'examinerons que le cas où les fonctions $f^{(k)}(x, 1)$ ($k=1, 2, \dots, i$) sont des polynômes du premier degré.

5. Prenons, en effet,

$$x_k = f^{(k)}(x, 1) = g_k x + q_k \quad (k=1, 2, \dots, i),$$

et posons, pour abréger,

$$g_k a + q_k = u^k \quad (k=1, 2, \dots, i).$$

Alors les trois fonctions transformées (a), (b), (c) du n° 4 deviendront

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & \left\{ \begin{aligned} & (\varepsilon + 1)^m \varphi \left(u_1 + g_1 e + \frac{g_1 h}{\varepsilon + 1}, \dots, u_i + g_i e + \frac{g_i h}{\varepsilon + 1}, w \right) \\ & = \varphi [u_1 + g_1(e + h) + (u_1 + g_1 e) \varepsilon, \dots, u_i + g_i(e + h) + (u_i + g_i e) \varepsilon, w + w \varepsilon], \end{aligned} \right. \\
 (b) \quad & \left\{ \begin{aligned} & (\varepsilon + 1)^m \varphi \left(u_1 + \frac{g_1 e}{\varepsilon + 1}, \dots, u_i + \frac{g_i e}{\varepsilon + 1}, w \right) \\ & = \varphi [u_1 + g_1 e + u_1 \varepsilon, \dots, u_i + g_i e + u_i \varepsilon, w + w \varepsilon], \end{aligned} \right. \\
 (c) \quad & \left\{ \begin{aligned} & (\varepsilon + 1)^m \varphi \left(u_1 + \frac{g_1(e + h)}{\varepsilon + 1}, \dots, u_i + \frac{g_i(e + h)}{\varepsilon + 1}, w \right) \\ & = \varphi [u_1 + g_1(e + h) + u_1 \varepsilon, \dots, u_i + g_i(e + h) + u_i \varepsilon, w + w \varepsilon]. \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Puisque maintenant les coefficients de z^k ($k = 0, 1, 2, \dots$), dans les développements de ces fonctions sont respectivement

$$\begin{aligned}
 & \sum_{p_1 + \dots + p_i + p_{i+1} = k} \frac{(u_1 + g_1 e)^{p_1} \dots (u_i + g_i e)^{p_i} w^{p_{i+1}}}{p_1! \dots p_i! p_{i+1}!} \\
 & \quad \times \varphi_{p_1, \dots, p_i, p_{i+1}} [u_1 + g_1(e + h), \dots, u_i + g_i(e + h), w], \\
 & \sum_{p_1 + \dots + p_i + p_{i+1} = k} \frac{u_1^{p_1} \dots u_i^{p_i} w^{p_{i+1}}}{p_1! \dots p_i! p_{i+1}!} \varphi_{p_1, \dots, p_i, p_{i+1}} (u_1 + g_1 e, \dots, u_i + g_i e, w), \\
 & \sum_{p_1 + \dots + p_i + p_{i+1} = k} \frac{u_1^{p_1} \dots u_i^{p_i} w^{p_{i+1}}}{p_1! \dots p_i! p_{i+1}!} \varphi_{p_1, \dots, p_i, p_{i+1}} [u_1 + g_1(e + h), \dots, u_i + g_i(e + h), w],
 \end{aligned}$$

les deux propositions I et II (n° 3) nous donnent les formules

$$(A') \quad \left\{ \begin{aligned} & (e + h)^n \sum_{p_1 + \dots + p_i + p_{i+1} = n} \frac{(u_1 + g_1 e)^{p_1} \dots (u_i + g_i e)^{p_i} w^{p_{i+1}}}{p_1! \dots p_i! p_{i+1}!} \\ & \quad \times \varphi_{p_1, \dots, p_i, p_{i+1}} [u_1 + g_1(e + h), \dots, u_i + g_i(e + h), w] \\ & = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{(m - n + k) \dots (m - n + 1)}{k!} \\ & \quad \times e^k h^{n-k} \sum_{p_1 + \dots + p_i + p_{i+1} = n-k} \frac{u_1^{p_1} \dots u_i^{p_i} w^{p_{i+1}}}{p_1! \dots p_i! p_{i+1}!} \\ & \quad \times \varphi_{p_1, \dots, p_i, p_{i+1}} [u_1 + g_1(e + h), \dots, u_i + g_i(e + h), w]. \end{aligned} \right.$$

et

$$(B') \left\{ \begin{aligned} & (e+h)^n \sum_{p_1+\dots+p_i+p_{i+1}=m-n} \frac{u_1^{p_1} \dots u_i^{p_i} w^{p_{i+1}}}{p_1! \dots p_i! p_{i+1}!} \varphi_{p_1, \dots, p_i, p_{i+1}}(u_1+g_1 e, \dots, u_i+g_i e, w) \\ & = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{(m-n+k) \dots (m-n+1)}{k!} e^{n-k} h^k \sum_{p_1+\dots+p_i+p_{i+1}=m-n-k} \frac{u_1^{p_1} \dots u_i^{p_i} w^{p_{i+1}}}{p_1! \dots p_i! p_{i+1}!} \\ & \quad \times \varphi_{p_1, \dots, p_i, p_{i+1}}[u_1+g_1(e+h), \dots, u_i+g_i(e+h), w]. \end{aligned} \right.$$

De ces deux formules, la seconde n'est vraie que si la fonction $\varphi(x_1, \dots, x_i, w)$ est un polynome entier.

6. Des deux formules (A'), (B') on peut déduire plusieurs autres formules en donnant des valeurs particulières aux différentes quantités qui y entrent. Parmi ces formules, nous citons les suivantes.

Si l'on pose $h = 0$ dans les formules (A'), on obtient la formule connue d'Euler

$$\begin{aligned} & \sum_{p_1+\dots+p_i+p_{i+1}=n} \frac{(u_1+g_1 e)^{p_1} \dots (u_i+g_i e)^{p_i} w^{p_{i+1}}}{p_1! \dots p_i! p_{i+1}!} \varphi_{p_1, \dots, p_i, p_{i+1}}[u_1+g_1 e, \dots, u_i+g_i e, w] \\ & = \frac{m(m-1) \dots (m-n+1)}{n!} \varphi[u_1+g_1 e, \dots, u_i+g_i e, w]. \end{aligned}$$

En posant aussi $u_k = g_k \alpha$ ($k = 1, 2, \dots, i$) et en remplaçant w par $w(\alpha + e + h)$ dans la formule (A'), on aura la formule

$$(I) \left\{ \begin{aligned} & (e+h)^n \sum_{p_1+\dots+p_i+p_{i+1}=n} (\alpha+e)^{n-p_{i+1}} (\alpha+e+h)^{p_{i+1}} \frac{g_1^{p_1} \dots g_i^{p_i} w^{p_{i+1}}}{p_1! \dots p_i! p_{i+1}!} \varphi_{p_1, \dots, p_i, p_{i+1}}(g_1, \dots, g_i, w) \\ & = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{(m-n+k) \dots (m-n+1)}{k!} e^k h^{n-k} \sum_{p_1+\dots+p_i+p_{i+1}=n-k} \alpha^{n-k-p_{i+1}} (\alpha+e+h)^{k+p_{i+1}} \frac{g_1^{p_1} \dots g_i^{p_i} w^{p_{i+1}}}{p_1! \dots p_i! p_{i+1}!} \varphi_{p_1, \dots, p_i, p_{i+1}}(g_1, \dots, g_i, w). \end{aligned} \right.$$

En supposant $\alpha = 0$ dans cette formule, on aura la formule

$$(2) \left\{ \begin{aligned} & \sum_{p_1+\dots+p_i+p_{i+1}=n} (e+h)^{p_{i+1}} e^{n-p_{i+1}} \frac{g_1^{p_1} \dots g_i^{p_i} w^{p_{i+1}}}{p_1! \dots p_i! p_{i+1}!} \varphi_{p_1, \dots, p_i, p_{i+1}}(g_1, \dots, g_i, w) \\ & = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{(m-n+k) \dots (m-n+1)}{k! (n-k)!} e^k h^{n-k} (e+h)^{-k} \varphi_{0, \dots, 0, n-k}(g_1, \dots, g_i, w). \end{aligned} \right.$$

En supposant de même $a + e = 0$ dans la formule (1), on aura la formule

$$(3) \left\{ \begin{aligned} & \frac{(e+h)^n \omega^n}{n!} \varphi_{0, \dots, 0, n}(g_1, \dots, g_i, \omega) = \sum_{k=0}^{h-n} \frac{(m-n+k) \dots (m-n+1)}{k!} \\ & \times \sum_{p_1 + \dots + p_i + p_{i+1} = n-k} (-1)^{n-k-p_{i+1}} e^{n-p_{i+1}} h^{p_{i+1}} \frac{g_1^{p_1} \dots g_i^{p_i} \omega^{p_{i+1}}}{p_1! \dots p_i! p_{i+1}!} \varphi_{p_1, \dots, p_i, p_{i+1}}(g_1, \dots, g_i, \omega). \end{aligned} \right.$$

La formule (2), si l'on suppose $e + h = 0$, nous donne la formule

$$(4) \left\{ \begin{aligned} & \sum_{p_1 + \dots + p_i = n} \frac{g_1^{p_1} \dots g_i^{p_i}}{p_1! \dots p_i!} \varphi_{p_1, \dots, p_i, 0}(g_1, \dots, g_i, \omega) \\ & = \sum_{k=0}^{h-n} (-1)^{n-k} \frac{(m-n+k) \dots (m-n+1)}{k!} \omega^{n-k} \varphi_{0, \dots, 0, n-k}(g_1, \dots, g_i, \omega). \end{aligned} \right.$$

La même formule (2), si l'on égale les coefficients de

$$e^k h^{n-k} (0, \dots, k, \dots, n)$$

dans les deux membres, nous donne la formule

$$(5) \left\{ \begin{aligned} & \sum_{p_1 + \dots + p_i + p_{i+1} = n} C_{p_{i+1}}^{n-k} \frac{g_1^{p_1} \dots g_i^{p_i} \omega^{p_{i+1}}}{p_1! \dots p_i! p_{i+1}!} \varphi_{p_1, \dots, p_i, p_{i+1}}(g_1, \dots, g_i, \omega) \\ & = \frac{(m-n+k) \dots (m-n+1)}{k! (n-k)!} \omega^{n-k} \varphi_{0, \dots, 0, n-k}(g_1, \dots, g_i, \omega). \end{aligned} \right.$$

dans laquelle $C_{p_{i+1}}^{n-k} = \frac{p_{i+1}(p_{i+1}-1) \dots (p_{i+1}-n+k+1)}{(n-k)!}$ doit être considéré égal à zéro si $p_{i+1} < n-k$.

Nous ajoutons encore la formule

$$(6) \left\{ \begin{aligned} & \frac{\omega^n}{n!} \varphi_{0, \dots, 0, n}(g_1, \dots, g_i, \omega) = \sum_{k=0}^{h-n} (-1)^{n-k} \frac{(m-n+k) \dots (m-n+1)}{k!} \\ & \times \sum_{p_1 + \dots + p_i = n-k} \frac{g_1^{p_1} \dots g_i^{p_i}}{p_1! \dots p_i!} \varphi_{p_1, \dots, p_i, 0}(g_1, \dots, g_i, \omega), \end{aligned} \right.$$

qui s'obtient si l'on suppose $h = 0$ dans la formule (3).

Les formules (4) et (6), dans le cas $i = 1$, donnent les for-

mules

$$g^n \varphi_{n,0}(g, w) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k} (m-n-k) \dots (m-n+1) C_n^k w^{n-k} \varphi_{0,n-k}(g, w),$$

$$w^n \varphi_{0,n}(g, w) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k} (m-n-k) \dots (m-n+1) C_n^k g^{n-k} \varphi_{n-k,0}(g, w),$$

qui ne diffèrent entre eux que par le changement des deux variables g, w et qui peuvent être utiles pour le calcul des dérivées, par rapport à l'une des variables, d'une fonction homogène de deux variables, dont les dérivées par rapport à l'autre variable se calculent aisément.

L'examen du système complet des formules qui se déduisent des deux propositions I et II (n° 3), sort des limites de ce travail. Nous laissons au lecteur cet examen qui, probablement, conduira à des formules utiles.

II.

7. LEMME. — *Si d'une suite des $m+1$ quantités réelles*

$$(1) \quad a_0, \dots, a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_{n-1}, a_n, \dots, a_m$$

on forme la suite de $m+2$ quantités

$$(2) \quad \begin{cases} a_0, \dots, a_k, e_k a_k + h_{k+1} a_{k+1}, e_{k+1} a_{k+1} + h_{k+2} a_{k+2}, \dots \\ e_{n-1} a_{n-1} + h_n a_n, a_n, \dots, a_m \end{cases}$$

(où $e_k, e_{k+1}, \dots, e_{n-1}, h_{k+1}, h_{k+2}, \dots, h_n$ sont des quantités arbitraires réelles et positives) le nombre des variations que présente la suite des $m+2$ quantités (2) est moindre d'un nombre pair ou nul du nombre des variations que présente la suite des $m+1$ quantités primitives (1).

La démonstration de ce lemme est une conséquence immédiate des considérations suivantes :

a. Les variations des quantités $a_0, \dots, a_k$ et $a_n, \dots, a_m$, ne sont pas altérées.

b. Les couples des variations qui existent dans les portions de la suite des quantités

$$(3) \quad a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_{n-1}, a_n,$$

où entre deux quantités du même signe existe une quantité de signe différent, peuvent être conservés, dans la suite des quantités

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_k, \quad e_k a_k + h_{k+1} a_{k+1}, \quad e_{k+1} a_{k+1} + h_{k+2} a_{k+2}, \quad \dots, \\ e_{n-1} a_{n-1} + h_n a_n. \end{array} \right.$$

mais peuvent aussi disparaître.

c. Les variations qui existent dans la suite de quantités (3), sous des conditions différentes de celles du cas précédent, se conservent dans la suite des quantités (4).

8. COROLLAIRE. — *La multiplication d'un polynome entier par $(x+a)$ ($a > 0$) diminue le nombre des variations de ces coefficients d'un nombre pair ou nul.*

9. En se basant sur le lemme précédent et sur les deux propositions I et II (n° 3) on peut démontrer le théorème suivant que M. Cyp. Stéphanos a proposé. (Voir *Interm.*, t. VIII, avril 1900, p. 117).

THÉORÈME. — *Si l'on transforme un polynome entier $F(x, 1)$ du degré m successivement par les formules*

$$x = a + e + \frac{h}{z+1}, \quad x = a + \frac{e}{z+1}, \quad x = a + \frac{e+h}{z+1}$$

(a est un nombre réel quelconque et e, h des nombres réels du même signe) et que l'on représente par

$$V_{a+e}^{a+e+h}, \quad V_a^{a+e}, \quad V_a^{a+e+h}$$

les nombres des variations que présentent les coefficients des polynomes transformés

$$(a) \quad (z+1)^m F\left(a + e + \frac{h}{z+1}, 1\right),$$

$$(b) \quad (z+1)^m F\left(a + \frac{e}{z+1}, 1\right),$$

$$(c) \quad (z+1)^m F\left(a + \frac{e+h}{z+1}, 1\right),$$

développés suivant les puissances de z ; entre ces nombres existe

la relation

$$V_a^{a+c} V_{a+c}^{a+c+h} = V_a^{a+c+h},$$

k étant un nombre entier positif ou nul.

Pour démontrer ce théorème, on écrit, dans une suite, les coefficients du développement suivant les puissances croissantes de z du polynome (c) et puis on les divise par les coefficients des mêmes puissances de z dans le développement de $(z+1)^m$, ce qui n'altère pas le nombre V_a^{a+c+h} des variations qu'ils présentent.

Sur la suite de ces $m+1$ quotients des coefficients, on applique successivement m fois le lemme précédent (n° 7) de la manière suivante. Dans toutes ces applications on prend

$$e_k = e_{k+1} = \dots = e_{n-1} = \frac{e}{e+h} < 0, \quad h_{k+1} = h_{k+2} = \dots \quad h_n = \frac{h}{e-h} > 0.$$

Dans la première application, on applique le lemme sur tous les $m+1$ termes de la suite. Dans chacune des $m-1$ applications suivantes on applique le lemme seulement sur les termes consécutifs de la suite qui n'entrent pas dans la suite qui précède ; c'est-à-dire on applique le lemme sur les $m+2-p$ termes moyens de chacune des suites successives, p étant le nombre qui signifie le rang de l'application du lemme.

Toutes ces m applications du lemme étant effectuées, nous formerons une suite ayant $2m+1$ termes. Puisque, maintenant, m étant entier,

$$\frac{(m-n+k) \dots (m-n+1)}{k!} = C_m^n \frac{C_n^{n-k}}{C_m^{n-k}},$$

il est facile de voir que ces $2m+1$ termes, d'après les propositions I et II (n° 3), seront les coefficients du polynome (a) ordonné suivant les puissances croissantes de z , divisés par les coefficients de mêmes puissances de z dans le développement de $(z+1)^m$, et puis les coefficients du polynome (b) pareillement ordonné et également divisés par les coefficients des mêmes puissances de z dans le développement de $(z+1)^m$. La totalité de ces coefficients sera $2m+1$ et pas $2m+2$, puisque le dernier coefficient (de z^m) du premier polynome (a) et le premier coefficient

(terme constant) du second polynome (b) sont tous les deux égaux au $F(a + e)$ et réunis en un seul, ce qui n'altère pas la somme $V_a^{a+e} + V_{a+e}^{a+e+h}$ des variations des coefficients de ces deux polynomes (a) et (b).

Si maintenant nous nous rappelons que chaque application du lemme (7) sur une suite des quantités diminue les variations de ces quantités d'un nombre pair ou nul, nous serons sûrs de la vérité de l'égalité

$$V_a^{a+e} + V_{a+e}^{a+e+h} - 2h = V_a^{a+e+h} \quad (k \geq 0),$$

que nous voulions démontrer.

10. L'utilité du théorème précédent consiste en ce que le nombre V_a^{a+e} des variations du polynome (6) (n° 9), ordonné suivant les puissances de z , comme Jacobi l'a d'abord remarqué, est une limite supérieure (plus grand d'un nombre pair ou nul) du nombre des racines réelles du polynome $F(x)$ qui sont contenues entre les nombres réels a et $a + e$ (puisque la formule de la transformation étant $x = a + \frac{e}{z+1}$ pour $x = a$, $x = a + e$, on a $z = \infty$, $z = 0$).

Cela considéré, on voit que, quand il s'agit d'appliquer la règle de Jacobi pour trouver une limite supérieure du nombre des racines réelles d'un polynome $F(x)$ qui sont contenues entre deux nombres réels a et b ($b > a$), il est préférable de partager la portion $b - a$ en deux ou plusieurs parties et d'appliquer la règle de Jacobi à chacune de ces parties. Cela fait, il est probable de trouver une limite plus petite du nombre des racines réelles du polynome $F(x)$ qui sont contenues entre a et b .

11. La démonstration du théorème (9) étant générale, si l'on suppose $a = 0$ et $h = A$ ($\lim A = \infty$) le polynome (c) (n° 9) deviendra

$$(z+1)^m F\left(\frac{e-A}{z+1}, w\right) \quad (w=1),$$

et les parties principales des coefficients de ce polynome, ordonné suivant les puissances croissantes de z , seront les coefficients de

$F(x, 1)$, inversement ordonné, multipliés respectivement par $A^m, A^{m-1}, \dots, A, 1$.

De même, le polynome (a) (n° 9) deviendra

$$(\mathfrak{z} + 1)^m F\left(e + \frac{A}{\mathfrak{z} + 1}, w\right) \quad (w = 1),$$

et les parties principales des coefficients de ce polynome, ordonné suivant les puissances croissantes de $\mathfrak{z}$, seront

$$A^m \frac{F_{m,0}(e, 1)}{m!}, \quad A^{m-1} \frac{F_{m-1,0}(e, 1)}{(m-1)!}, \quad \dots, \quad A \frac{F_{1,0}(e, 1)}{1!}, \quad F(e, 1).$$

Enfin, le polynome (b) (n° 9) deviendra

$$\begin{aligned} & (\mathfrak{z} + 1)^m F\left(\frac{e}{\mathfrak{z} + 1}, 1\right) \\ &= F(e, 1) + \frac{F_{0,1}(e, 1)}{1!} \mathfrak{z} + \dots + \frac{F_{0,m-1}(e, 1)}{(m-1)!} \mathfrak{z}^{m-1} + \frac{F_{0,m}(e, 1)}{m!} \mathfrak{z}^m. \end{aligned}$$

Puisque, maintenant,

$$V_0^c + V_c^A + 2k = V_0^A \quad (k \geq 0),$$

il s'ensuit que le nombre des variations des coefficients d'un polynome $F(x, w)$, ($w = 1$), surpasse d'un nombre pair ou nul la somme des variations que présentent, pour une valeur quelconque positive e de x , la suite des dérivées de $F(x, w)$ par rapport à x et celle des dérivées par rapport à la variable de l'homogénéité w .

C'est pour ce cas ($a = 0$), ($h = \infty$), que j'avais d'abord démontré le théorème (9). J'avais considéré que des coefficients d'un polynome

$$F(x, w) = C_m^0 A_0 x^m + C_m^1 A_1 x^{m-1} w + \dots + C_m^{m-1} A_{m-1} x w^{m-1} + C_m^m A_m w^m \quad (w = 1),$$

divisés respectivement par $C_m^0, C_m^1, \dots, C_m^{m-1}, C_m^m$, on peut former la suite des dérivées

$$\begin{aligned} & \frac{F_{m,0}(e, 1)}{m!}, \quad \frac{F_{m-1,0}(e, 1)}{(m-1)!}, \quad \dots, \quad \frac{F_{1,0}(e, 1)}{1!}, \\ & F(e, 1), \quad \frac{F_{0,1}(e, 1)}{1!}, \quad \dots, \quad \frac{F_{0,m-1}(e, 1)}{(m-1)!}, \quad \frac{F_{0,m}(e, 1)}{m!}, \end{aligned}$$

en appliquant m fois successivement le lemme (n° 7), comme dans la démonstration du théorème (n° 9), mais en prenant dans toutes ces applications

$$e_k = e_{k+1} = \dots = e_{n-1} = e, \quad h_{k+1} = h_{k+2} = \dots = h_n = 1$$

et pas

$$e_k = e_{k+1} = \dots = e_{n-1} = \frac{e}{e+h}, \quad h_{k+1} = h_{k+2} = \dots = h_n = \frac{h}{e+h},$$

comme dans le cas général (1).

12. Si l'on représente par R_a^{a+e} le nombre des racines réelles d'un polynôme $F(x, 1)$, comprises entre les nombres réels a et $a+e$ ($e > 0$), d'après le théorème (n° 9) on aura

$$V_a^\infty - V_{a+e}^\infty = V_a^{a+e} + 2k = R_a^{a+e} + 2k' + 2k \quad (k \geq 0, k' \geq 0).$$

On déduit de ces deux égalités que :

1° Du théorème du (n° 9) se déduit le théorème de Budan-Fourier;

2° Le résultat V_a^{a+e} , auquel conduit la règle de Jacobi, est plus approché, en général, de R_a^{a+e} que le résultat $V_a^\infty - V_{a+e}^\infty$, obtenu par le théorème de Budan-Fourier.

On trouve ces deux remarques dans la question envoyée à l'*Intermédiaire des Mathématiciens*, par M. Cyp. Stéphanos.

(1) C'est sous les conditions suivantes que j'avais fait cette démonstration particulière (cas $a = 0, h = \infty$), qui équivalait à une démonstration générale du théorème (n° 9), mais ne donne pas l'occasion de considérer les formules (A) et (B) de la première partie de ce travail.

M. Cyp. Stéphanos, quelque temps après l'envoi de la question à l'*Intermédiaire*, m'avait dit qu'il avait démontré son théorème et il m'avait proposé de le démontrer aussi. Alors j'avais fait la démonstration antérieure pour le cas ($a = 0, h = \infty$) qui se trouva, comme M. Cyp. Stéphanos m'avait dit, être la même que la sienne. C'est pour cela que je ne l'avais pas publiée.

SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ET LA THÉORIE DES ENSEMBLES;

Par M. EDMOND MAILLET.

I.

Nous avons montré antérieurement ⁽¹⁾ l'existence de catégories de fonctions ne satisfaisant à aucune équation différentielle rationnelle, de même que Liouville avait établi ⁽²⁾ l'existence d'une infinité de nombres transcendants. M. Cantor ⁽³⁾ a obtenu un résultat analogue à celui de Liouville, mais moins parfait, en se basant sur la théorie des ensembles : *L'ensemble des nombres algébriques est dénombrable, tandis que l'ensemble des nombres transcendants a la puissance du continu.*

Nous nous proposons ici d'étendre aux équations différentielles rationnelles et à d'autres analogues, grâce à des conventions convenables, le théorème de M. Cantor.

II.

Soit

$$(1) \quad f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^k y}{dx^k}\right) = 0 = \sum a_{l, i_0, \dots, i_k} x^l y^{i_0} \dots y^{i_k}$$

une équation différentielle dont les coefficients sont des polynômes entiers en x de degré $\leq k$, et dont les paramètres sont ou nuls, ou indéterminés, mais $\neq 0$.

La solution générale aux environs de $x = 0$ est

$$(2) \quad y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_k, a_{l, i_0, \dots, i_k}),$$

$C_1, C_2, \dots, C_k$ étant des constantes arbitraires.

Considérons les solutions obtenues en donnant à un nombre λ quelconque de ces k constantes la valeur 0 (λ prenant successive-

⁽¹⁾ *Journ. de Math.*, 1902, p. 137.

⁽²⁾ *Journ. de Math.*, 1851, et BOREL, *Leçons sur la théorie des fonctions*, 1898, p. 26.

⁽³⁾ BOREL, *Id.*, p. 24.

ment les valeurs 0, 1, 2, ..., k). Le nombre des solutions Φ distinctes ainsi obtenues est fini.

Considérons alors les équations différentielles de la forme (1) de degrés I, $j_0, j_1, \dots, j_k \leq \infty$ en $x, y, \dots, y^{(k)}$, en ne regardant comme distinctes que celles où les paramètres indéterminés ne sont pas tous coefficients des mêmes termes en $x^l y^{j_0} \dots y^{(k)j_k}$. Le nombre N des solutions Φ correspondantes est limité.

Il en résulte immédiatement que l'ensemble des solutions Φ distinctes, compté comme on vient de le faire, est dénombrable.

Considérons au contraire les fonctions (1)

$$(3) \quad y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

telles que

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < h < 1 :$$

Ces séries sont toutes convergentes.

Attribuons aux paramètres $a_1, \dots, a_n, \dots$ des valeurs nulles ou indéterminées. L'ensemble des séries ainsi obtenues a évidemment la même puissance que l'ensemble des nombres

$$\frac{\gamma_1}{2} + \frac{\gamma_2}{2^2} + \dots + \frac{\gamma_n}{2^n} + \dots,$$

où $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots$ prennent les valeurs 0 et 1 dans un ordre quelconque, c'est-à-dire que l'ensemble de tous les nombres compris entre 0 et 1 exprimé dans le système de numération de base 2 : l'ensemble de ces séries a donc la puissance du continu.

Donc, parmi les séries y précédentes, il y a un ensemble de

(1) On peut aussi écrire la solution générale de l'équation (1) sous la forme

$$(1 \text{ bis}) \quad y = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_t x_t + \varphi_1 x_{t+1} + \dots + \varphi_\lambda x_{t+\lambda} + \dots$$

où les paramètres $\alpha_0, \dots, \alpha_t$ sont arbitraires en tout ou en partie, et $\varphi_1, \dots, \varphi_\lambda, \dots$, sont des fonctions des paramètres $\alpha_0, \dots, \alpha_t$.

La série la plus générale de la forme (3) comprendra la série

$$(2 \text{ bis}) \quad y = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_t x_t + (\varphi_1 + \alpha_{t+1}) x_{t+1} + \dots + (\varphi_\lambda + \alpha_{t+\lambda}) x_{t+\lambda} + \dots,$$

où $\alpha_{t+1}, \dots, \alpha_{t+\lambda}, \dots$ sont des paramètres arbitraires.

Nous classerons dans un même type les séries (1 bis) pour lesquelles ceux des coefficients $\alpha_0, \dots, \alpha_t$ qui sont nuls ont les mêmes indices; le nombre des types est fini; nous classerons dans un même type les séries (2 bis) pour lesquelles ceux des coefficients $\alpha_0, \dots, \alpha_{t+\lambda}, \dots$ qui sont nuls ont les mêmes indices; l'ensemble de ces types forme un ensemble ayant la puissance du continu.

séries ayant la puissance du continu et qui ne sont pas solutions des équations différentielles rationnelles ⁽¹⁾.

Le raisonnement s'applique encore aux séries convergentes aux environs d'un point quelconque $x = x_0$.

Ceci n'est pas spécial aux séries (3) : tout ensemble de séries qui aura, d'après les mêmes définitions, la puissance du continu, jouira de la même propriété ; on pourra ainsi appliquer ce qui précède aux fonctions entières, aux fonctions entières de genre fini, aux fonctions entières d'un ordre déterminé. Il suffira de vérifier ce dernier point.

Soit

$$(1) \quad y = b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n + \dots,$$

une fonction entière d'ordre ρ fini : on peut à volonté y supposer, quel que soit n , $b_n \neq 0$ ou nul ; le même raisonnement restera alors applicable.

On peut même l'appliquer à des catégories encore plus spéciales de fonctions entières ; par exemple aux séries

$$y = \frac{\gamma_1 x}{1!} + \frac{\gamma_2 x^2}{2!} + \dots + \frac{\gamma_n x^n}{n!} + \dots,$$

où $\gamma_n = 0$ ou $\gamma_n \neq 0$ (γ_n limité, mais indéterminé) à volonté ; ou encore aux fonctions entières à coefficients rationnels, et, comme nous le verrons plus loin, aux fonctions entières à croissance régulière.

Il en résulte *a fortiori* que les équations différentielles à paramètres rationnels forment un ensemble dénombrable, tout comme leurs solutions, tandis que les séries à coefficients rationnels, même jouissant de propriétés particulières convenables, forment un ensemble ayant la puissance du continu ⁽²⁾.

On peut obtenir des théorèmes semblables pour les séries divergentes sommables.

(1) On peut dire encore que celles des séries y qui ne sont pas solutions des équations différentielles (1) de degré $\leq \rho$, quel que soit ρ , forment un ensemble ayant la puissance du continu.

(2) Nous établissons au fond quelque chose d'un peu plus précis : nous formons, pour chaque catégorie de séries, non un ensemble de séries, mais un ensemble

Considérons les séries divergentes

$$\sum_0^{\infty} a_n z^n = \frac{1}{p} \int_0^{\infty} e^{-x^p} x^{\frac{1}{p}-1} F(zx) dx,$$

l'intégrale étant prise le long d'un chemin d'intégration convenable et

$$F(z) = \sum_0^{\infty} \frac{a_n z^n}{\Gamma(pn+1)}.$$

$F(z)$ étant une fonction entière d'ordre réel p inférieur à l'ordre apparent d ($dp \geq 1$),

$$F(z) = e^{a_0 z^d} \Phi(z).$$

Ces séries dépendent d'une infinité dénombrable de coefficients arbitraires pour chaque valeur de p et de d : donc, pour chaque valeur de p et de d , l'ensemble de ces séries a la puissance du continu et il n'y en a qu'une infinité dénombrable qui puisse être solution d'une équation différentielle ⁽¹⁾.

On peut aussi considérer les solutions fournies par les développements en fraction continue convergente ou divergente: prenons par exemple les fractions continues de Stieltjes

$$\frac{1}{\alpha_1 z + \frac{1}{\alpha_2 + \frac{1}{\alpha_3 z + \dots}}}$$

ou, ce qui revient au même, les séries divergentes

$$c_0 - \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} - \frac{c_3}{z^3} + \dots$$

On arrive à des résultats analogues.

de types de séries, les séries d'un même type étant caractérisées par ce fait que les paramètres nuls pour ces séries ont les mêmes indices. Par conséquent, nous établissons en fait ceci; c'est que, dans chaque catégorie de séries, les types comprenant des séries susceptibles d'être solutions sont en nombre dénombrable, alors que l'ensemble de ces types a la puissance du continu.

⁽¹⁾ Les solutions divergentes formelles aux environs de $x = 0$ dépendent d'un plus k paramètres arbitraires pour les équations d'ordre k . On le vérifie par substitution directe.

Prenons plus particulièrement les séries de Stieltjes définies de la manière suivante :

Soit la fonction entière d'ordre apparent $d >$ l'ordre réel ρ

$$F(z) = e^{-a_0 z^d} \Phi(z),$$

comme précédemment, avec a_0 réel > 1 .

Prenons

$$\Phi(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots$$

$$\text{et, si } b_i \leq \frac{1}{(m!)^{\frac{1}{\rho}} z},$$

$$|F(z)| \leq A_1 e^{z^{d-1-a_0}},$$

en sorte que l'exposant de $F(z)$ est constamment négatif pour z positif. On a toujours

$$|F(z)| \leq A e^{-m\sqrt{z}},$$

quel que soit z positif, et $\int_0^\infty \frac{F(u) du}{z+u}$ est ⁽¹⁾ la valeur d'une série de Stieltjes.

A chaque valeur de d et ρ correspond un ensemble de séries $F(z)$ et de fonctions de Stieltjes ayant la puissance du continu.

Les séries de cet ensemble qui peuvent être solutions d'équations différentielles rationnelles forment un ensemble dénombrable.

Les mêmes propriétés ont lieu pour toutes les séries précédemment considérées quand on y suppose certaines conditions complémentaires remplies de façon que le nouvel ensemble obtenu ait encore la puissance du continu. Ainsi on pourra supposer que, dans ces séries, les coefficients d'indices $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p, \dots$ (p croissant indéfiniment) soient tous nuls, le nombre des coefficients non nuls restant infini. Pour un système de valeurs donné de $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p, \dots$ un même théorème a lieu.

Enfin, un raisonnement de même nature s'applique aux équations différentielles

$$(5) \quad f(x, y, y', \dots, y^{(h)}) = \Sigma A y^{i_0} \dots, \quad y^{(h+i_k)} = 0,$$

(1) BOREL, *Leçons sur les séries divergentes*, p. 72 et suivantes.

A étant un polynome entier en $x, \xi_1, \dots, \xi_l$ (l limité) et $\xi_1, \dots, \xi_l$ des fonctions de x , les mêmes pour toutes les équations (5) : par exemple $\log x, \log \log x, \dots, e^x, e^{e^x}, \dots, p(x), \zeta(x), \sigma(x), p'(x), \dots$.

Le nombre des résultats analogues est pour ainsi dire indéfini.

On peut résumer ce qui précède dans l'énoncé suivant;

THÉORÈME. — *Considérons l'ensemble des séries*

$$(I) \quad y = b_0 + b_1(x - x_0) + \dots + b_n(x - x_0)^n + \dots$$

jouissant ou non de certaines propriétés particulières convenables. Ne regardons comme distinctes, pour une valeur de x_0 donnée, deux de ces séries que si un paramètre au moins de même indice nul dans l'une ne l'est pas dans l'autre, les paramètres non nuls restant indéterminés; au contraire ne distinguons pas deux séries pour lesquelles les paramètres nuls ont tous mêmes indices.

Considérons d'autre part des fonctions $\xi_1, \dots, \xi_l$ (l limité) de x , par exemple $\log x, \log \log x, \dots, e^x, e^{e^x}, \dots, p(x), \zeta(x), \dots$, et les équations différentielles

$$(II) \quad f(x, y, y', \dots, y^{(k)}) = \sum A y^{i_1} \dots y^{(k)i_k} = 0,$$

les A étant des polynomes de degré limité en $x, \xi_1, \dots, \xi_l$, de coefficients $\alpha, \beta, \dots$. Regardons comme distinctes les solutions de (II),

$$\varphi(\alpha, \beta, \dots, C_1, \dots, C_k).$$

qui dépendent des paramètres $\alpha, \beta, \dots$, et de k constantes arbitraires, si un paramètre ou une constante de même indice nul dans l'une ne l'est pas dans l'autre, les paramètres ou constantes non nuls restant indéterminés; au contraire, ne distinguons pas deux solutions pour lesquelles les paramètres nuls ont tous mêmes indices.

L'ensemble des solutions convergentes ou divergentes de (II) est dénombrable. L'ensemble des séries (I) pour x_0 donné a la puissance du continu dans les divers cas suivants dont certains sont conséquences des autres :

1° (I) est une série convergente de rayon de convergence donné;

2° (I) est une fonction entière ou une fonction entière d'ordre fini déterminé;

3° (I) jouit des mêmes propriétés que ci-dessus, mais a ses coefficients rationnels;

4° (I) est une série divergente

$$\sum_0^{\infty} a_n z^n = \frac{1}{p} \int_0^x e^{-x/p} x^{p-1} F(x) dx,$$

sommable, avec

$$F(z) = e^{a_0 z^d} \Phi(z),$$

$\Phi(z)$ étant une fonction entière d'ordre ρ inférieur à l'ordre apparent d'entier, ρ et d étant donnés ($d\rho \geq 1$);

5° (I) appartient à certaines catégories de fractions continues et de séries divergentes de Stieltjes; ainsi si

$$F(z) = e^{-a_0 z^d} \Phi(z), \quad a_0 \text{ réel } > 1,$$

$$\Phi(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots$$

$$b_i = \frac{1}{(m^i)^2} \frac{1}{1+z},$$

les mêmes propriétés ont lieu pour les séries de Stieltjes dont la valeur est

$$\int_0^x \frac{F(u) du}{z-u},$$

pour chaque valeur de ρ et d (d entier $> \rho$).

Enfin les mêmes propriétés restent vraies quand on suppose, dans les séries précédentes, soit tous les coefficients rationnels, soit une infinité dénombrable de coefficients d'indices donnés nuls, des coefficients en nombre infini restant à volonté nuls ou indéterminés.

SUR LE MOUVEMENT VERTICAL D'UN PROJECTILE DANS UN MILIEU RÉSISTANT;

Par M. L. LECORNU.

La hauteur à laquelle s'élève un corps pesant projeté verticalement de bas en haut dépend de sa vitesse initiale, de sa masse et de la résistance de l'air. Parmi plusieurs projectiles sphériques de même dimension, lancés avec la même vitesse initiale, le plus dense est évidemment celui qui doit monter le plus haut; mais, au lieu de supposer connue la vitesse initiale, on peut se donner le travail dépensé pour créer cette vitesse (par exemple, au moyen de la détente d'un ressort), et les choses se passent alors d'une façon moins simple. Si l'on prend une masse infiniment légère, une dépense finie de travail lui communique une vitesse infiniment grande : la résistance de l'air, pourvu qu'elle croisse sans limite avec la vitesse, absorbe, au bout d'un parcours infiniment petit, la force vive initiale, et la hauteur d'ascension a une limite nulle. Si l'on prend, au contraire, une masse infiniment grande, la vitesse initiale est infiniment petite et, dans ce cas encore, le mobile ne peut s'élever. On conçoit, d'après cela, que, pour un projectile de figure donnée et pour chaque valeur du travail dépensé au départ, il doive exister une masse correspondant au maximum d'ascension. Je me propose de calculer cette masse dans l'hypothèse d'une résistance proportionnelle à une puissance constante de la vitesse.

Soit m la masse du corps et soit v sa vitesse au bout du parcours s . Je représente la résistance de l'air par $\lambda g v^{2p}$, λ et p désignant deux constantes positives, d'ailleurs quelconques. L'équation du mouvement peut s'écrire

$$mv \, dv = - mg \, ds - \lambda g v^{2p} \, ds;$$

d'où

$$g \, ds = - \frac{mv \, dv}{m + \lambda v^{2p}}.$$

Si v_0 est la vitesse initiale, la hauteur h à laquelle parvient le mobile est

$$h = \frac{m}{g} \int_0^{v_0} \frac{v \, dv}{m + \lambda v^{2p}},$$

ou bien, en posant $v^2 = v_0^2 x$ et désignant par T le travail $\frac{mv_0^2}{2}$ nécessaire pour créer la vitesse initiale,

$$h = \frac{T}{g} \int_0^1 \frac{dx}{m + \lambda v_0^{2p} x^p}.$$

Faisons

$$\lambda v_0^{2p} = \frac{m}{\alpha},$$

d'où

$$(1) \quad m = \lambda^{\frac{1}{p+1}} (2T)^{\frac{p}{p+1}} \alpha^{\frac{1}{p+1}}.$$

Il vient

$$(2) \quad h = \frac{1}{2g} \left(\frac{2T}{\lambda} \right)^{\frac{1}{p+1}} \alpha^{\frac{p}{p+1}} \int_0^1 \frac{dx}{\alpha + x^p}.$$

Il s'agit de choisir α de façon à rendre maximum le produit

$$\alpha^{\frac{p}{p+1}} \int_0^1 \frac{dx}{\alpha + x^p}.$$

En égalant à zéro la dérivée de ce produit prise par rapport à α , l'on trouve

$$p \int_0^1 \frac{dx}{\alpha + x^p} = (p+1) \alpha \int_0^1 \frac{dx}{[\alpha + x^p]^2}.$$

Mais l'intégration par parties donne

$$(3) \quad \int_0^1 \frac{dx}{\alpha + x^p} = \frac{1}{1+\alpha} - p \int_0^1 \frac{x^p dx}{[\alpha + x^p]^2} = \frac{1}{1+\alpha} + p \int_0^1 \frac{dx}{\alpha + x^p} - p \alpha \int_0^1 \frac{dx}{[\alpha + x^p]^2},$$

ce qui permet de ramener l'équation précédente à la forme très simple

$$(4) \quad \int_0^1 \frac{dx}{\alpha + x^p} = \frac{p+1}{\alpha+1}.$$

Cette équation détermine le coefficient α . On peut l'écrire

$$(5) \quad \int_0^1 \left[\frac{\alpha+1}{\alpha+x^p} - (p+1) \right] dx = 0.$$

La dérivée, par rapport à α , de la fonction entre crochets est

$\frac{x^p - 1}{(\alpha + x^p)^2}$. Comme x demeure comprise entre zéro et un, cette dérivée est constamment négative. L'intégrale (5) décroît donc à mesure que l'on fait croître x . Pour $x = 0$, elle se réduit à

$$\int_0^1 x^{-p} dx = \frac{1}{p+1}.$$

Cette valeur est égale à $+\infty$ ou à $\frac{1}{1-p}$ suivant que p est supérieur ou inférieur à l'unité : dans tous les cas, l'intégrale est positive pour les très petites valeurs de x . Pour $x = \infty$, elle tend vers la valeur négative $-p$. On voit, d'après cela, qu'il existe toujours une racine positive, et une seule, de l'équation (4). On peut, en outre, remarquer que la fonction figurant entre crochets dans l'intégrale (5), égale à $\frac{1}{x} - p$ pour $x = 0$ et à $-p$ pour $x = 1$, décroît constamment quand x varie de 0 à 1, et que, par suite, l'intégrale ne peut s'annuler si la différence $\frac{1}{x} - p$ n'est pas positive. La racine α est donc certainement inférieure à $\frac{1}{p}$.

Pour les valeurs commensurables de p , la quadrature $\int_0^1 \frac{dx}{\alpha + x^p}$ s'effectue sans difficulté; mais on obtient ainsi une fonction transcendante et compliquée, dont la connaissance ne peut guère servir pour la résolution de l'équation (4). Le procédé suivant, applicable aussi bien pour les valeurs incommensurables que pour les valeurs commensurables de p , paraît beaucoup plus pratique.

Partageons l'intervalle de zéro à un en n parties égales. Comme la fonction $\frac{1}{x + x^p}$ est constamment décroissante, si, pour le $k^{\text{ième}}$ intervalle, on substitue successivement à cette fonction chacune des valeurs constantes $\frac{1}{x + \left(\frac{k-1}{n}\right)^p}$ et $\frac{1}{x + \left(\frac{k}{n}\right)^p}$, on diminue ou l'on augmente l'intégrale. La racine cherchée doit donc vérifier les deux inégalités

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{x + \left(\frac{1}{n}\right)^p} + \dots + \frac{1}{x + \left(\frac{n-1}{n}\right)^p} > n \frac{p+1}{x+1}$$

et

$$\frac{1}{x + \left(\frac{1}{n}\right)^p} + \dots + \frac{1}{x + 1} < n \frac{p+1}{x-1},$$

Multiplions les deux membres de chaque inégalité par $x + 1$ et

remplaçons $\frac{x+1}{x - \left(\frac{k}{n}\right)^p}$ par $1 + \frac{\left(\frac{k}{n}\right)^p}{x - \left(\frac{k}{n}\right)^p}$.

Nous obtenons

$$\frac{1}{x} < \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^p}{x - \left(\frac{k}{n}\right)^p} < p,$$

$$\sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^p}{x - \left(\frac{k}{n}\right)^p} < p.$$

En mettant $=$ à la place des signes $>$ et $<$, on a deux équations algébriques donnant pour x des valeurs approchées respectivement par excès et par défaut. L'approximation est d'autant plus grande que le nombre arbitraire n est plus élevé. En particulier, pour $n = 2$, la seconde inégalité montre que x est supérieur à $\frac{1}{p} - \left(\frac{1}{2}\right)^p \frac{p+1}{p}$. Nous avons vu précédemment que x est inférieur à $\frac{1}{p}$.

Après avoir obtenu, par ce moyen ou par un autre, une première valeur de la racine, on peut avoir recours à la méthode des approximations successives et opérer, à cet effet, de la manière suivante :

La valeur provisoire x substituée dans l'équation (4) laisse subsister entre les deux membres une petite différence ε et l'on a

$$\int_0^1 \frac{dx}{x + x^p} = \frac{p+1}{x+1} - \varepsilon.$$

Soit $x + \Delta x$ la valeur exacte. En traitant Δx comme une quan-

tité infiniment petite, on peut écrire

$$\Delta x \int_0^1 \frac{dx}{(\alpha + x^p)^2} = \frac{p+1}{(\alpha+1)^2} \Delta x = \varepsilon,$$

ou bien, en tenant compte des équations (3) et (4),

$$\Delta x = \varepsilon \sqrt{\frac{x(\alpha+1)^2}{p(1-x)}}.$$

Telle est l'expression du terme correctif Δx en fonction de l'erreur ε .

Le nombre α est susceptible d'une interprétation physique assez remarquable. Soit k la limite vers laquelle tendrait la vitesse du mobile, tombant verticalement dans l'air. On obtient cette limite en écrivant que, pour $v = k$, la résistance $\lambda g k^{2p}$ fait équilibre à la pesanteur mg . On a donc $\lambda k^{2p} = m$. Comme α est égal par définition à $\frac{m}{\lambda v_0^{2p}}$, on peut écrire $\alpha = \left(\frac{k}{v_0}\right)^{2p}$. Ce nombre représente donc la puissance $2p$ du rapport entre la vitesse limite k et la vitesse initiale v_0 .

Dès que α est calculé, le problème se trouve entièrement résolu. Nous avons déjà obtenu la masse m qui, d'après la formule (1), a pour valeur

$$m = (\lambda \alpha)^{\frac{1}{p+1}} \cdot 2 T^{p+1}.$$

Le carré de la vitesse initiale est

$$v_0^2 = \frac{2T}{m} = \left(\frac{2T}{\lambda \alpha}\right)^{\frac{1}{p+1}}.$$

La hauteur d'ascension se tire de la formule (2), d'après laquelle

$$h = \frac{1}{2g} \left(\frac{2T}{\lambda}\right)^{\frac{1}{p+1}} \frac{p}{\alpha^{p+1}} \frac{p+1}{\alpha+1}.$$

Si l'on remplace $\left(\frac{2T}{\lambda}\right)^{\frac{1}{p+1}}$ par $v_0^2 \alpha^{\frac{1}{p+1}}$, on obtient

$$h = \frac{v_0^2}{2g} \frac{(p+1)\alpha}{\alpha+1};$$

$\frac{v_0^2}{2g}$ est la hauteur H qui serait atteinte dans le vide avec la même

vitesse initiale v_0 . Comme αp , ainsi que nous l'avons vu, est inférieur à l'unité; il en est de même du rapport $\frac{h}{H}$, résultat qu'il était aisé de prévoir.

La résistance du milieu, à l'instant du départ, a pour expression $\lambda g v_0^{2p}$, c'est-à-dire $\frac{mg}{\alpha}$: on voit qu'elle est égale au poids divisé par α , ce qui donne une nouvelle interprétation du nombre α .

Examinons, en particulier, le cas où la résistance varie proportionnellement au carré de la vitesse. L'exposant p est alors égal à l'unité et l'équation (4) devient

$$\int_0^1 \frac{dx}{\alpha - x} = \frac{1}{\alpha - 1}.$$

ou

$$\text{Log} \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right) = \frac{1}{\alpha - 1}.$$

L'équation $\text{Log}(1 + \beta) = \frac{2\beta}{1 - \beta}$, déduite de la précédente en remplaçant α par $\frac{1}{\beta}$, admet une racine positive qui est sensiblement $\beta = 3,92$. Prenons, en chiffres ronds, avec une erreur de 2 pour 100, $\beta = 4$, d'où $\alpha = \frac{1}{4}$ et appliquons, dans ces conditions, les formules générales établies ci-dessus; nous pouvons alors énoncer les résultats suivants :

Si la résistance de l'air est proportionnelle au carré de la vitesse, et si on lance verticalement, de bas en haut, avec une même dépense de travail, T, des mobiles pesants ayant même forme extérieure, le mobile pour lequel la hauteur d'ascension est la plus grande vérifie les conditions que voici :

Sa masse est égale à $\sqrt{\frac{1}{2} \lambda T}$ et le carré de sa vitesse initiale est égal à $2 \sqrt{\frac{2T}{\lambda}}$;

Sa vitesse initiale est double de la vitesse limite vers laquelle il tendrait en tombant verticalement;

Sa hauteur d'ascension est égale aux $\frac{2}{3}$ de la hauteur à laquelle il parviendrait dans le vide en vertu de sa vitesse initiale;

La résistance qu'il éprouve de la part de l'air, à l'instant initial, est quadruple de son poids.

SUR UNE CLASSE D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES;

Par M. HADAMARD.

1. Les équations que je vais considérer appartiennent à la catégorie des équations du second ordre dans lesquelles y'' est rationnel en y' . Les remarques que j'ai à présenter à leur égard sont, comme on va le voir, tout à fait élémentaires et presque évidentes par elles-mêmes, et ne peuvent, par conséquent, prétendre apporter un complément notable aux connaissances que les beaux travaux de M. Painlevé ont permis d'acquérir sur ce sujet. Leur simplicité même m'a paru, toutefois, leur donner un intérêt suffisant pour que je les mentionne ici.

Parmi les équations différentielles du second ordre

$$(1) \quad y'' = R(y', x, y) = \frac{P(y', x, y)}{Q(y', x, y)},$$

telles que y'' , exprimé en fonctions de x, y, y' , soit rationnel par rapport à y' , envisageons, comme l'a fait à plusieurs reprises M. Painlevé ⁽¹⁾, celles dont l'intégrale générale peut être mise sous forme algébrique par rapport aux constantes d'intégration a et b , c'est-à-dire sous la forme

$$(2) \quad F(x, y, a, b) = 0,$$

F étant un polynôme entier en a, b dont les coefficients sont des fonctions de x et de y .

Ces fonctions, ainsi que celles qui figurent dans la fonction R , sont d'ailleurs tout à fait quelconques, analytiques ou non.

Dans le second cas, cependant, nous leur imposons certaines conditions simples, toujours vérifiées par les fonctions analytiques : outre que nous admettrons l'existence de leurs dérivées partielles, au moins jusqu'à un ordre suffisamment élevé, nous excluons le cas où une équation aux dérivées partielles du second ordre, algébrique par rapport à ces fonctions et ne contenant d'autre élément variable qu'elles et leurs dérivées, serait vérifiée constamment dans une certaine région du plan des xy , tout en ne l'étant pas ailleurs.

(1) Voir notamment *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CXIX, 1894, p. 37, et t. CXXIV, 1897, p. 36.

Si l'on considère x, y comme données et a, b comme des coordonnées courantes, l'équation (2) représente une courbe algébrique C, lieu du point (a, b) tel que l'intégrale passe par un point (x, y) donné. Je remarquerai, en passant, qu'il y aurait sans doute intérêt à étudier l'équation différentielle de ces courbes, à savoir celle qui définit b comme fonction de a , lorsque x et y sont regardés comme des constantes arbitraires, et que l'on peut nommer la *corrélatrice* de l'équation différentielle donnée. Cette équation (définie, à une transformation ponctuelle près, lorsqu'on donne l'équation différentielle primitive) se déduit, en effet, de la première par la transformation de contact que définit l'équation (2) et qui se réduit à la transformation par polaires réciproques lorsque celle-ci a la forme

$$ax + by + 1 = 0,$$

c'est-à-dire lorsque l'équation donnée est $y'' = 0$.

D'après cela, il serait naturel de nommer les courbes C les *intégrales corrélatives* de l'équation (1).

2. D'après la forme de cette dernière, il n'existe qu'une intégrale passant par un point donné et y admettant une tangente donnée. Pour déterminer cette intégrale, nous devons adjoindre à l'équation (2) la condition

$$(3) \quad \frac{\partial F}{\partial x} + \lambda \frac{\partial F}{\partial y} = 0,$$

laquelle, considérée comme relation entre a et b , représente une seconde courbe algébrique. Il peut arriver que cette dernière ait avec C plusieurs points communs $(a_0, b_0), (a_1, b_1), \dots, (a_{h-1}, b_{h-1})$; mais, dans ce cas, tous les couples de valeurs de a, b variables avec y' ainsi obtenus correspondent à la même courbe intégrale.

Il est, dès lors, aisé de s'arranger de façon que cette circonstance n'ait pas lieu. Les quantités

$$a_i, b_i \quad (i = 0, 1, 2, \dots, h-1)$$

sont, en effet, constantes sur la courbe intégrale en question : ce sont des fonctions de a_0, b_0 . Il en est de même de deux quel-

conques de leurs fonctions symétriques. Or, celles-ci sont des fonctions rationnelles de y' . D'ailleurs, on peut évidemment les prendre distinctes, c'est-à-dire telles que leur déterminant fonctionnel par rapport à a_0, b_0 soit différent de zéro.

Autrement dit, comme l'avait déjà constaté M. Painlevé, l'équation donnée admet deux intégrales premières rationnelles en y' .

3. Le raisonnement précédent est rigoureux si cette équation et, par suite, l'intégrale (2) sont analytiques. Dans le cas contraire, il demande, semble-t-il, à être présenté avec un peu plus de détails. Alors, en effet, l'équation (2) n'aura de sens qu'autant qu'elle représentera une courbe réelle. Or, ceci ne peut évidemment avoir lieu que pour des valeurs convenablement choisies (que nous appellerons, pour abréger, *valeurs acceptables*) de a et de b .

L'hypothèse la plus naturelle à cet égard est de supposer que ces valeurs acceptables sont les valeurs réelles; mais, ce qu'il y a de certain, c'est qu'elles ne peuvent pas être quelconques. Elles ne peuvent pas remplir, indépendamment l'une de l'autre, deux aires prises dans le plan des a et dans celui des b respectivement : en un mot, elles ne peuvent pas dépendre de deux paramètres complexes, ce qui équivaut à quatre paramètres réels, mais de deux paramètres réels seulement.

Dans ces conditions, on peut craindre qu'un ou plusieurs des points communs aux courbes (2) et (3) correspondent à des valeurs *non acceptables* de a et de b , lesquelles ne donneraient aucune courbe intégrale : le raisonnement serait alors en défaut.

Il est aisé de répondre à cette objection en examinant la question d'un peu plus près.

Si, aux équations (2) et (3), nous adjoignons celle qu'on obtient en différentiant deux fois (2), savoir

$$(4) \quad \frac{\partial F}{\partial y'} y'' - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y'} y' - \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} y'^2 = 0,$$

nous devons pouvoir déduire de là l'équation (1), ou encore l'équation

$$(5) \quad \varphi = \frac{\partial F}{\partial y'} R(y', x, y) + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y'} y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} y'^2 = 0.$$

Si, dans celle-ci, préalablement multipliée par $Q(y', x, y)$, on remplace y' par sa valeur tirée de (3), on aura une équation que l'on pourra rendre entière par rapport à a, b en la multipliant par une certaine puissance de $\frac{\partial F}{\partial y}$. L'égalité ainsi obtenue

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^p (\varphi P) = 0, \quad y' = -\frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial y}$$

devra être vérifiée pour toutes les valeurs *acceptables* de a, b satisfaisant à l'équation (2). Ces valeurs étant en nombre infini, l'égalité en question doit résulter de (2). Autrement dit, quel que soit y' , les points d'intersection des courbes (2), (3) sont situés sur la courbe représentée par l'équation

$$(5) \quad P \varphi \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^p = 0.$$

On peut, dès lors, appliquer un théorème connu d'après lequel le premier membre de celle-ci est une combinaison de ceux de (2) et de (3), si l'on prend soin de lui adjoindre un facteur [tel que $\left(\frac{\partial F}{\partial a}\right)^q$] s'annulant, avec un ordre suffisant de multiplicité, aux points doubles de (2). Nous arrivons donc à l'identité

$$(6) \quad P \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^p \left(\frac{\partial F}{\partial a}\right)^q = A F + B \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y'\right),$$

A, B étant des polynômes entiers en a, b dont les coefficients seront rationnels en y' .

Sur une courbe intégrale (correspondant à $a = a_0, b = b_0$), $\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y'$ n'est autre que la dérivée totale $\frac{dF}{dx}$, et φ que la dérivée totale $\frac{d^2 F}{dx^2}$, de sorte que $F(x, y, a, b)$ satisfera à une équation linéaire de la forme

$$(7) \quad \frac{d^2 F}{dx^2} = A' F + B' \frac{dF}{dx},$$

A' et B' étant finis, continus et dérivables sauf pour certaines valeurs particulières de y' (celles qui annulent P ou les dénominateurs des coefficients de A et de B) et pour les valeurs de a, b qui annuleront $\frac{\partial F}{\partial y}$ ou $\frac{\partial F}{\partial a}$.

Cette dernière circonstance ne se présentera pas si nous donnons à a et à b les valeurs a_i, b_i ($i = 1, 2, \dots, h-1$) définies tout à l'heure (puisque celles-ci sont variables avec y'). Comme, d'ailleurs, on annule ainsi F et $\frac{dF}{dx}$ au point considéré, F sera nul le long de la courbe intégrale (a_0, b_0) issue de ce point. Il en résulte qu'on retrouverait les mêmes valeurs de a_i, b_i en partant d'un autre point quelconque de cette courbe : ce que nous nous proposons de démontrer.

4. Nous pourrions substituer aux anciennes constantes les deux intégrales premières dont l'existence nous est démontrée, et prendre

$$(8) \quad \begin{cases} a = r_1(y', x, y), \\ b = r_2(y', x, y), \end{cases}$$

r_1 et r_2 étant rationnels en y' . Ces deux formules nous donneront bien, par élimination de y' , une équation algébrique de la forme (2), la courbe C correspondante étant unicursale (1).

Cette fois, la courbe (3) ne coupe plus C qu'en un seul point variable avec y' . Tout autre point commun devra vérifier les deux relations

$$(9) \quad \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

Plusieurs hypothèses sont alors possibles :

1° Le point en question peut être un point double de C : soit

$$(10) \quad \frac{\partial F}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial b} = 0;$$

et, en effet, tout point double de la courbe représentée par

(1) Grâce à la transformation précédente, chaque courbe intégrale ne correspond qu'à un seul système de valeurs de a et de b .

Par contre, à la suite de la même transformation, il peut se faire qu'à un système de valeurs de a, b corresponde non une seule courbe intégrale, mais l'ensemble de plusieurs de ces courbes : ce qui est, d'ailleurs, sans influence sur les raisonnements du texte.

l'équation (2), pour un système de valeurs *quelconque* de x et de y , vérifie les relations (9). Il suffit, pour s'en convaincre, de différentier (2) en regardant a et b comme fonctions de x et de y , ce qui donne

$$(11) \quad \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial y} = 0, \end{cases}$$

et, par conséquent $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = 0$, moyennant (10).

2° S'il n'en est pas ainsi, les équations (11), se réduisant, en vertu de (9), à

$$(12) \quad \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial y} = 0, \end{cases}$$

montrent que a et b sont fonctions l'un de l'autre: *le point* (a, b) , *s'il n'est pas fixe, décrit une courbe fixe* Γ ; et, de plus, les équations (12) montrent que *cette courbe est tangente à* C , *quels que soient* x *et* y .

3. A ces hypothèses générales s'en subordonnent une série d'autres plus particulières.

Il peut arriver, par exemple, que les courbes (9) soient tangentes à C en un point ordinaire. S'il en est ainsi, Γ et C ont, en ce point, un contact du second ordre.

En effet, on devra alors avoir sur C et, par suite, sur Γ ,

$$(13) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial a} da + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial b} db = 0, \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial a} da + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial b} db = 0. \end{cases}$$

Or, les équations (9) étant vérifiées en tout point de Γ , on a, tout le long de cette courbe,

$$dF = \frac{\partial F}{\partial a} da + \frac{\partial F}{\partial b} db,$$

relation que l'on peut différentier pour obtenir d^2F . On reconnaît alors que, dans cette dernière différentielle, la partie qui dépend de dx et de dy disparaît en vertu de (13).

On voit immédiatement comment cette conclusion s'étendrait, dans le cas où la courbe C et les courbes (9) auraient un nombre quelconque d'intersections confondues. L'ordre du contact entre C et Γ serait alors égal au nombre de celles-ci.

Mais nous allons retrouver le même résultat en revenant d'abord au cas opposé, celui d'un point singulier de C.

Il suffit alors de partir de cette remarque (assez simple pour être, sans doute, depuis longtemps familière à ceux qui s'occupent des fonctions algébriques) que, pour toute courbe algébrique C dépendant des paramètres arbitraires x, y et représentée par une équation de la forme (2), les courbes

$$(9) \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

sont des adjointes de C (pourvu que x, y aient des valeurs arbitraires et non pas particulières).

En effet, si nous considérons une singularité quelconque de C et que τ_1 soit la variable caractéristique d'un cycle ayant pour origine ce point, on pourra prendre cette variable telle que a et b soient des fonctions dérivables de x, y, τ_1 . [Par exemple, si C est unicursale et représentée par les équations (8), on prendra $\tau_1 = y' - y'_0$, en désignant par y'_0 la valeur de y' correspondant au point singulier considéré.] On pourra alors écrire les relations (11) et transformer par leur moyen l'intégrale

$$\int_C \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial b}} da = \int \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial b}} \frac{\partial a}{\partial \tau_1} d\tau_1,$$

qui deviendra

$$\int \left(-\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\frac{\partial F}{\partial a}}{\frac{\partial F}{\partial b}} \frac{\partial a}{\partial x} \right) \frac{\partial a}{\partial \tau_1} d\tau_1 = \int \left(\frac{\partial b}{\partial \tau_1} \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial \tau_1} \frac{\partial b}{\partial x} \right) d\tau_1.$$

Cette intégrale sera donc finie sur tous les cycles singuliers (a et b étant, comme il est légitime, supposés finis aux origines de ces cycles) et, par conséquent, la courbe $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ est adjointe de C.

Ceci assigne un certain minimum à l'ordre du contact des courbes (g) avec chacun des cycles singuliers de C. D'autre part, ce minimum ne sera dépassé que si les quantités

$$(14) \quad \left(\frac{\frac{\partial b}{\partial \tau_i} \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial b}{\partial x}}{\frac{\partial \tau_i}{\partial x}} \right) \frac{\partial a}{\partial \tau_i}, \quad \left(\frac{\frac{\partial b}{\partial \tau_i} \frac{\partial a}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial y}}{\frac{\partial \tau_i}{\partial y}} \right) \frac{\partial a}{\partial \tau_i}$$

(où nous supposons la tangente du cycle non parallèle à l'axe des b) s'annulent. Ceci a lieu :

$$1^{\circ} \text{ Lorsque } \frac{\frac{\partial b}{\partial \tau_i} \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial b}{\partial x}}{\frac{\partial \tau_i}{\partial x}} \text{ et } \frac{\frac{\partial b}{\partial \tau_i} \frac{\partial a}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial y}}{\frac{\partial \tau_i}{\partial y}} \text{ sont nuls. Le point } (a, b),$$

si l n'est pas fixe, décrira alors (pour les mêmes raisons que tout à l'heure) une courbe fixe Γ , constamment tangente à C et l'ordre du contact de celle-ci avec les courbes (g) devra être augmenté ⁽¹⁾ de l'ordre du contact qu'elle a avec Γ (ce dernier ne pouvant, d'ailleurs, être supérieur à 1 que si le cycle est à courbure finie, sans quoi le rayon de courbure de C serait constamment nul).

Il est clair qu'en considérant, au lieu d'un point singulier, un point ordinaire de C, commun à cette courbe et aux courbes (g), on retombe ainsi sur le résultat énoncé tout à l'heure.

2° Les quantités (14) s'annulent encore pour $\frac{\partial a}{\partial \tau_i} = 0$, c'est-

(1) En effet, soit p l'ordre du contact de C et de Γ , l'équation de cette dernière étant $\varphi(a, b) = 0$. La fonction φ s'annulera, ainsi que ses p premières dérivées par rapport à τ_i pour $\tau_i = 0$; et il en sera de même de $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, de sorte que la quantité

$$\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial x}}{\frac{\partial \tau_i}{\partial x}}$$

sera d'ordre infinitésimal $p + 1$ en τ_i .

Des lors (si $\frac{\partial \varphi}{\partial b}$ et $\frac{\partial a}{\partial x}$ ne sont pas nuls avec τ_i), $\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial x}}{\frac{\partial \tau_i}{\partial x}}$ étant d'ordre p ,

l'expression $\frac{\frac{\partial b}{\partial \tau_i} \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial b}{\partial x}}{\frac{\partial \tau_i}{\partial x}}$ sera aussi d'ordre p exactement.

à-dire lorsque le cycle est d'ordre ω supérieur à 1. L'ordre du contact des courbes (9) devra alors être augmenté de $\omega - 1$.

On peut encore dire que, si un point singulier de C ne décrit pas une courbe fixe tangente à C, il absorbe un nombre d'intersections de celle-ci avec les courbes (9) précisément égal au nombre d'unités dont il abaisse la classe de C.

Pour $\omega = 2$ on a un point de rebroussement de C. Un tel point, par conséquent, sera un point de contact de cette courbe avec la courbe (3), absorbant trois intersections de ces deux courbes (et cela quel que soit γ').

6. Cela posé, il est aisé de montrer comment est engendrée l'intégrale d'une équation satisfaisant aux conditions données.

On assujettira une courbe algébrique C de degré m à avoir d points doubles et r points de rebroussement, le nombre total de ces points étant celui que comporte le degré m , soit

$$(15) \quad d + r = \frac{(m-1)(m-2)}{2}.$$

On l'assujettira, en outre, à toucher h courbes données (analytiques ou non, et qui pourront n'être que des portions d'une seule et même courbe). La condition de toucher une courbe donnée pourra toutefois être remplacée par celle de passer par un point donné, et la condition de toucher p courbes données, par celle d'avoir avec l'une d'elles un contact d'ordre p (en un point non donné) ou un contact d'ordre $p - 1$ en un point donné.

Le nombre h sera choisi de manière que le nombre total des conditions ainsi imposées à C soit inférieur de deux unités à celui qui est nécessaire pour la déterminer. Comme l'existence d'un point double implique une condition et celle d'un point de rebroussement deux, ceci donne

$$(16) \quad d + r + h = \frac{m(m+3)}{2} - 1.$$

C dépendra alors de deux paramètres x, y et son équation aura la forme (2).

Si maintenant nous faisons passer la courbe C par un point fixe quelconque (a, b) du plan, nous aurons ainsi y en fonction de x

et l'équation différentielle à laquelle satisfait cette fonction quels que soient a , b , sera de second ordre.

Cette équation aura la forme (1) si le nombre des intersections communes à C et aux courbes (9) est $m^2 - 1$, c'est-à-dire, d'après ce qui précède, si

$$(17) \quad 3d + 3r - h = m^2 - 1.$$

Or, cette relation est une conséquence des deux précédentes (15) et (16).

Nous formons donc bien ainsi, dans tous les cas, une équation répondant à la question.

Toutefois la démonstration de ce résultat n'est pas complète. L'équation (17) est rigoureusement établie; mais l'équation (16) ne repose que sur une simple énumération de conditions. Il serait nécessaire de s'assurer si (comme il est d'ailleurs bien vraisemblable) ces conditions sont bien indépendantes. Dans le cas contraire, si quelques-unes d'entre elles découlaient des autres, il faudrait, pour que la courbe C dépendît de deux paramètres seulement, lui imposer des conditions nouvelles, sur la nature desquelles les raisonnements précédents ne nous renseigneraient plus.

Il faudrait, d'autre part, étudier les singularités autres que les points doubles, les points de rebroussement et les contacts, en des points ordinaires, avec des courbes fixes. Mais il est à remarquer que, si l'objection précédente peut être écartée, autrement dit si l'énumération des constantes est légitime, la plupart de ces singularités *ne peuvent pas se présenter*. Si, en effet, on admettait la présence de l'une d'elles, en modifiant, en conséquence, les équations (15), (16) et (17), on tirerait de cette dernière une valeur de h qui, reportée dans la précédente, imposerait à C un nombre de conditions *supérieur* à $\frac{m(m+3)}{2} - 2$. Si l'on voulait rétablir l'égalité, il faudrait remplacer l'équation (15) par une autre assignant à C des singularités *plus nombreuses* que ne le comporte son degré, en sorte que cette courbe ne serait plus indécomposable (1).

(1) Soient ϵ l'abaissement produit sur la classe par une singularité déterminée

Exception doit être faite pour un cas, celui des singularités situées en des points donnés. On peut, par exemple, assigner à C un point multiple d'ordre α [qui compte pour $\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}$ points doubles dans l'équation (15)] de situation donnée, le nombre h devant alors être diminué de $\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}$.

7. La forme de l'équation différentielle obtenue dépendra surtout du nombre de points de rebroussement des courbes C, c'est-à-dire du nombre r .

L'équation (14) s'obtient, en effet, en différenciant l'une quelconque des équations (8) : y'' a les valeurs (nécessairement identiques entre elles)

$$(18) \quad \begin{cases} y' = \frac{\frac{\partial r_1}{\partial x}}{\frac{\partial r_1}{\partial y}} \cdot y', \\ y' = \frac{\frac{\partial r_2}{\partial x}}{\frac{\partial r_2}{\partial y}} \cdot y'. \end{cases}$$

Supposons que la courbe C n'ait pas de point de rebroussement. Alors les dénominateurs des fractions rationnelles (en y') qui forment les seconds membres des formules précédentes sont premiers entre eux, puisque les valeurs de y' qui annulent $\frac{\partial r_1}{\partial y'}$ et $\frac{\partial r_2}{\partial y'}$ donnent les points de rebroussement.

quelconque g , le nombre d'unités dont cette même singularité abaisse le genre c , le nombre de conditions qu'implique l'existence de cette singularité pour une courbe algébrique. Les raisonnements du texte prouvent que l'on doit avoir, pour les singularités de C, $\sum (i - h) = m^2 - 1$, $\sum (c - h) = \frac{m(m+3)}{2} - 1$; par conséquent $\sum (i - c) \geq \sum g$ [puisque $\sum g = \frac{(m-1)(m-2)}{2}$].

Or, pour les points doubles et de rebroussement, on a $i - c = g$, tandis que les singularités plus élevées donnent $i - c < g$.

Des considérations analogues s'appliqueraient aux points singuliers assujettis à décrire des courbes données.

Il en est autrement pour les singularités de situation entièrement données : un point α^{en} à tangentes distinctes, situé en un point fixe, donnerait $g = \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}$, $c = \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}$ et absorberait α^2 intersections avec les courbes (9).

Donc les deux valeurs de y'' ne peuvent être égales qu'en étant entières en y' .

De plus, l'une au moins des fractions (18) aura son dénominateur de degré $2m - 2$ (sans quoi la courbe C aurait un rebroussement correspondant à $y' = \infty$).

Or, les numérateurs des mêmes fractions sont de degré $2m + 1$ au plus.

Donc enfin l'équation différentielle (1) est de la forme

$$y'' = Ay'^3 + By'^2 + Cy + D,$$

où A, B, C, D sont des fonctions de x et de y , c'est-à-dire qu'elle appartient à la catégorie bien connue qui a fait l'objet des travaux de Lie, de M. R. Liouville et de M. Tresse, et qui comprend également l'équation différentielle des lignes géodésiques.

Cette forme sera donc celle de l'équation (1) toutes les fois que la courbe (2) n'aura pas de point de rebroussement et que (l'équation étant supposée analytique) une courbe intégrale quelconque ne correspond qu'à un système de valeurs de a et b . Cette dernière restriction est nécessaire, car, si l'on n'en tenait pas compte, les raisonnements précédents ne seraient applicables que moyennant la transformation effectuée aux n^{os} 2-3 et celle-ci pourrait faire apparaître, dans les courbes C, des points de rebroussement qu'elles ne posséderaient pas auparavant.

D'une manière générale, si p et q sont les degrés des polynômes P et Q qui forment, dans l'équation (1), le numérateur et le dénominateur de la valeur de y'' exprimée en fonction de y' , le plus grand des deux nombres q et $p - 3$, qui est un invariant vis-à-vis de toute transformation ponctuelle effectuée sur x et y et représente le nombre des courbes intégrales issues d'un point donné quelconque et ayant ce point comme point de rebroussement, est au plus égal au nombre de rebroussements d'une courbe C quelconque.

8. D'après ce qui précède, l'équation (1) admet des courbes intégrales jouissant de propriétés particulières : ce sont celles que l'on obtient en prenant pour a , b les coordonnées d'un point p situé sur l'une des courbes F auxquelles C est assujéti à rester constamment tangente. Il passera d'ailleurs une telle courbe

intégrale P par tout point du plan des xy , puisqu'il existe un point p sur toute courbe C .

Imaginons, comme cela est évidemment possible, qu'on ait pris pour coordonnée x le paramètre qui définit la position du point p sur Γ .

Soit P' une courbe intégrale voisine de P , correspondant à un point p' du plan des ab voisin de p , mais non situé sur Γ . Cherchons l'intersection de la courbe P' avec une courbe $y = \text{const.}$ Ceci revient à se donner y dans l'équation de la courbe C et à chercher celles de ces courbes (lesquelles ne dépendent plus que d'un paramètre) qui passe par le point p' .

Or, étant donnée une famille de courbes à un paramètre tangentes à Γ , on voit sans difficulté que *deux* d'entre elles passent par le point p' et tendent vers une même position limite lorsque p' tend vers p .

Donc la courbe P' est coupée par chacune des courbes arbitraires $y = \text{const.}$ en deux points voisins l'un de l'autre. Ceci exige que P' se compose de deux branches voisines toutes deux de P . Il pourra arriver que ces deux branches soient complètement distinctes l'une de l'autre; mais, en général, comme il est facile de s'en assurer, elles se continueront l'une l'autre, comme le font la branche ascendante et la branche descendante de la trajectoire d'un projectile lancé presque verticalement.

En un mot, les courbes P sont des courbes intégrales doubles, entièrement analogues aux *trajectoires mixtes* de M. Painlevé⁽¹⁾.

**SUR LES COEFFICIENTS DES DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIES DE $\tan x$,
séc x ET D'AUTRES FONCTIONS.**

**CARACTÈRES DE PÉRIODICITÉ QUE PRÉSENTENT LES CHIFFRES
DES UNITÉS DE CES COEFFICIENTS;**

Par M. E. ESTANAVE.

Dans cette Note, je résume ma Communication en la dégageant des démonstrations qui nécessitent d'assez longs développements de calcul. J'ai indiqué dans un Mémoire : *Essai sur la somma-*

⁽¹⁾ Ce *Bulletin*, t. XXII, 1894, et *Leçons sur l'intégration des équations différentielles de la Mécanique*, p. 217 et suiv.

tion de quelques séries trigonométriques, p. 96, que les nombres d'Euler satisfont à la loi suivante :

$$E_{2p+1} = \text{mult. } 10^{-1}, \quad E_{2p} = \text{mult. } 10^{-5}.$$

J'ai indiqué comment, en partant de la formule de récurrence qui définit E_n à l'aide des nombres d'Euler d'indice moindre, on peut démontrer la généralité de cette loi, qui est apparente sur les premiers nombres.

Cette démonstration générale peut se ramener à établir les identités numériques suivantes :

$$\begin{aligned} \sum_{q=1}^{q'-p} C_{2-p+1}^{1q} &= m \cdot 10^{-5}, & \sum_{q'=1}^{q'-2p-1} C_{1-2p+1}^{2q'} &= m \cdot 10^{-5}, \\ \sum_{q'=2p-1}^{q'-2p-1} C_{1p}^{2q'} &= m \cdot 10^{-6}, & \sum_{q=1}^{q'-p-1} C_{1p}^{1q} &= m \cdot 10, \end{aligned}$$

où q' prend seulement les valeurs impaires 1, 3, 5, . . . , et p les valeurs de la suite naturelle des nombres 1, 2, 3, . . . , et où C_n^p désigne le nombre de combinaisons n objets p à p .

La seconde des identités se ramène d'ailleurs à la première, grâce à la relation $C_m^p = C_{m-p}^{m-p}$. Dans cette Communication, je me suis proposé d'établir ces identités numériques et d'étendre à d'autres séries de nombres A et D, imaginées par M. Désiré André dans des Mémoires relatifs aux permutations alternées (*Journal de Liouville*, 1881, p. 167) et aux permutations quasi-alternées (*Journal de Liouville*, 1895, p. 315), les remarques d'observation que j'ai faites sur le chiffre des unités à propos des nombres d'Euler.

La démonstration des identités numériques ci-dessus se déduit du développement de $(x+1)^m$. Si l'on considère, en effet, le développement

$$(x+1)^m = x^m + C_m^1 x^{m-1} + C_m^2 x^{m-2} + \dots + C_m^{m-1} x + 1$$

et si l'on y remplace x par les racines de l'équation $x^4 - 1 = 0$, en donnant à m , dans les quatre relations obtenues, les valeurs $2(2p+1)$ ou $4p$ suivant qu'on a en vue d'établir les deux premières identités ou les deux dernières, on obtient, en combinant

par addition ou soustraction, les quatre relations qui correspondent à la même valeur de m , la somme des coefficients binomiaux de 4 en 4, qui est indiquée sous le signe $\sum$. On trouve ainsi

$$\sum_{q=1}^{q=p} C_{2p+1}^{2q} = 2^{2p-1}, \quad \sum_{q'=1}^{q'=2p-1} C_{2p}^{2q'} = 2^{2p-1} (2^{2p-1} - \cos p\pi),$$

$$\sum_{q=1}^{q=p-1} C_{2p}^{2q} = 2^{2p-1} (2^{2p-1} - \cos p\pi) = 2^{2p-1}.$$

Il est alors facile de voir, d'après l'expression du second membre, que la première somme est un entier terminé par 5, la deuxième est un entier terminé par 6 et la troisième un entier terminé par 0. Toutefois, pour ces deux dernières, la démonstration peut se scinder en deux suivant que p est pair ou impair.

M. Désiré André définit les nombres A et D de la manière suivante :

${}_2A_n$ représente le nombre de permutations alternées de n lettres et ${}_2D_n$ le nombre de permutations quasi-alternées de ces n lettres distinctes, et établit diverses relations entre les nombres A et D, notamment la relation

$$(1) \quad D_n = A_{n+1} - {}_2A_n,$$

que nous prendrons ici pour définition des nombres D.

Si nous considérons les développements de $\text{tang } x$ et de $\text{séc } x$, signalés par M. André,

$$\text{tang } x = A_1 \frac{x^1}{1!} + A_3 \frac{x^3}{3!} + A_5 \frac{x^5}{5!} + \dots + A_{2p-1} \frac{x^{2p-1}}{(2p-1)!} + \dots,$$

$$\text{séc } x = A_0 = A_2 \frac{x^2}{2!} + A_4 \frac{x^4}{4!} + \dots + A_{2p} \frac{x^{2p}}{(2p)!} + \dots,$$

et si nous comparons ces développements à ceux déjà établis à l'aide des nombres de Bernoulli (B) et des nombres d'Euler (E), nous voyons que ces nombres sont liés aux nombres A par les relations

$$A_{2p-1} = \frac{2^{2p}(2^{2p}-1)}{2p} B_p, \quad A_{2p} = E_p,$$

que, pour simplifier l'exposition, nous pouvons prendre comme

définition des nombres A. Nous verrons plus loin que la considération des nombres A peut, avec avantage et logique, remplacer la considération des nombres de Bernoulli et des nombres d'Euler.

Cela étant, si l'on observe les valeurs des premiers nombres de la série A et D,

$A_0 = 1,$	$A_1 = 1,$	$A_2 = 1,$	$A_3 = 2,$
$A_4 = 5,$	$A_5 = 16,$	$A_6 = 61,$	$A_7 = 272,$
$A_8 = 1385,$	$A_9 = 7936,$	$A_{10} = 50521,$	$A_{11} = 353792, \dots$
$D_0 = -1,$	$D_1 = -1,$	$D_2 = 0,$	$D_3 = 1,$
$D_4 = 6,$	$D_5 = 29,$	$D_6 = 150,$	$D_7 = 841,$
$D_8 = 5465,$	$D_9 = 34649,$	$D_{10} = 253050,$	$D_{11} = 1994581, \dots$

On *aperçoit*, en mettant à part A_0, A_1, D_0, D_1 , une périodicité dans le chiffre des unités de ces nombres, qui est, pour les nombres A, 1, 2, 5, 6 et 0, 1, 6, 9, pour les nombres D. En sorte que, en supposant que cette périodicité que nous constatons pour les premiers nombres soit vraie pour la suite entière et en disposant les nombres A et D suivant quatre colonnes :

A_2	A_3	A_4	A_5	D_2	D_3	D_4	D_5
A_6	A_7	A_8	A_9	D_6	D_7	D_8	D_9
A_{10}	...	...	...	D_{10}	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...

les nombres du Tableau A seront terminés par 1, 2, 5, 6 suivant qu'ils sont situés dans la première, deuxième, troisième ou quatrième colonne; les nombres du Tableau D seront terminés par 0, 1, 6, 9 suivant qu'ils appartiennent à la première, deuxième, troisième ou quatrième colonne. La recherche du chiffre des unités de A_μ et D_λ revient, par suite, à la recherche de la colonne où se rangent ces nombres dans la classification précédente.

Si l'on pose

$$\mu = iq + r,$$

le reste r sera 2, 3, 0 ou 1 et indiquera que A_μ est situé dans la première, deuxième, troisième ou quatrième colonne. Ainsi, A_{5342} qui, à n'en pas douter, est un nombre très considérable, sera situé dans la première colonne et sera de la forme $m10 \pm 1$, tandis que

A_{237} sera situé dans la quatrième colonne et sera de la forme $m10 + 6$.

La démonstration générale de ces caractères est facile et résulte de ce qui a été dit. D'abord les nombres de la première colonne du Tableau A sont terminés par l'unité, grâce à la relation

$$A_{2p} = E_p$$

et ceux de la troisième colonne sont terminés par 5, d'après ce que j'ai déjà dit des nombres d'Euler.

Pour démontrer que ceux de la deuxième colonne sont terminés par 2 et ceux de la quatrième par 6, on peut faire appel à la relation donnée par M. André

$$(2) \quad A_{2n+1} = C_{2n+1}^1 A_{2n} + C_{2n+1}^3 A_{2n-2} + C_{2n+1}^5 A_{2n-4} + \dots + C_{2n+1}^{2n-1} A_0.$$

Et, en supposant la loi vraie pour n , c'est-à-dire en supposant que

$$A_{4n-2} = A_{4n-1} = A_{4n} = A_{4n+1}$$

obéissent à la loi, démontrer que

$$A_{4n+2} = A_{4n+3} = A_{4n+4} = A_{4n+5}$$

y satisfont aussi.

Comme je viens de le remarquer, cela est déjà fait pour A_{4n+2} , A_{4n+4} . Pour le voir, pour les nombres A_{4n+3} , A_{4n+5} , il suffit de remplacer dans la relation (2) n par $2n+1$ et $2n+2$ et de grouper ensuite dans le second membre les termes positifs et les termes négatifs. On voit ainsi aisément que la démonstration se ramène à l'établissement des deux relations numériques

$$\sum_{q=1}^{q=p} C_{4p+3}^{4q} = m10 + 5, \quad \sum_{q=1}^{q=p+1} C_{4p+5}^{4q} = m10 + 5,$$

que l'on peut établir en suivant la même méthode que j'ai déjà indiquée et remplaçant, dans les deux membres du développement de $(x+1)^m$, m par $4p+3$ ou $4p+5$.

La loi étant démontrée pour les nombres A, on voit immédiatement, grâce à la relation

$$D_n = A_{n+1} - 2A_n, \quad .$$

que la loi signalée pour les nombres D est aussi satisfaite. J'ai dû ici me borner à indiquer seulement les résultats en raison de la longueur qu'entraînerait le développement des calculs.

Nous venons de considérer quatre séries de nombres; les nombres de Bernoulli B, les nombres d'Euler E, et les séries de nombres A et D. Nous avons vu que la considération des nombres A permet de se passer de la considération des nombres B et E. On a, en effet,

$$B_p = \frac{2^p}{2^p - 1} A_{2p-1}, \quad E_p = A_{2p}.$$

De plus, les nombres A définissent les nombres D. Je laisserai au lecteur le soin de décider s'il n'y aurait pas avantage à considérer seulement la série des nombres A et me bornerai ici à signaler quelques raisons qui peuvent éclairer ce choix.

1° Les nombres A forment une série unique de nombres définissant très simplement les nombres B, E et D;

2° Les nombres A sont des nombres entiers, de même les nombres E et D, mais les nombres B sont fractionnaires.

3° Les nombres A, et c'est sur ce point que j'insiste, ont une existence par eux-mêmes, indépendante des développements de la tangente et de la sécante où ils rentrent comme coefficients de la même manière que C_m^p entre comme coefficient du terme en x^p dans le développement de $(x+1)^m$.

Ces nombres A, je l'ai déjà dit, représentent quelque chose; $2A_n$ est le nombre de permutations alternées de n lettres. De même que C_m^p représente le nombre de combinaisons de n lettres p à p . On ne saurait en dire autant des nombres de Bernoulli et des nombres d'Euler dont l'existence est subordonnée à celles du développement de la tangente et de la sécante.

Ces nombres, il est vrai, s'introduisent dans plusieurs questions, notamment dans la sommation des séries, mais il sera facile de les y remplacer par les nombres A.

De plus ces nombres A figurent, d'une façon simple, dans les développements d'autres fonctions :

$$\tan 2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) = A_0 - A_1 \frac{x}{1!} + A_2 \frac{x^2}{2!} - A_3 \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\frac{1 - 2 \cos x}{1 - \sin x} = D_0 + D_1 \frac{x}{1!} + D_2 \frac{x^2}{2!} + D_3 \frac{x^3}{3!} + \dots$$

et

$$\begin{aligned} (\sec x - 2) \sec x &= D_0 + D_2 \frac{x^2}{2!} + D_4 \frac{x^4}{4!} + D_6 \frac{x^6}{6!} + \dots \\ (\sec x - 2) \tan x &= D_1 \frac{x}{1!} + D_3 \frac{x^3}{3!} + D_5 \frac{x^5}{5!} + \dots \end{aligned}$$

D'autre part, grâce à la considération des nombres A, les développements de $\tan x$ et de $\sec x$ sont ainsi rapprochés l'un de l'autre; l'honneur de ce rapprochement revient à M. Catalan. M. Désiré André a montré la signification combinatoire de ces nombres. Grâce aux observations que nous avons signalées sur la périodicité du chiffre des unités de ces nombres, on peut, sans calcul, affirmer que tel nombre, si considérable soit-il, ne fait pas partie de la suite des nombres A ou de la suite D.

Ce caractère de périodicité du chiffre des unités des nombres A est peut-être une raison de plus en faveur du choix de ces nombres.

Remarque. — La relation (2) entre les nombres A et les relations entre ces nombres et les nombres d'Euler et de Bernoulli montrent la dépendance qui existe entre ces deux dernières séries de nombres.

J'ai mis ⁽¹⁾ cette dépendance plus en évidence en établissant la formule

$$E_p = 2^{p+2} p! \sum_{q=0}^p (-1)^q \frac{2^{2p-q-1} - 1}{2^{2q+1} (2q-1)! 2(p-q)!} B_{p-q}$$

où l'on a posé par convention $B_0 = -1$ et $0! = 1$. Cette formule permet d'exprimer le développement de la sécante à l'aide des nombres de Bernoulli.

SUR LE RÉSEAU DIAGONAL CONJUGUÉ;

Par M. L. RAFFY.

Je me propose d'étudier ici le réseau conjugué que découpent sur une surface les courbes tangentes en chacun de leurs points à l'un des diamètres conjugués égaux de l'indicatrice. Ces dia-

⁽¹⁾ *Essai sur la sommation de quelques séries trigonométriques*, p. 91.

mètres égaux étant les diagonales du rectangle des axes, nous donnerons aux courbes considérées le nom de *lignes diagonales* et au réseau qu'elles forment le nom de *réseau diagonal* (*conjugué*). Il est évident que ce réseau est réel sur les portions de surface où les lignes asymptotiques sont imaginaires et inversement. C'est d'ailleurs un résultat que nous allons retrouver en comparant les lignes diagonales, les lignes asymptotiques et les lignes de courbure.

1. THÉORÈME I. — *Si l'on considère les tangentes aux lignes diagonales, aux lignes asymptotiques et aux lignes de courbure qui se croisent en un point ordinaire d'une surface quelconque, ces trois couples de droites, pris deux à deux, forment des faisceaux harmoniques.*

En effet, les lignes diagonales étant conjuguées par rapport à l'indicatrice, forment un faisceau harmonique avec les directions asymptotiques de cette conique; admettant comme bissectrices les lignes de courbure, elles forment avec elles un faisceau harmonique. D'autre part, les lignes asymptotiques forment un faisceau harmonique avec les lignes diagonales et avec les lignes de courbure, puisque ces deux couples de droites sont des diamètres conjugués de l'indicatrice. Il suit de là que les lignes de courbure forment faisceau harmonique avec les lignes diagonales et aussi avec les lignes asymptotiques.

2. THÉORÈME II. — *Si l'on rapporte une surface à l'un des trois réseaux formés par les lignes diagonales, par les lignes asymptotiques et par les lignes de courbure, prises successivement pour lignes coordonnées ($u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$) les équations différentielles des deux autres réseaux ne contiennent pas de terme en $du dv$ et se déduisent l'une de l'autre par le changement de dv^2 en $-dv^2$.*

En effet, l'élément linéaire d'une surface étant

$$ds^2 = E du^2 - 2F du dv + G dv^2,$$

la direction définie par le couple (du, dv) est, comme on sait, la diagonale du parallélogramme qui a pour côtés consécutifs le

segment $\sqrt{E}du$, porté sur la tangente à la courbe $v = \text{const.}$ issue du point considéré (u, v) , et le segment $\sqrt{G}dv$ porté sur la tangente à la courbe $u = \text{const.}$ Son coefficient angulaire relativement à ces axes est donc

$$m = \frac{\sqrt{G} du}{\sqrt{E} dv}.$$

Or, pour que deux droites forment avec les axes coordonnés un faisceau harmonique, il faut et il suffit que leurs coefficients angulaires soient égaux et de signes contraires. Chacun des deux réseaux autres que celui auquel on rapporte la surface a donc une équation différentielle qui ne contient pas de terme en $du dv$.

Soient m_1 et m_2 les coefficients angulaires des tangentes aux courbes de l'un de ces réseaux; soient m_3 et m_4 ceux de l'autre réseau. Nous venons de voir que l'on a

$$m_1 - m_2 = 0, \quad m_3 - m_4 = 0.$$

La condition générale pour que le faisceau des quatre droites de coefficients angulaires m_1, m_2, m_3, m_4 soit harmonique

$$(m_1 - m_2)(m_3 - m_4) = 0, \quad m_1 m_2 = m_3 m_4,$$

se réduit en conséquence à

$$m_1^2 - m_2^2 = 0,$$

ce qui exige que les équations différentielles des deux réseaux ne diffèrent l'une de l'autre que par le changement de dv^2 en $-dv^2$. Le théorème est donc complètement démontré.

3. *Équation différentielle des lignes diagonales.* — Supposons la surface rapportée à des coordonnées curvilignes quelconques et proposons-nous de former l'équation différentielle des lignes diagonales. On sait que le rayon de courbure R de la section normale déterminée par la direction (du, dv) a pour expression

$$R = \frac{E du^2 - 2F du dv + G dv^2}{\varepsilon^2 du^2 + 2\varepsilon' du dv + \varepsilon'' dv^2}.$$

Réciproquement, étant donné R , cette équation définit les deux directions (du, dv) et $(d'u, d'v)$ pour lesquelles la section

normale a un rayon de courbure égal à R. Pour exprimer que ces deux directions sont conjuguées, on a la condition bien connue

$$\hat{\gamma} du d'u + \hat{\gamma}' (du d'v + dv d'u) + \hat{\gamma}'' dv d'v = 0,$$

qui donne ici

$$R = \frac{G\hat{\gamma} - 2F\hat{\gamma}' + E\hat{\gamma}''}{2(\hat{\gamma}\hat{\gamma}'' - \hat{\gamma}'^2)} = \frac{R_1 + R_2}{2}.$$

Ainsi R est la demi-somme des rayons de courbure principaux (1). En conséquence, l'équation différentielle des lignes diagonales en coordonnées curvilignes quelconques est

$$(1) \quad \frac{E du^2 + 2F du dv + G dv^2}{\hat{\gamma} du^2 + 2\hat{\gamma}' du dv + \hat{\gamma}'' dv^2} = \frac{G\hat{\gamma} - 2F\hat{\gamma}' + E\hat{\gamma}''}{2(\hat{\gamma}\hat{\gamma}'' - \hat{\gamma}'^2)}.$$

Cette équation permet de déterminer par quadratures les lignes diagonales des hélicoïdes, des surfaces spirales et des quadriques. Elle montre que, sur les surfaces minima, les lignes diagonales coïncident avec les lignes de longueur nulle.

Si l'on a égard à l'équation des lignes asymptotiques

$$(2) \quad \hat{\gamma} du^2 + 2\hat{\gamma}' du dv + \hat{\gamma}'' dv^2 = 0$$

et à celle des lignes de courbure

$$(3) \quad (F\hat{\gamma} - E\hat{\gamma}') du^2 + (G\hat{\gamma} - E\hat{\gamma}'') du dv + (G\hat{\gamma}' - F\hat{\gamma}'') dv^2 = 0,$$

on peut retrouver d'une autre manière l'équation (1). Ecrivons-la, en effet, comme suit :

$$(4) \quad L du^2 + 2M du dv + N dv^2 = 0,$$

Exprimons que les deux directions ainsi définies forment un faisceau harmonique avec les directions (2) des lignes asymptotiques; nous aurons

$$(5) \quad L\hat{\gamma}'' - 2M\hat{\gamma}' + N\hat{\gamma} = 0.$$

Mais, comme elles forment aussi un faisceau harmonique avec les directions (3) des lignes de courbure, on a pareillement

$$(6) \quad L(G\hat{\gamma} - F\hat{\gamma}'') - M(G\hat{\gamma}' - E\hat{\gamma}'') + N(F\hat{\gamma}' - E\hat{\gamma}') = 0.$$

(1) C'est ce que l'on eût pu voir directement, en appliquant à la conique indicatrice le premier théorème d'Apollonius.

Éliminant L, M, N entre les trois équations (4), (5), (6) on obtient l'équation des lignes diagonales sous la forme

$$(1') \quad \begin{vmatrix} du^2 & -2dudv & dv^2 \\ \hat{\gamma}'' & 2\hat{\gamma}' & \hat{\gamma} \\ G\hat{\gamma}' - F\hat{\gamma}'' & G\hat{\gamma} - E\hat{\gamma}'' & F\hat{\gamma} - E\hat{\gamma}' \end{vmatrix} = 0.$$

4. La comparaison des équations (1), (2) et (3) permet de vérifier le théorème II; elle conduit, en effet, très simplement aux conclusions suivantes.

Une surface étant rapportée à ses asymptotiques ($\hat{\gamma} = \hat{\gamma}'' = 0$) les équations

$$Edu^2 + Gdv^2 = 0, \quad Edu^2 - Gdv^2 = 0$$

appartiennent : la première aux lignes diagonales, la seconde aux lignes de courbure.

Une surface étant rapportée à ses lignes de courbure ($F = \hat{\gamma}' = 0$) les équations

$$\hat{\gamma}du^2 - \hat{\gamma}''dv^2 = 0, \quad \hat{\gamma}du^2 + \hat{\gamma}''dv^2 = 0$$

appartiennent : la première aux lignes diagonales, la seconde aux lignes asymptotiques.

Une surface étant rapportée à ses lignes diagonales, on a

$$(7) \quad \hat{\gamma}' = 0, \quad \frac{\hat{\gamma}}{E} = \frac{\hat{\gamma}''}{G},$$

et les deux équations

$$\hat{\gamma}du^2 - \hat{\gamma}''dv^2 = 0, \quad \hat{\gamma}du^2 + \hat{\gamma}''dv^2 = 0,$$

appartiennent : la première aux lignes de courbure, la seconde aux lignes asymptotiques.

5. *Surfaces rapportées au réseau diagonal.* — On peut obtenir directement les conditions

$$(7) \quad \hat{\gamma}' = 0, \quad \frac{\hat{\gamma}}{E} = \frac{\hat{\gamma}''}{G},$$

qui caractérisent le réseau des lignes coordonnées comme étant le réseau diagonal : il suffit d'exprimer que les lignes coordonnées

sont conjuguées et qu'elles admettent pour bissectrices les lignes de courbure.

Introduisons ces conditions dans les équations fondamentales de la théorie des surfaces :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \delta}{\partial u} \left(\frac{\delta'}{H} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\delta}{H} \right) = C_1 \frac{\delta}{H} + 2B_1 \frac{\delta'}{H} - A_1 \frac{\delta''}{H}, \\ \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\delta'}{H} \right) - \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\delta''}{H} \right) = C \frac{\delta}{H} + 2B \frac{\delta'}{H} - A \frac{\delta''}{H}, \end{array} \right. \quad \left(H^2 = EG - F^2 \right),$$

Si nous posons

$$(8) \quad \lambda H = \frac{\delta}{E} = \frac{\delta''}{G},$$

ces équations s'écrivent

$$(1') \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda = \frac{1}{\sqrt{EG} \sqrt{R_1 R_2}}, \\ \frac{\partial \log \lambda}{\partial v} = C_1 + A_1 \frac{G}{E} - \frac{E_v}{E}, \\ - \frac{\partial \log \lambda}{\partial u} = A - C \frac{E}{G} + \frac{G_u}{G}. \end{array} \right.$$

Grâce à la valeur trouvée pour λ , l'élément linéaire de la représentation sphérique, dont l'expression générale est

$$d\tau^2 = \frac{G\delta - 2F\delta' + E\delta''}{H^2} (du^2 + 2\delta' du dv + \delta'' dv^2) \\ - \frac{\delta\delta'' - \delta'^2}{H^2} (Edu^2 + 2Fdu dv + Gdv^2),$$

se réduit dans le cas présent à

$$(9) \quad d\tau^2 = \frac{1}{R_1 R_2} (Edu^2 - 2Fdu dv + Gdv^2).$$

On remarquera l'analogie de cette formule avec celle qu'on obtient quand la surface est rapportée à ses lignes asymptotiques, savoir

$$d\tau^2 = - \frac{1}{R_1 R_2} (Edu^2 - 2Fdu dv + Gdv^2).$$

Considérons maintenant les équations analogues aux équations (1),

où figurent, au lieu des coefficients E, F, G de l'élément linéaire ds^2 et des fonctions A, A₁, B, B₁, C, C₁ qui s'en déduisent, les coefficients e, f, g de $d\tau^2$ et les fonctions a, a_1, b, b_1, c, c_1 , homologues des précédentes. Ces formules sont les suivantes :

$$(II) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\delta'}{h} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\delta}{h} \right) = c_1 \frac{\delta}{h} - 2b_1 \frac{\delta'}{h} + a_1 \frac{\delta''}{h}, \\ \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\delta'}{h} \right) - \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\delta''}{h} \right) = c \frac{\delta}{h} - 2b \frac{\delta'}{h} + a \frac{\delta''}{h}, \end{cases} \quad (h^2 = eg - f^2),$$

auxquelles il faudrait joindre celle qui exprime que la courbure totale de la forme quadratique

$$d\tau^2 = e du^2 + 2f du dv + g dv^2$$

est égale à 1.

En vertu de la relation (9) on a

$$(10) \quad e = \frac{E}{R_1 R_2}, \quad f = \frac{F}{R_1 R_2}, \quad g = \frac{G}{R_1 R_2}, \quad h = \frac{H}{R_1 R_2}.$$

Si donc on pose

$$(11) \quad \frac{\delta}{e} = \frac{\delta''}{g} = \mu h,$$

et qu'on tienne compte de l'expression de λ , il viendra

$$(II') \quad \left\{ \begin{aligned} \mu &= \frac{\sqrt{R_1 R_2}}{\sqrt{eg}}, \\ e - \frac{\partial \log \mu}{\partial v} &= c_1 + a_1 \frac{g}{e} + \frac{e_v}{e}, \\ \frac{\partial \log \mu}{\partial u} &= a - c \frac{e}{g} + \frac{g_u}{g}, \end{aligned} \right.$$

relations dont l'analogie avec les équations (I)' est complète. On en déduit

$$(12) \quad \frac{\partial}{\partial u} \left(c_1 + a_1 \frac{g}{e} + \frac{e_v}{e} \right) = \frac{\partial}{\partial v} \left(a - c \frac{e}{g} + \frac{g_u}{g} \right).$$

Telle est la condition nécessaire et suffisante pour qu'une forme

$$d\tau^2 = e du^2 + 2f du dv + g dv^2,$$

dont la courbure totale est égale à 1, soit l'élément linéaire de la représentation sphérique d'une surface, rapportée à ses

lignes diagonales. En effet, l'équation (12) étant vérifiée, les deux dernières équations (II)' déterminent une fonction μ , à un facteur constant près. Alors la première des équations (II)' fait connaître le produit $R_1 R_2$; les relations (11) fournissent δ et δ'' ; on prend δ' nul; enfin les formules (10) donnent E, F, G. On connaît donc les six fonctions E, F, G, δ , δ' , δ'' , ce qui détermine la surface, à la position près.

6. On pourrait, à l'aide des formules (I)' ou (II)', chercher à déterminer des surfaces sur lesquelles le réseau diagonal possède certaines propriétés, telles que celle dont nous allons donner un exemple.

Considérons les surfaces de translation dont les deux familles de génératrices sont des courbes planes, situées dans des plans rectangulaires. L'équation générale de ces surfaces est

$$z = X(x) + Y(y).$$

Pour ces surfaces, on a visiblement

$$\begin{aligned} E &= 1 + X'^2, & G &= 1 + Y'^2, \\ \frac{\delta}{X''} &= \frac{\delta''}{Y''}, & \delta' &= 0. \end{aligned}$$

Si donc on veut déterminer les fonctions X et Y de façon que les génératrices planes ($x = \text{const.}$, $y = \text{const.}$) soient lignes diagonales, on trouvera

$$\frac{X}{1 + X'^2} = \frac{Y}{1 + Y'^2}.$$

Ces deux rapports doivent être constants. L'intégration est immédiate et l'on obtient la surface

$$e^{mz} = \cos mx \cos my \quad (m = \text{const.}),$$

dont les lignes de courbure se déterminent par quadratures et sont, en projection sur le plan des xy , également inclinées sur les axes coordonnés.

SUR LA RÉOLUTION EXACTE EN NOMBRES ENTIERS
DES ÉQUATIONS LINÉAIRES A COEFFICIENTS QUELCONQUES;

Par M. E. CAHEN.

1. Soit a un nombre > 0 .

Nous appellerons *suite normale de valeurs approchées de ce nombre*, une suite infinie de fractions

$$\frac{m^1}{n^1}, \quad \frac{m^2}{n^2}, \quad \dots$$

jouissant de la propriété suivante : appelons $\frac{m}{n}$ le terme général; en posant

$$a = \frac{m}{n} + \frac{\varepsilon_n}{n},$$

ε_n tend vers zéro lorsque le rang du terme $\frac{m}{n}$ augmente indéfiniment. Comme nous allons le voir de suite, il existe de telles suites.

Distinguons deux cas suivant que a est incommensurable ou commensurable.

1° *a incommensurable*. — Comme exemple de suite normale, on peut citer les réduites successives du développement de a en fraction continue.

En effet, soit $\frac{m}{n}$ l'une de ces réduites.

On sait que

$$\left| a - \frac{m}{n} \right| < \frac{1}{n^2}.$$

Donc, en posant

$$a = \frac{m}{n} + \frac{\varepsilon_n}{n},$$

on a

$$|\varepsilon_n| < \frac{1}{n}.$$

Donc ε_n tend vers zéro.

2° *a commensurable*. — Soit $a = \frac{A}{B}$. Je dis que, dans ce cas, les termes d'une suite normale sont, à partir d'un certain rang, égaux à $\frac{A}{B}$. En effet, en posant

$$\frac{A}{B} = \frac{m}{n} + \frac{\varepsilon_n}{n},$$

on a

$$\varepsilon_n = \frac{nA - mB}{B}.$$

Si $\frac{m}{n}$ n'est pas égal à $\frac{A}{B}$, le numérateur de cette expression est au moins égal à 1 et l'on a

$$|\varepsilon_n| > \frac{1}{B}.$$

Donc, ε_n ne peut tendre vers zéro, à moins qu'à partir d'un certain rang dans la suite, $\frac{m}{n}$ ne soit constamment égal à $\frac{A}{B}$. Alors, $\varepsilon_n = 0$.

Corollaire. — Soient $\frac{m}{n}$, $\frac{m'}{n'}$ deux termes quelconques d'une suite normale. La condition nécessaire et suffisante pour que α soit commensurable est que, à partir d'un certain rang, la quantité $m'n - mn'$ soit constamment nulle ⁽¹⁾.

2. Généralisation pour plusieurs nombres.

Soient $a_1, a_2, \dots, a_p$ des nombres.

Nous appellerons *suite normale de systèmes de valeurs approchées de ces nombres*, une suite de systèmes de p valeurs commensurables jouissant de la propriété suivante :

Appelons

$$\frac{m_1}{n}, \quad \frac{m_2}{n}, \quad \dots, \quad \frac{m_p}{n},$$

un système de cette suite (toutes les fractions composant ce système sont supposées réduites au même dénominateur), en posant

$$a_1 = \frac{m_1}{n} + \frac{\varepsilon_n^1}{n}, \quad a_2 = \frac{m_2}{n} + \frac{\varepsilon_n^2}{n}, \quad \dots, \quad a_p = \frac{m_p}{n} + \frac{\varepsilon_n^p}{n},$$

les quantités $\varepsilon_n^{(1)}, \varepsilon_n^{(2)}, \dots, \varepsilon_n^{(p)}$ tendent vers zéro quand le rang du système augmente indéfiniment :

⁽¹⁾ Si l'on astreignait les termes d'une suite normale à être irréductibles, dans le cas de α commensurable, il n'y aurait qu'un nombre limité de termes dans la suite normale; l'un d'eux serait égal à α .

1° $a_1, a_2, \dots, a_p$ non tous commensurables.

Comme exemple de suite normale, on peut citer les valeurs approchées successives découvertes par Hermite. Il a montré qu'on pouvait trouver une suite infinie de systèmes de fractions

$$\frac{m_1}{n}, \quad \frac{m_2}{n}, \quad \dots, \quad \frac{m_p}{n},$$

telles que leurs différences respectives avec $a_1, a_2, \dots, a_p$ soient en valeur absolue plus petites que $\frac{\lambda_p}{n\sqrt[p]{n}}$, λ_p étant un nombre fixe qui ne dépend que de p ($\lambda_p = \frac{p-1}{p}$ d'après M. Minkowsky).

En posant donc

$$a_1 = \frac{m_1}{n} + \frac{\varepsilon_n^1}{n}, \quad \dots, \quad a_p = \frac{m_p}{n} + \frac{\varepsilon_n^p}{n},$$

les quantités $\varepsilon_n^1, \dots, \varepsilon_n^{(p)}$ sont toutes plus petites que $\frac{\lambda_p}{n\sqrt[p]{n}}$ et, par suite, tendent vers zéro.

2° $a_1, a_2, \dots, a_p$ sont tous commensurables.

Soit

$$a_1 = \frac{A_1}{B}, \quad a_2 = \frac{A_2}{B}, \quad \dots, \quad a_p = \frac{A_p}{B}.$$

Soit

$$\frac{m_1}{n}, \quad \frac{m_2}{n}, \quad \dots, \quad \frac{m_p}{n},$$

un système de fractions non toutes égales respectivement à

$$\frac{A_1}{B}, \quad \frac{A_2}{B}, \quad \dots, \quad \frac{A_p}{B};$$

on voit comme plus haut que certaines des quantités $\varepsilon_n^1, \varepsilon_n^2, \dots, \varepsilon_n^{(p)}$ sont $\geq \frac{1}{B}$.

Donc elles ne peuvent pas tendre toutes vers zéro, à moins qu'à partir d'un certain rang, $\frac{m_1}{n}, \frac{m_2}{n}, \dots, \frac{m_p}{n}$ ne soient tous égaux respectivement à $\frac{A_1}{B}, \dots, \frac{A_p}{B}$.

Alors tous les ε sont nuls.

Corollaire. — Soient

$$\frac{m_1}{n}, \quad \frac{m_2}{n}, \quad \dots, \quad \frac{m_p}{n},$$

$$\frac{m'_1}{n}, \quad \frac{m'_2}{n}, \quad \dots, \quad \frac{m'_p}{n},$$

deux systèmes de la suite normale de systèmes.

La condition nécessaire et suffisante pour que $a_1, a_2, \dots, a_p$ soient tous commensurables est que, à partir d'un certain rang, tous les déterminants du second ordre de la forme $m_h n' - m'_h n$ soient nuls, ou encore que tous les déterminants du second ordre extraits de la matrice

$$\begin{vmatrix} m_1 & m_2 & \dots & m_p & n \\ m'_1 & m'_2 & \dots & m'_p & n \end{vmatrix}$$

soient nuls.

3. *Propriété fondamentale des suites normales.*

Mais le cas où $a_1, a_2, \dots, a_p$ sont tous commensurables n'est que le dernier d'une série d'autres cas que nous allons examiner maintenant.

Dire, en effet, que $a_1, a_2, \dots, a_p$ sont égaux à $\frac{\Lambda_1}{B}, \frac{\Lambda_2}{B}, \dots, \frac{\Lambda_p}{B}$, c'est-à-dire qu'on a

$$\begin{aligned} B a_1 &= \Lambda_1 = 0, \\ B a_2 &= \Lambda_2 = 0, \\ &\dots\dots\dots \\ B a_p &= \Lambda_p = 0, \end{aligned}$$

c'est donc dire qu'il existe entre $a_1, a_2, \dots, a_p$, p relations linéaires distinctes à coefficients entiers.

Réciproquement, si, entre $a_1, a_2, \dots, a_p$, il existe p relations linéaires distinctes à coefficients entiers, en résolvant ces p relations, on voit que $a_1, a_2, \dots, a_p$ sont commensurables. Alors on voit que ce cas n'est qu'un cas particulier de celui où il existe r de ces relations ($r \leq p$).

Il faut donc examiner ces cas. Pour cela, nous démontrons le théorème suivant qui peut être considéré comme la propriété fondamentale des systèmes normaux et qui est une généralisation de celle du n° 1.

Si, entre des nombres $a_1, a_2, \dots, a_p$, il existe une relation linéaire à coefficients entiers

$$(1) \quad A_1 a_1 + A_2 a_2 + \dots + A_p a_p + B = 0,$$

la même relation existe entre les fractions d'un système normal

$$A_1 \frac{m_1}{n} + A_2 \frac{m_2}{n} + \dots + A_p \frac{m_p}{n} + B = 0,$$

pourvu que le dénominateur du système dépasse une certaine limite.

En effet, on peut poser

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{m_1}{n} + \frac{\varepsilon_n^1}{n}, \\ &\dots\dots\dots, \\ a_p &= \frac{m_p}{n} + \frac{\varepsilon_n^p}{n}, \end{aligned}$$

les ε tendant vers zéro.

L'égalité (1) devient alors

$$A_1 \left(\frac{m_1}{n} + \frac{\varepsilon_n^1}{n} \right) + A_2 \left(\frac{m_2}{n} + \frac{\varepsilon_n^2}{n} \right) + \dots + A_p \left(\frac{m_p}{n} + \frac{\varepsilon_n^p}{n} \right) + B = 0,$$

d'où

$$(2) \quad A_1 m_1 + A_2 m_2 + \dots + A_p m_p + B n = - (A_1 \varepsilon_n^1 + A_2 \varepsilon_n^2 + \dots + A_p \varepsilon_n^{(p)}).$$

Comme le premier membre de cette égalité est entier, et que le second membre tend vers zéro, il arrivera, à partir d'un certain rang, que ces deux membres seront nuls. On a alors

$$(3) \quad A_1 m_1 + A_2 m_2 + \dots + A_p m_p + B n = 0,$$

$$(4) \quad A_1 \frac{m_1}{n} + A_2 \frac{m_2}{n} + \dots + A_p \frac{m_p}{n} + B = 0.$$

Réciproquement. — Si la relation (4) a lieu à partir d'un certain rang, la relation (3) a lieu aussi. Alors, le premier membre de l'égalité (2) est nul, et, comme le second tend vers zéro, on voit, en passant à la limite, que l'égalité (1) est vérifiée.

Le théorème du n° 1 se généralise de la façon suivante :

les valeurs

$$\frac{m_1^h}{n}, \quad \frac{m_2^h}{n}, \quad \dots, \quad \frac{m_p^h}{n}$$

et, par suite aussi, entre

$$a_1, \quad a_2, \quad \dots, \quad a_p \quad (1).$$

4. La question précédente intervient dans la *solution approchée en nombres entiers des équations linéaires* (2). La première chose à faire est en effet de découvrir les relations *linéaires exactes* à coefficients entiers qui existent entre les coefficients. Autrement dit on est amené à la question de la *résolution exacte en nombres entiers des équations linéaires à coefficients quelconques*.

S'il s'agit d'une équation homogène, soit $p+1$ le nombre d'inconnues. Après avoir divisé par le coefficient de x_{p+1} on peut écrire l'équation

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_p x_p + x_{p+1} = 0.$$

La question ne diffère pas de celle qu'on vient de traiter. Les valeurs des inconnues $x_1, x_2, \dots, x_{p+1}$ sont les nombres que nous avons appelés plus haut $A_1, A_2, \dots, A_p, B$.

Considérons maintenant une équation non homogène. On peut la diviser par le terme qui ne contient pas d'inconnue et l'écrire

$$a_1 x_1 + \dots + a_p x_p + 1 = 0.$$

Pour qu'elle soit possible il faut que la suivante

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_p x_p + x_{p+1} = 0$$

le soit. Il faudra donc d'abord que les déterminants d'ordre $p+1$

(1) Il est bien évident que la condition énoncée ne peut servir à constater par un simple calcul numérique l'existence de relations entre des incommensurables. Car, si loin qu'on pousse le Tableau précédent, si la condition n'est pas satisfaite, elle le sera peut-être plus loin. Inversement, si elle l'est elle cessera peut-être de l'être plus loin. Mais cela est dans la nature des choses. Pour un seul nombre déjà, il ne suffit pas de savoir calculer ses chiffres décimaux l'un à la suite de l'autre, pour savoir s'il est commensurable ou non.

(2) L. KRONECKER, *Monatsber. der K. P. Ak. d. Wiss. zu Berlin*, 1884, p. 1179, 1193, 1271, 1299. Werke 3^e, p. 49, 109.

extraits du Tableau des systèmes de valeurs normales relatives aux nombres $a_1, a_2, \dots, a_p$ soient tous nuls à partir d'un certain rang.

Cette condition étant remplie, les équations

$$m_1^h x_1 + m_2^h x_2 + \dots + m_p^h x_p + n^h x_{p+1} = 0, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

se réduiront à r d'entre elles. Il restera à exprimer qu'elles ont un ou des systèmes de solutions ou $x_{p+1} = 1$, autrement dit que les r équations à coefficients entiers

$$m_1^h x_1 + m_2^h x_2 + \dots + m_p^h x_p + n^h = 0, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

sont possibles en nombres entiers. La condition est connue et l'on sait trouver la solution générale (*).

Considérons enfin un système d'équations. On peut voir si chaque équation prise à part est possible et en trouver la solution générale. On sait que cette solution générale est une expression linéaire à coefficients entiers de variables entières. La question de savoir si le système a une solution, c'est-à-dire si les solutions des différentes équations peuvent coïncider, est donc ramenée à une question d'analyse indéterminée du premier degré que l'on sait résoudre.

§. On peut simplifier la méthode donnée pour la résolution de l'équation

$$(6) \quad a_1 x_1 + \dots + a_p x_p + 1 = 0.$$

Celle donnée plus haut exige la connaissance d'une suite normale pour p nombres; cette suite peut se trouver par l'algorithme d'Hermite relatif à p nombres.

La simplification en question consiste à n'appliquer que l'algorithme relatif à $p - 1$ nombres. C'est une généralisation de la méthode donnée par Hermite lui-même dans le cas de $p = 2, 3, 4$.

(*) Voir par exemple : STIELTJES, *Essai sur la théorie des nombres* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*), t. IV, 1890.

(2) HERMITE, *Journal für Mathematik*, t. XL, 1865, p. 201, et t. LXXXIII, 1880, p. 12.

L'équation peut s'écrire

$$\frac{a_1}{a_p} x_1 - \frac{a_2}{a_p} x_2 - \dots + \frac{a_{p-1}}{a_p} x_{p-1} + x_p - \frac{b_p}{a_p} = 0.$$

ou en posant, d'après l'algorithme en question,

$$\frac{a_1}{a_p} = \frac{m_1}{n} + \frac{\varepsilon_1}{n^{p-1}\sqrt[p]{n}}, \quad \dots, \quad \frac{a_{p-1}}{a_p} = \frac{m_{p-1}}{n} + \frac{\varepsilon_{p-1}}{n^{p-1}\sqrt[p]{n}},$$

puis, multipliant toute l'équation par n ,

$$\begin{aligned} & \left(m_1 + \frac{\varepsilon_1}{n^{p-1}\sqrt[p]{n}} \right) x_1 + \left(m_2 + \frac{\varepsilon_2}{n^{p-1}\sqrt[p]{n}} \right) x_2 + \dots \\ & + \left(m_{p-1} + \frac{\varepsilon_{p-1}}{n^{p-1}\sqrt[p]{n}} \right) x_{p-1} + n x_p - \frac{n b_p}{a_p} = 0. \end{aligned}$$

Soit A_n le nombre entier le plus voisin de $\frac{n b_p}{a}$; on a

$$\frac{n b_p}{a_p} = A_n + r_n, \quad |r_n| < \frac{1}{2}.$$

L'équation s'écrit alors

$$\begin{aligned} & m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_{p-1} x_{p-1} + n x_p - A_n \\ & = \left(\frac{\varepsilon_1 x_1 + \varepsilon_2 x_2 + \dots + \varepsilon_{p-1} x_{p-1}}{n^{p-1}\sqrt[p]{n}} \right) + r_n. \end{aligned}$$

Or, n croissant indéfiniment, le second membre devient plus petit que 1, et, comme le premier membre est entier, c'est que les deux membres sont nuls. On a donc

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_{p-1} x_{p-1} + n x_p + A_n = 0.$$

Faisons croître n ; nous aurons un certain nombre d'équations de cette forme, dont on pourra trouver la solution générale. Il restera à savoir si cette solution satisfait à l'équation (6).

SUR LES ÉQUATIONS GÉNÉRALES DE L'ÉLASTICITÉ :

Par M. COMBEBIAC.

Dans une Note publiée récemment dans le *Bulletin* j'ai indiqué les termes qu'il est nécessaire d'introduire dans les équations générales de l'élasticité pour tenir compte des couples extérieurs

qui peuvent agir sur les particules d'un corps (couples magnétiques).

Ce cas diffère de celui où ces couples n'existent pas en ce que le déterminant des coefficients qui interviennent dans la détermination des efforts en un point n'est plus symétrique, de sorte que ces coefficients sont au nombre de neuf au lieu de six.

Dans le cas ordinaire, ces six coefficients s'expriment par des relations connues en fonction des six paramètres qui caractérisent la déformation au point considéré, du moins lorsque cette déformation est suffisamment petite, et il y a correspondance univoque entre ces deux systèmes de six quantités, que nous désignerons, pour simplifier le langage, par *la déformation* et *l'état de tension*.

Il y a lieu de se demander ce que devient cette relation dans le cas qui nous occupe.

Dans le cas ordinaire, cette relation peut être obtenue en partant de l'expression de l'énergie élastique ou, plus simplement, de celle du travail élastique dans un déplacement virtuel.

Cherchons donc cette expression dans le cas général (cas où il existe des couples élémentaires).

Chaque élément du corps est soumis, en raison de l'état de tension, à une force et à un couple, dont la grandeur est de l'ordre du volume de l'élément, et il faut observer que dans ce décompte sont compris les efforts qui s'exercent sur la surface extérieure du corps.

Pour avoir l'expression du travail élastique, il suffira de retrancher du travail des forces et des couples relatifs aux éléments de volume, celui des forces superficielles, dont la cause est évidemment extérieure au corps solide.

Soient ξ , η , ζ les composantes suivant les axes de coordonnées du déplacement virtuel d'un point quelconque du corps.

Soient N_1 , N_2 , N_3 , T_1 , T_2 , T_3 , L , M , N , les neuf quantités déterminant, suivant la notation employée dans la Note mentionnée plus haut, l'état de tension au même point.

Soient X_e , Y_e , Z_e les composantes suivant les axes de coordonnées de l'effort par unité de surface exercé en un point de la surface extérieure.

Le travail élastique, pour le déplacement virtuel ξ , η , ζ , a pour

expression

$$\delta \tilde{\epsilon} = \iiint (A \xi + B \eta + C \zeta) d\tau - \iint (2Lp + 2Mq + 2Nr) d\sigma \\ - \iint (X_e \xi + Y_e \eta + Z_e \zeta) d\sigma,$$

où $d\tau$ désigne un élément de volume, $d\sigma$ un élément de la surface du corps, et où l'on a posé

$$A = \left(\frac{\partial N_1}{\partial x} - \frac{\partial T_3}{\partial y} - \frac{\partial T_2}{\partial z} + \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y} \right), \\ B = \left(\frac{\partial T_3}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} - \frac{\partial T_1}{\partial z} + \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial z} \right), \\ C = \left(\frac{\partial T_2}{\partial x} - \frac{\partial T_1}{\partial y} + \frac{\partial N_3}{\partial z} + \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x} \right), \\ N_p = (N_1 \alpha + T_3 \beta + T_2 \gamma + M \gamma - N \beta), \\ \dots \dots \dots ? \dots \dots \dots \\ p = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right), \\ q = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial z} \right), \\ r = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x} \right).$$

Le dernier terme de l'expression de $d\tilde{\epsilon}$, constitué par une intégrale de surface précédée du signe moins, peut, comme l'on sait, être transformée en une intégrale de volume, savoir :

$$\iiint \left[N_1 \frac{\partial \xi}{\partial x} + (T_3 - N) \frac{\partial \xi}{\partial y} + (T_2 + M) \frac{\partial \xi}{\partial z} \right. \\ \left. + (T_3 + N) \frac{\partial \eta}{\partial x} + N_2 \frac{\partial \eta}{\partial y} + (T_1 - L) \frac{\partial \eta}{\partial z} \right. \\ \left. + (T_2 - M) \frac{\partial \zeta}{\partial x} + (T_1 + L) \frac{\partial \zeta}{\partial y} + N_3 \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right] d\tau \\ - \iint (A \xi + B \eta + C \zeta) d\sigma.$$

L'expression de $\delta \tilde{\epsilon}$ devient

$$\delta \tilde{\epsilon} = \iiint \left[N_1 \frac{\partial \xi}{\partial x} + N_2 \frac{\partial \eta}{\partial y} + N_3 \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right. \\ \left. + T_1 \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) + T_2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) + T_3 \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \right] d\tau.$$

Cette expression est indépendante de L, M, N. et est la même que dans le cas où L, M, N sont nuls.

Les quantités $N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3$ doivent donc être exprimées de la même manière que dans ce dernier cas en fonction des six paramètres qui caractérisent la déformation

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial r_1}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial z}, \frac{1}{2} \left(\frac{\partial r_1}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial y} \right), \frac{1}{2} \left(\frac{\partial z}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x} \right), \frac{1}{2} \left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial r_1}{\partial x} \right).$$

La détermination analytique du problème est la même que dans le cas ordinaire.

Les équations du problème sont

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial x} - \frac{\partial T_3}{\partial y} - \frac{\partial T_2}{\partial z} &= \rho(X - J_1) - \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}, \\ \frac{\partial T_3}{\partial x} - \frac{\partial N_2}{\partial y} - \frac{\partial T_1}{\partial z} &= \rho(Y - J_2) - \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}, \\ \frac{\partial T_2}{\partial x} - \frac{\partial T_1}{\partial y} - \frac{\partial N_3}{\partial z} &= \rho(Z - J_3) - \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}, \\ N_1 x - T_3 y - T_2 z &= X_0 - N y - M z, \\ T_3 x - N_2 y - T_1 z &= Y_0 - L y - N x, \\ T_2 x - T_1 y - N_3 z &= Z_0 - M x - L y, \end{aligned}$$

où les trois dernières sont relatives aux points de la surface extérieure.

$N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3$ doivent être exprimées en fonction des six paramètres représentant la déformation; L, M, N doivent être considérées comme des fonctions données de x, y, z aussi bien sur la surface qu'à l'intérieur du corps.

On peut se rendre compte, dans le cas d'un corps isotrope, que les quantités L, M, N doivent être indépendantes de la déformation; cela tient à ce qu'il ne peut exister entre un ellipsoïde et un vecteur une relation indépendante des déplacements sans déformation, c'est-à-dire ici des rotations autour du centre de l'ellipsoïde.

On le voit par des considérations analogues à celles qui permettent de démontrer que deux quadriques concentriques, par exemple, l'ellipsoïde des dilatations et la quadrique indicatrice de la distribution des efforts en un point ayant entre elles une relation géométrique déterminant l'une par l'autre doivent avoir les

mêmes plans principaux et les mêmes plans de sections circulaires ⁽¹⁾.

Dans le cas qui nous occupe d'un vecteur déterminé géométriquement par rapport à une quadrique, on démontre facilement que sa direction doit être donnée par un des points de l'infini déterminés comme points de rencontre des cordes communes à la section de la quadrique par le plan de l'infini et au cercle imaginaire de l'infini, c'est-à-dire que cette direction doit être celle de l'un des axes. Mais, comme dans ces conditions la relation ne serait pas invariante dans une permutation des axes de la quadrique, l'on voit qu'elle ne peut pas exister.

Je dois aux indications qui m'ont été obligeamment données par M. Appell depuis la publication de ma première Note, d'avoir pu prendre connaissance de deux écrits ayant trait au même sujet.

M. Love ⁽²⁾, dans son *Traité*, indique brièvement que, dans le cas où le milieu est soumis à des couples extérieurs élémentaires, il y a lieu de faire intervenir neuf coefficients au lieu de six pour déterminer la distribution des efforts en un point. Cet auteur renvoie d'ailleurs à un *Mémoire* de M. Larmor.

Ce dernier auteur ⁽³⁾ étudie la propagation des ondes dans un milieu dont chaque élément serait doué, en plus de l'inertie ordinaire, d'une *inertie dirigée*, comme le serait, par exemple, un corps renfermant dans une cavité un gyroscope. Dans ces conditions, un élément en mouvement présente un couple d'inertie, qui intervient dans les formules du mouvement. Ce couple s'exprime en fonction des vitesses et des accélérations.

Un tel milieu n'est autre que le milieu hypothétique de Maxwell, et M. Larmor applique ses propriétés à la théorie de la propagation de la lumière polarisée.

On voit que la question traitée par M. Larmor diffère sensiblement de celle sur laquelle nous nous sommes proposé d'attirer.

(1) Cf. APPELL, *Traité de Mécanique*, t. III, p. 508; Paris, Gauthier-Villars; 1901.

(2) LOVE, *Treatise on the mathematical theory of elasticity* (Cambridge, University Press, 1892).

(3) LARMOR, *On the propagation of a disturbance in a gyrostatically medium* (*Proc. Lond. Math. Soc.*, nov. 1891).

par la présente Note, l'attention des mathématiciens : la lumière étant loin d'être faite (le lecteur s'en sera sans doute aperçu) sur les difficultés d'allure paradoxale que présente la détermination de la déformation en chaque point d'un corps soumis à des couples élémentaires extérieurs.

SUR LA FORME CANONIQUE DES SUBSTITUTIONS LINÉAIRES;

Par M. DE SÉGUIER.

On peut établir simplement comme il suit la forme canonique des substitutions linéaires et quelques-unes de ses conséquences :

1. On démontrera d'abord, comme M. Jordan dans son *Cours d'Analyse* (t. III, p. 173), le théorème suivant :

Étant donnée une substitution linéaire $x = (x_{ik})$ des variables $x_1, \dots, x_n$, on peut toujours trouver n fonctions linéaires indépendantes des x formant une ou plusieurs suites $y_1, \dots, y_m; y'_1, \dots, y'_m; \dots$ telles que x remplace les y d'une même suite $y_1, \dots, y_m; \dots, y_m$ respectivement par $s_i y_1, \dots, s_i(y_m - y_{m-1}), \dots, s_i(y_m - y_{m-1}) - y_{m-1}$ ($i = 1, 2, \dots, p$), s_i étant racine du déterminant caractéristique Δ_x de x , qu'il y ait au moins une suite répondant à chaque racine et que le nombre des y figurant dans les suites répondant à une racine coïncide avec la multiplicité de cette racine.

Considérons maintenant le corps C résultant de l'adjonction des x_{ik} au corps des nombres rationnels ou au corps des nombres $0, 1, \dots, p-1 \pmod{p}$ (p premier). Il s'agit de démontrer la proposition suivante :

Soit $\Delta_x = \prod_l f_l(s)^{\sigma_l}$ ($l = 1, \dots, \delta$) la décomposition de Δ_x en facteurs irréductibles dans C , f_l étant de degré ν_l et ayant les racines s_{lk} ($k = 0, \dots, \nu_l - 1$). On peut faire : 1° qu'il y ait une suite $y_1, \dots, y_{m_1}$ où les coefficients des x dans y_i appartiennent au corps C_l résultant de l'adjonction de s_{l0} à C ; 2° qu'il y ait ν_l suites S_{lk} conjuguées $y_{1+k\nu_l}, \dots, y_{m_1+k\nu_l}$ ($y_{i0} = y_i$); 3° que s'il y a plusieurs suites S_{lk} ($j = 1, \dots, \mu_l; S_{l1+k\nu_l} = S_{lk}$), $y_{1+j\nu_l}, \dots, y_{1+j\nu_l+k\nu_l}, \dots, y_{1+m_1+j\nu_l}$ ($y_{1+m_1+k\nu_l} = y_{1+m_1}$), formées avec la même

racine $s_{l k_l}$, on ait $\Sigma_{j_l} m_{j_l} = \tau_l$. On aura ainsi pour chaque valeur de k_l une série $s_{l k_l}$ de τ_l variables (réparties en μ_l suites) et ν_l séries conjuguées formant le système s_l relatif à $f_l(\Sigma_{j_l} \nu_l \tau_l = n)$; si α_l est l'effet de α sur s_l , les α_l sont permutable et $\alpha = \Pi \alpha_l$.

J'omettrai dans la démonstration l'indice l , sauf à α_l , et j'écrirai $m_k, s_k, \gamma_{j h k}, S_k, s_k, s$ pour $m_{l k_l}, s_{l k_l}, \gamma_{l j_l h_l k_l}, S_{l k_l}, s_{l k_l}, s_l$ respectivement.

Si tous les σ sont égaux à 1, la démonstration du théorème précédent suffit. Si $\sigma > 1$, on peut y supposer $s_l = s_0$ et elle fournit pour α une forme où figure s_0 . Or α transforme évidemment un polynome $\varphi(x_1, \dots, x_n, s_0) = \varphi(s_0)$ à coefficients dans C en un polynome de même nature $\psi(s_0)$ et par suite $\varphi(s_k)$ en $\psi(s_k)$. Les variables de s_0 étant indépendantes, celles de s_k le seront donc aussi. Mais de plus, cela est bien connu, les variables de s le seront. Car supposons que

$$\begin{aligned} \varphi &= c_{11r} \gamma_{11r} + \dots + c_{\mu, m_{\mu}, r} \gamma_{\mu, m_{\mu}, r} + \dots \\ &= c_{1,1,r} \gamma_{1,1,r} + c_{1,1,r+\rho} \gamma_{1,1,r+\rho} + \dots + c_{\mu, m_{\mu}, r+\rho} \gamma_{\mu, m_{\mu}, r+\rho} + \dots \end{aligned}$$

soit nulle, les coefficients des variables de s_r n'étant pas tous nuls. Soit $c_{\lambda \tau \theta}$ le premier coefficient $\neq 0$ à partir de la droite ($\theta \neq r$). En transformant φ par α et en retranchant du résultat $s_0 \varphi$, on aura une fonction nulle ne contenant plus $\gamma_{\lambda \tau \theta}$, mais contenant les variables de s_r . En répétant l'opération, on arriverait à une relation entre les γ de s_r .

Supposons alors $\neq 0$ le déterminant des coefficients de $x_1, \dots, x_{\nu \sigma}$ dans les $\gamma_{j h k}$ ($j = 1, \dots, \mu; h = 1, \dots, m_j; k = 0, \dots, \nu - 1$). $s_0, \dots, s_{\nu-1}$ figurant symétriquement dans les équations qui lient les

$$x_\alpha \quad (\alpha = 1, \dots, \nu \tau)$$

aux γ et aux $x_{\nu \sigma + b}$ ($b = 1, \dots, n'$; $n' = n - \nu \tau$), on aura

$$x_\alpha = \Sigma_k \gamma_{\alpha k} = T_\alpha,$$

T_α étant une fonction des $x_{\nu \sigma + b}$ à coefficients dans C et $\gamma_{\alpha k}$ une fonction des γ de s_k dont les coefficients sont des polynomes en s_k à coefficients dans C indépendants de k ; α remplace $x_{\nu \sigma + b}$ par une

expression de la forme

$$\Sigma_k \zeta_{bk} = \Sigma_c \zeta_{bc} x_{\gamma\sigma+c} \quad (c = 1, \dots, n'), \quad \zeta_{bk} = \Sigma_{jh} z_{bjhk} y_{jhk},$$

ζ_{bc} étant dans C et z_{bjhk} étant un polynome en s_k à coefficients dans C indépendants de k . En prenant pour variables les y et les $x_{\gamma\sigma+b}$, on voit que le déterminant caractéristique $\Delta_{\beta}(s)$ de la matrice des β est $\Delta f^{-\sigma}$ et que par suite $\Delta_{\beta}(s_k) = 0$. Prenons alors pour variables les y et les fonctions

$$x'_b = x_{\gamma\sigma+b} = \Sigma_k \varphi_{bk} s_k, \quad \varphi_{bk} = \Sigma_{jh} u_{bjhk} y_{jhk},$$

u_{bjhk} étant un polynome à coefficients indéterminés dans C mais indépendants de k , en sorte que φ_{bk} est une fonction linéaire des x à coefficients dans C ; α transforme x'_b en

$$\Sigma_k \zeta'_{bk} = \Sigma_c \beta_{bc}(x'_c = \Sigma_k \varphi_{ck} s_k) = \Sigma_k s_k (\varphi_{bk} = \Sigma_{jh} u_{bjhk} y_{jhk} = (u_{b,j,m_j-1,k} = 0)).$$

Pour que les y disparaissent de cette expression, il faut et il suffit que les u vérifient

$$\Sigma_c \beta_{bc} u_{cjhk} = s_k (u_{bjhk} - u_{b,j,h+1,k}) = z_{bjhk}.$$

Pour $h = m_j$, ces équations, dont le déterminant est $\Delta_{\beta}(s_k) \neq 0$, donnent $u_{1jm_k}, \dots, u_{n'jm_k}$. Ceux-là connus, les mêmes équations, pour $h = m_j - 1$, donnent $u_{1,j,m_j-1,k}, \dots, u_{n',j,m_j-1,k}$; et ainsi de suite. Les u étant ainsi déterminés, on aura $\alpha = \alpha_1 \alpha_{\alpha'}$, α_1 étant l'effet de α sur les y , $\alpha_{\alpha'}$ une substitution à coefficients dans C n'opérant que sur les x' (fonctions linéaires des x à coefficients dans C) et $\alpha_{\alpha'} x'_b = \Delta_{\alpha} f^{-\sigma}$. On est donc ramené à canoniser $\alpha_{\alpha'}$ et la proposition est démontrée.

2. Soient

$$y_{i_1, i_2, \dots, i_{h_j} k}, \quad \Sigma_{i_1, i_2, \dots, i_{h_j} k} u_{i_1, i_2, \dots, i_{h_j} k}^{\lambda_{j_1} h_{j_1} \lambda_{j_2} k} y_{i_1, i_2, \dots, i_{h_j} k}$$

de nouvelles variables. Pour qu'elles soient canoniques, il faut d'abord que α leur fasse subir la même substitution qu'aux y , chaque y' correspondant à l' y de mêmes indices, d'où la condition

$$(1) \quad u_{i_1, i_2, \dots, i_{h_j} k}^{\lambda_{j_1} h_{j_1} \lambda_{j_2} k} (s_k k) = s_k k (u_{i_1, i_2, \dots, i_{h_j} k}^{\lambda_{j_1} h_{j_1} \lambda_{j_2} k} s_k k) = s_k k u_{i_1, i_2, \dots, i_{h_j} k}^{\lambda_{j_1} h_{j_1} \lambda_{j_2} k-1 k}.$$

$u_{i_1, i_2, \dots, i_{h_j} k}^{\lambda_{j_1} h_{j_1} \lambda_{j_2} k}$ étant nul si h_{j_1} est < 1 ou $> m_{j_1}$ ou si h_{j_2} est < 1 ou $> m_{j_2}$.

3. Cherchons le nombre de ces changements de variables (ou des substitutions α') quand C est un corps d'imaginaires de Galois d'ordre $\pi = p^m$ (p premier).

Tout d'abord le nombre des $u'_{jk}{}^h$ non nécessairement nuls est, pour chaque couple j, j' , le plus petit $m_{jj'}$ des deux nombres $m_j, m_{j'}$. Mais ces $\Sigma m_{jj'}$ coefficients sont liés par la condition que le déterminant D de (2) soit $\neq 0$. Pour calculer D, rangeons les y et les y' de manière que $m_j \geq m_{j+1}, m_{j'} \geq m_{j'+1}$ [alors

$$\Sigma_{jj'} m_{jj'} = 2 \Sigma_{j' < j} m_{jj'} = \Sigma m_{jj} + \Sigma_{j' > j} (j' - j + 1) m_{j'}],$$

et soit

$$\begin{aligned} m_1 &= \dots = m_{\varepsilon_1} > m_{\varepsilon_1+1} = \dots = m_{\varepsilon_1+\varepsilon_2} > m_{\varepsilon_1+\varepsilon_2+1} = \dots \\ &> m_{\varepsilon_1+\dots+\varepsilon_{q-1}+1} = \dots = m_{\varepsilon_1+\dots+\varepsilon_q} \quad (\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_q = \mu). \end{aligned}$$

Il y aura ε_r suites contenant $m_{\varepsilon_1+\dots+\varepsilon_r}$ variables et, si

$$m_{\varepsilon_1+\dots+\varepsilon_r} > \varepsilon_r > m_{\varepsilon_1+\dots+\varepsilon_{r+1}}$$

(en faisant $m_{\mu+1} = 0$), $\mu_r = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_r$ suites contenant au moins ε_r variables ($\mu_1 = \mu$). Rangeons alors les y' de manière que les $\mu_r y'_{\mu_r}$ se suivent dans l'ordre croissant des j' et que y'_{μ_r+1} suive y'_{μ_r} , puis ordonnons $y'_{j'}$ de manière que les $\mu_r y'_{j'}$ se suivent dans l'ordre croissant des j et que y_{μ_r+1} suive $y'_{\mu_r} \pm D$ se réduira évidemment à un produit de mineurs principaux

$$D_\rho = u'_{j_1}{}^1(j, j' = 1, \dots, \mu_\rho; \rho = m_1, \dots, 1).$$

Or, dans D_ρ , $u'_{j_1}{}^1 = 0$ pour $1 \leq m_j = m_{j'}$, c'est-à-dire pour $m_j < m_{j'}$. Donc D_ρ se réduit aussi à un produit des mineurs principaux

$$D_{\rho_1} = \Delta_1 = u'_{j_1}{}^1(j, j' = 1, \dots, \varepsilon_1),$$

$$D_{\rho_2} = \Delta_2 = u'_{j_1}{}^1(j, j' = \varepsilon_1 + 1, \dots, \varepsilon_1 + \varepsilon_2), \dots$$

$$D_{\rho_r} = \Delta_r = u'_{j_1}{}^1(j, j' = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_{r-1} + 1, \dots, \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_r).$$

Δ_1 entrera dans tous les D_ρ où $\mu_\rho \geq \varepsilon_1$, c'est-à-dire dans $D_1, \dots, D_{m_{\varepsilon_1}}; \dots; \Delta_r$ entrera dans tous les D_ρ où $\mu_\rho \geq \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_r$, c'est-à-dire dans $D_1, \dots, D_{m_{\varepsilon_1+\dots+\varepsilon_r}}$. Donc $\pi = D = \Pi_r^{q-1} \Delta_r^{m_{\varepsilon_1+\dots+\varepsilon_r} - \varepsilon_r} \Delta_r$ contenant ε_r^2 éléments, il y a, hors de $\Delta, K = \Sigma m_{jj} = \Sigma q \varepsilon_r^2$ arbitraires dont chacune a π^2 déterminations, ν étant le degré du facteur irréductible annulé par s_K , et l'on sait que le nombre des détermina-

tions du Tableau des éléments de Δ_r qui donnent $\Delta_r \neq 0$ est

$$\prod_{i=0}^{E_r-1} (\pi^{rE_i} - \pi^{\gamma_i}) = \varpi(r, \gamma).$$

Donc le nombre des déterminations du système considéré des $\mathcal{Y}'_{j'h'k'}$, que je supposerai être le λ^0 , est

$$\pi^{k\gamma} \prod_{i=1}^q \varpi(r, \gamma_i) = \psi(\lambda).$$

Le nombre des changements de variables (ou des α') est $\prod_1^q \psi(\lambda_i)$.

L'ordre du groupe L formé par les substitutions linéaires à coefficients dans C, étant $\prod_{i=0}^{n-1} (\pi^n - \pi^i)$, on connaîtra par là le nombre des conjuguées de α dans L.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 2 JUILLET 1902.

PRÉSIDENTE DE M. RAFFY.

Élection :

M. Molk, présenté par MM. Tannery et Hadamard, est élu membre de la Société à l'unanimité des membres présents.

Communications :

M. Hadamard présente un résultat de M. Fréchet relatif aux *dérivées des fonctions de lignes*.

M. Hadamard : *Sur les géodésiques des surfaces à courbures opposées et sur la connexion des surfaces minima.*

M. André : *Sur un problème de combinaisons.*

SÉANCE DU 16 JUILLET 1902.

PRÉSIDENTE DE M. TOUCHE.

Communications :

M. Lecornu : *Sur un théorème de Hugoniot.*

M. Zoukis : *Sur certaines configurations de l'espace.*

M. Bricard : *Sur le mouvement à trois paramètres.*

SÉANCE DU 3 NOVEMBRE 1902.

PRÉSIDENCE DE M. RAFFY.

Correspondance :

M. Maupin adresse une Note relative aux *Volumes des foudres ovales*.

Communications :

M. Hadamard : *Sur certaines équations différentielles du second ordre.*

M. Lecornu : *Sur un problème de balistique externe.*

M. Blutel : *Sur le degré des fonctions symétriques des racines d'une équation algébrique.*

M. HADAMARD fait la Communication suivante :

Sur une question de calcul des variations.

On sait, à l'heure actuelle, établir avec rigueur les conditions du maximum et du minimum d'une intégrale simple contenant un nombre quelconque de fonctions inconnues, ou encore d'une intégrale multiple contenant une seule de ces fonctions ⁽¹⁾. Dans le premier cas, si l'on se borne, pour simplifier, à l'étude d'une intégrale

$$\int f(x, y_1, y_2, \dots, y_m, y'_1, y'_2, \dots, y'_m) dx$$

où les fonctions $y_1, y_2, \dots, y_m$ ne sont assujetties à aucune relation donnée et figurent au premier ordre, la condition de Legendre, équivalente en général ⁽²⁾ à celle de Weierstrass relative au mi-

(1) Je fais ici abstraction des cas dans lesquels quelques-unes des inégalités qui doivent être vérifiées pour qu'il y ait maximum ou minimum sont remplacées par les égalités correspondantes : cas qui sont loin d'être élucidés et ne le seront probablement jamais complètement (voir HEDRICK, *Bulletin of the American Math. Society*, 2^e série, t. IX, 1902). Ces cas sont exceptionnels, au lieu que la difficulté dont il est question dans le texte se présente dans des cas tout à fait généraux.

(2) Les exceptions n'ont lieu que pour les cas limites auxquels il est fait allusion dans la note précédente.

nimum faible, est que la forme quadratique

$$\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial y_i' \partial y_k'} u_i u_k$$

soit définie positive. Dans le second, l'intégrale étant

$$\int \int \dots \int f(y, x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n) dx_1 dx_2, \dots, dx_n$$

et $p_1, p_2, \dots, p_n$ désignant les dérivées partielles de la fonction inconnue y , par rapport aux variables indépendantes $x_1, x_2, \dots, x_n$, ce sera la forme

$$\sum_{i,k} \frac{\partial^2 f}{\partial p_i \partial p_k} u_i u_k$$

qui devra être définie.

Le cas plus général où interviennent à la fois plusieurs variables indépendantes et plusieurs fonctions inconnues a été, au contraire, presque universellement négligé, comme si l'on ne devait y voir qu'une généralisation naturelle et immédiate des précédents.

D'après cette analogie, on devrait, étant donnée une intégrale

$$(1) \quad \int \int \dots \int f(y_1, y_2, \dots, y_m, x_1, \dots, x_n, p'_1, \dots, p'_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

où la quantité sous le signe $\int \int \dots \int$ dépend des m fonctions inconnues y , des n variables indépendantes x et des mn dérivées

$$p'_k = \frac{\partial y_i}{\partial x_k} \quad \left(\begin{matrix} i = 1, 2, \dots, m \\ k = 1, 2, \dots, n \end{matrix} \right)$$

des premières par rapport aux secondes, considérer comme une condition nécessaire du minimum, que la forme quadratique

$$(2) \quad \sum_{i,k,l,k'} \frac{\partial^2 f}{\partial p'_k \partial p'_l} u_i^l u_k^l$$

aux mn indéterminées $u_i^l, \dots, u_n^m$, soit définie positive.

Il n'est peut-être pas inutile de faire remarquer qu'il n'en est rien, et que le cas de $m > 1, n > 1$ offre une difficulté qui lui est

propre. La remarque n'est d'ailleurs nullement nouvelle : elle résulte avec évidence des transformations effectuées par Clebsch dans son Mémoire *Ueber die zweite Variation vielfacher Integrale* (*). Ces transformations, généralisation de celles qui avaient été effectuées par Jacobi sur la seconde variation des intégrales simples, consistent uniquement dans l'addition de termes que l'intégration par parties permet de faire disparaître, en les transportant à la frontière. Clebsch montre que, par une introduction convenable de termes de cette espèce, on peut ajouter à la forme (2) n'importe quelle combinaison linéaire des $\frac{m(m-1)}{2} \cdot \frac{n(n-1)}{2}$ expressions

$$(3) \quad u_k^i u_{k'}^{i'} - u_{k'}^i u_k^{i'} \quad \left(\begin{array}{l} i, i' = 1, 2, \dots, m; \\ k, k' = 1, 2, \dots, n; \\ i \neq i', \quad k \neq k' \end{array} \right).$$

Il n'est donc point nécessaire que la forme (2) soit définie : il suffit qu'elle puisse le devenir lorsqu'on la combine d'une manière quelconque avec des formes (3).

Du moins, nous voyons que cette condition est suffisante pour rendre la variation seconde essentiellement positive. Mais il est aisé de déduire là les conditions suffisantes du minimum cherché.

Supposons, en effet, que la forme (2) devienne définie par l'addition d'un ou plusieurs termes de la forme

$$\lambda (u_k^i u_n^i - u_k^i u_k^i),$$

où λ est une quantité, constante ou variable, que l'on peut toujours supposer exprimée en fonction des x . Nous pourrions, avec Clebsch, considérer ces termes comme préexistants dans la forme en question, à la condition d'ajouter à f les termes correspondants

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} (\lambda v_i p_k^i) &= \frac{\partial}{\partial x_k} (\lambda v_i p_k^i) \\ &= v_i (p_k^i p_j^i - p_k^i p_k^i - p_i^i \frac{\partial \lambda}{\partial x_k} - p_k^i \frac{\partial \lambda}{\partial x_i}). \end{aligned}$$

lesquels ne changent naturellement pas la question posée et, par conséquent, restent aussi sans influence sur les autres éléments

(*) *Journal de Crelle*, t. 55, 1859, p. 122-146.

de la solution, je veux dire sur l'équation de Lagrange et la condition de Jacobi. Une fois l'expression de f ainsi transformée, tout se passera comme pour $m = 1$.

Il reste à savoir si la condition ainsi modifiée est nécessaire.

Or on peut aisément établir ⁽¹⁾ la condition nécessaire suivante : *la forme (2) doit être essentiellement positive pour toutes les valeurs des u qui annulent les expressions (3).*

Seulement, il n'est pas évident que cette condition soit équivalente à la première. De fait, si l'on considère p formes quadratiques quelconques $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$ et une $(p + 1)^{\text{ème}}$ ψ , et si l'on sait que celle-ci est positive pour toutes les valeurs des variables qui annulent les premières, il ne résulte nullement de là que ψ soit une combinaison linéaire des formes φ et d'une forme définie. Tout au plus pourrait-on être plus affirmatif si, au lieu de formes φ quelconques, on considérait les formes particulières (3).

Cependant la déduction en question est légitime lorsque le nombre p est égal à l'unité. Ceci ayant lieu pour $m = 2, n = 2$, la question est résolue dans ce cas.

Elle semble, au contraire, appeler de nouvelles recherches pour $m, n > 2$.

SÉANCE DU 19 NOVEMBRE 1902.

PRÉSIDENCE DE M. RAFFY.

Élections :

MM. D. Egorov, présenté par MM. J. Tannery et Raffy,

D.-F. Diéguez, présenté par MM. Duporcq et Gauthier-Villars,

sont élus membres de la Société à l'unanimité des membres présents.

Communications :

M. Bioche : *Sur les surfaces du quatrième ordre à quatre points doubles.*

(1) Cette démonstration, qui repose d'ailleurs sur des considérations tout autres que les intégrations par parties qui viennent d'être utilisées pour la démonstration inverse, figure dans mes *Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'Hydrodynamique*, qui seront publiées prochainement.

M. Carvallo : *Sur l'application de la loi des travaux virtuels à la théorie de l'Électricité, et sur l'Induction.*

M. Lévy présente quelques observations à ce sujet.

M. Raffy : *Sur le système simultané de deux équations de Riccati.*

SÉANCE DU 3 DÉCEMBRE 1902.

PRÉSIDENTE DE M. RAFFY.

M. le Président signale, parmi les pièces de la correspondance, le *Mémorial du Centenaire d'Abel*, envoyé en hommage par M. Carl Störmer.

Communications :

M. Estanave : *Sur les coefficients des développements en séries de tang x , séc x , et d'autres fonctions*

MM. Borel, Servant et Perrin présentent quelques observations à ce sujet.

M. Borel : *Sur la définition du contact de deux courbes.*

M. Perrin : *Sur l'équation différentielle des coniques.*

M. Laisant : *Sur les rayons de courbure des courbes planes.*

SÉANCE DU 17 DÉCEMBRE 1902.

PRÉSIDENTE DE M. RAFFY.

Élections :

MM. Lucas de Peslouan, présenté par MM. Laisant et Raffy.

Lebesgue, présenté par MM. Raffy et Borel,

Pux, présenté par MM. Laisant et Duporcq,

Merlin, présenté par MM. Raffy et Demoulin,

le vicomte du Boberil, présenté par MM. Raffy et Duporcq, sont élus membres de la Société à l'unanimité des membres présents.

Communications :

M. Fouret : *Sur la surface réciproque de la surface de Steiner.*

M. Cahen : *Sur la résolution des équations linéaires à coefficients quelconques.*

M. Raffy : *Sur les réseaux conjugués persistants.*

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME XXX.

(Les lettres et numéros qui précèdent les titres indiquent les classifications du *Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques*.)

Pages.

État de la Société mathématique au commencement de 1901.....	v
Liste des Présidents de la Société depuis sa fondation.....	xiv
Liste des Sociétés scientifiques et des recueils périodiques avec lesquels la Société échange son <i>Bulletin</i>	xv

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

[B 1 a]	Auric. — Sur une propriété très générale des déterminants.....	177
[B 2 c x]	Autonne. — Sur les groupes linéaires, réels et orthogonaux.....	181
[I 23]	Cahen. — Sur la résolution exacte en nombres entiers des équations linéaires à coefficients quelconques.....	181
[J 4 f]	Clairin. — Sur certaines équations aux dérivées partielles du second ordre.....	37
[J 4 f]	Clairin. — Sur une classe de transformations des équations aux dérivées partielles du second ordre.....	100
[T 2 a]	Combebiac. — Sur un système numérique complexe représentant le groupe des transformations conformes de l'espace.....	1
[T 2 a]	Combebiac. — Sur les équations générales de l'élasticité.....	108 et 142
[R 1 f z]	Delassus. — Sur les engrenages à contact ponctuel.....	13
[X 4 c]	Delaunay. — Sur le calcul graphique des fonctions elliptiques et de quelques fonctions ultra-elliptiques.....	113
[D 6 c]	Estanave. — Sur les coefficients des développements en série de tangente, sécante et d'autres fonctions.....	206
[D 4 b z]	Fabry. — Sur le genre des fonctions entières.....	165
[O 5 j z]	Goursat. — Sur un problème relatif aux lignes asymptotiques.....	12
[P 6 e, H 9 z]	Goursat. — Sur un groupe de transformations.....	155
[C 5]	Hadamard. — Sur les dérivées des fonctions de lignes.....	40
[O 5 c]	Hadamard. — Sur une condition que l'on peut imposer à une surface.....	111
[H 3]	Hadamard. — Sur une classe d'équations différentielles.....	208
[J 3 c]	Hadamard. — Sur une question de calcul des variations.....	253

		Pages.
[M ² 41]	Humbert. — Détermination des courbes algébriques de degré donné qu'on peut tracer sur la surface de l'onde..	23
[R 8 e β]	Lecornu. — Sur les petits mouvements d'un corps pesant.....	71
[R 7 b δ]	Lecornu. — Sur le mouvement vertical d'un projectile dans un milieu résistant.....	202
[D 4 α]	Maillet. — Sur les propriétés arithmétiques des fonctions entières et quasi-entières.....	134
[H 1, J 5]	Maillet. — Sur les équations différentielles et la théorie des ensembles.....	195
[D 2 d]	De Montessus. — Sur les fractions continues algébriques.....	
[M ³ 3 e]	D'Ocagne. — Sur les barycentres cycliques dans les courbes algébriques.....	83
[A 3 g]	Pellet. — Sur l'approximation des racines réelles des équations	176
[L 3 a]	Poincaré. — Sur certaines surfaces algébriques. Troisième complément à l' <i>Analysis situs</i>	49
[O 6 k, H 9 h]	Raffy. — Sur la déformation des surfaces et sur certaines transformations des équations aux dérivées partielles du second ordre.....	106
[O 5 k]	Raffy. — Sur le réseau diagonal conjugué.....	226
[B 26]	De Séguier. — Sur la forme canonique des substitutions linéaires.....	247
[O 6 k]	Servant. — Sur la déformation des quadriques... 18 et	92
[A 3 d]	Zoukis. — Sur quelques formules des fonctions homogènes et sur la démonstration d'un théorème qui s'y rattache.....	181

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

Comptes rendus des séances.....	17, 110, 180 et	52
Table des matières du Tome XXX.....		259

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME XXX.

BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

TABLES DES TOMES XXI A XXX (1893 A 1902).

TABLE DES MATIÈRES.

TABLE DES NOMS D'AUTEURS.

TABLE DES MATIÈRES

DU BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

(SUITE).

TOMES XXI A XXX. — ANNÉES 1893 A 1902 INCLUS.

Les lettres et numéros qui précèdent les noms d'auteurs indiquent les classifications adoptées pour le *Repertoire bibliographique des Sciences mathématiques*.

Les chiffres romains indiquent les Tomes du *Bulletin*, les chiffres arabes indiquent les pages.

A. — Algèbre élémentaire; théorie des équations algébriques et transcendentes; groupes de Galois; fractions rationnelles; Interpolation.

A1c.	LAISANT. Propriétés algébriques des coefficients du binôme.....	XXIV, 197
A3b.	LAISANT. Identités relatives à des polynômes entiers.....	XXIV, 191
A3d.	ZOUKIS. Sur quelques formules des fonctions homogènes et sur la démonstration d'un théorème qui s'y rattache.....	XXX, 181
A3g.	PELLET. Sur la formule d'approximation de Newton.....	XXIX, 139
A3g.	PELLET. Sur la méthode d'approximation de Newton.....	XXIX, 228
A3g.	PELLET. Sur la méthode d'approximation de Newton.....	XXIX, 320
A3g.	PELLET. Sur l'approximation des racines réelles des équations.....	XXX, 176
A4a.	PEROTT. Sur les groupes de Galois.....	XXI, 61
A4a.	CARTAN. Sur un théorème de M. Bertrand.....	XXII, 230
A4d.	AUTONNE. Sur certaines équations des quatrième et cinquième degrés.....	XXVIII, 99
A4d.	SILIVANOFF. Quelques remarques sur les équations du cinquième degré.....	XXI, 97
A6f.	BRIGARD. Sur les systèmes réciproques de points.....	XXIX, 130

B. — Déterminants; substitutions linéaires; élimination; théorie algébrique des formes; invariants et covariants; quaternions; equipollences et quantités complexes.

B1a.	PAINLEVÉ. Note sur une identité entre certains déterminants.....	XXII, 116
B1a.	FERRER. Application du symbole des déterminants positifs.....	XXVIII, 198
B1a.	ALRIC. Sur une propriété très générale des déterminants.....	XXIX, 177
B1c.	FERRER. Sur un symbole analogue aux déterminants.....	XXVII, 285
B1e, C3a.	KOCH (H. VON). Sur les fonctions implicites définies par une infinité d'équations simultanées.....	XXVII, 215

B2b.	SEGUIER (DE). Sur la forme canonique des substitutions linéaires.	XXX, 247
B2c z.	AUTONNE. Sur les groupes linéaires, réels et orthogonaux.	XXIX, 121
B4a, B9d.	HADAMARD. Sur les conditions de décomposition des formes.	XXVII, 34
B10a.	RIPERT. Sur les propriétés générales des formes quadratiques.	XXVIII, 56
B12a.	AUTONNE. Sur une manière de représenter géométriquement un système de trois variables complexes.	XXIX, 95
B12e.	COMBÉBIAC. Sur l'application du calcul des biquaternions à la Géométrie plane.	XXVI, 259
B12f.	FONTENÉ (G.). Sur un système de sept clefs.	XXVII, 171
B12f.	COMBÉBIAC. Calcul des triquaternions.	XXVII, 180

C. — Principes du Calcul différentiel et intégral; applications analytiques; quadratures; intégrales multiples; déterminants fonctionnels; formes différentielles; opérateurs différentiels.

C1a, H11d.	LEMERAY. Sur la dérivée des fonctions itératives au point limite.	XXV, 52.
C1a, H11d.	LEMERAY. Dérivée des fonctions itératives par rapport à l'indice d'itération.	XXV, 92
C1f.	BOREL. Sur les ordres d'infinitude.	XXIX, 154
C2g.	LE ROUX. Sur un invariant d'un système de deux triangles et la théorie des intégrales doubles.	XXVIII, 168
C2h.	CARTAN (E.). Le principe de dualité et certaines intégrales multiples de l'espace tangentiel et de l'espace réglé.	XXIV, 140
C2h.	LAROSE. Démonstration du théorème de M. Vaschy, sur une distribution quelconque de vecteur.	XXIV, 177
C2h.	CARVALLO (E.). Généralisation et extension à l'espace du théorème des résidus de Cauchy.	XXIV, 180
C2k.	APPELL (P.). Sur un mode d'inversion des intégrales multiples.	XXV, 10
C5.	HADAMARD. Sur les dérivées des fonctions de lignes.	XXX, 40

D. — Théorie générale des fonctions et son application aux fonctions algébriques et circulaires; séries et développements infinis, comprenant en particulier les produits infinis et les fractions continues considérées au point de vue algébrique; nombres de Bernoulli; fonctions sphériques et analogues.

D1a.	BAIRE. Nouvelle démonstration d'un théorème sur les fonctions discontinues.	XXVIII, 173
D2a ζ, D4.	LINDELÖF. Sur le prolongement analytique.	XXIX, 156
D2b γ.	LANDAU (E.). Sur la série des inverses des nombres de Fibonacci.	XXVII, 298
D2b γ.	LEAU. Représentation des fonctions par des séries de polynômes.	XXVII, 194
D2b z.	BOREL. Sur le prolongement analytique de la série de Taylor.	XXVIII, 200
D2d.	MONTESUS (DE). Sur les fractions continues algébriques.	XXX, 28

D2e.	KOCH (H. von). Sur un théorème de Stieltjes et sur les fonctions définies par des fractions continues.....	XXIII, 33
D3bz.	BORRÉ (E.). Sur les singularités des séries de Taylor.....	XXVI, 238
D3bz.	LEAU. Extension d'un théorème de M. Hadamard à l'étude des séries de Taylor.....	XXVI, 267
D3bz.	PETROVITCH. Remarques sur les zéros des séries de Taylor.....	XXIX, 303
D4a.	HADAMARD. Sur les fonctions entières.....	XXIV, 186
D4a.	PELLET (A.). Mémoire sur la théorie infinitésimale des équations et les fonctions implicites.....	XXIII, 7
D4z.	MAILLET. Sur les propriétés arithmétiques des fonctions entières et quasi-entières.....	XXX, 134
D4bz.	FABRY. Sur le genre des fonctions entières.....	XXX, 165
D4ea.	KRYGOWSKI. Sur les fonctions à espaces lacunaires.....	XXV, 240
D4ea.	ARONE (G. d'). Sur les fonctions à espaces lacunaires....	XXIII, 193
D6a.	KOBB. Sur un point de la théorie des fonctions algébriques de deux variables.....	XXI, 76
D6aβ.	FLOQUET (G.). Sur les fonctions algébriques à trois déterminations.....	XXIII, 76
D6c.	ESTANAVE. Sur les coefficients des développements en série de $\tan x$, $\sec x$ et d'autres fonctions.....	XXX, 220
D6i.	HADAMARD. Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences arithmétiques.....	XXIV, 199

E. — Intégrales définies, et en particulier intégrales eulériennes.

E1d.	CAHEN (E.). Sur une généralisation de la formule qui donne la constante d'Euler.....	XXII, 227
------	--	-----------

F. — Fonctions elliptiques avec leurs applications.

F2b, F8g.	PAINLEVÉ (P.). Sur la représentation des fonctions elliptiques.....	XXVII, 301
F4a, H11d.	LEMERAY. Application des fonctions doublement périodiques à la solution d'un problème d'itération.....	XXVII, 282
F5d.	HUMBLERT. Sur une interprétation géométrique de l'équation modulaire pour la transformation du troisième ordre.....	XXVI, 233
F8a.	GOURSAT (E.). Sur une formule de la théorie des fonctions elliptiques.....	XXIII, 18
F8g, M ⁴ b.	BRICARD (R.). Note sur une propriété des fonctions elliptiques du second ordre.....	XXVI, 91
F8g, M ⁴ b.	BRICARD. Sur les fonctions elliptiques du second ordre.....	XXV, 242
F8h.	SPARRE (DE). Sur une application des fonctions elliptiques.....	XXVIII, 52
F8h.	SPARRE (DE). Sur une application des fonctions elliptiques à l'étude du mouvement des projectiles.....	XXIX, 30

G. — Fonctions hyperelliptiques, abéliennes, fuchsienues.

G1e.	POINCARÉ. Sur les surfaces de translation et les fonctions abéliennes.....	XXIX, 61
G3c.	BORRÉ. Sur les caractéristiques des fonctions θ	XXVI, 59

G4dz.	ZAREMBA. Sur la réduction du nombre des périodes d'une fonction périodique	XXII, 68
-------	--	----------

H. — Équations différentielles et aux différences partielles: équations fonctionnelles; équations aux différences finies; suites récurrentes.

H1a.	HADAMARD. Sur les intégrales d'un système d'équations différentielles ordinaires considérées comme fonctions des données initiales.	XXVIII, 64
H1a.	PAINLEVÉ. De la détermination unique des intégrales d'un système d'équations différentielles ordinaires par les conditions initiales de Cauchy.....	XXVIII, 191
H1a, H5d.	PICARD (E.). Sur la méthode des approximations successives et les équations différentielles linéaires.....	XXII, 52
H1c.	PAINLEVÉ (P.). Sur le calcul des intégrales d'un système différentiel par la méthode de <i>Cauchy-Lipschitz</i>	XXVII, 149
H1g, D4c.	PAINLEVÉ. Mémoire sur les équations différentielles dont l'intégrale générale est uniforme.....	XXVIII, 201
H1j5.	MAILLET. Sur les équations différentielles et la théorie des ensembles.	XXX, 195
H2a.	LINDELÖF (E.). Sur la croissance des intégrales des équations différentielles algébriques du premier ordre.....	XXVII, 205
H2a.	PETROVITCH. Remarques algébriques sur les fonctions définies par les équations différentielles du premier ordre.....	XXI, 58
H2cδ.	RAFFY (L.). Sur certaines équations qu'on intègre en les différentiant.....	XXIII, 50
H2cζ.	GOURSAT (E.). Sur les équations différentielles analogues à l'équation de Clairaut.....	XXIII, 88
H3.	HADAMARD. Sur une classe d'équations différentielles....	XXX, 208
H3c.	RAFFY. Sur certaines équations différentielles d'ordre supérieur analogue à l'équation de Clairaut.....	XXV, 71
H4a.	PETROVITCH (M.). Sur l'équation différentielle linéaire du second ordre.....	XXV, 221
H5ax.	LAISANT. Remarque sur une équation différentielle linéaire.	XXIII, 62
H5b.	RAFFY. Sur certaines équations différentielles linéaires...	XXIII, 63
H5jz.	VERNIER (P.). Sur les formes binaires dont les variables sont des intégrales fondamentales d'une équation différentielle linéaire du second ordre.....	XXII, 133.
H5jz.	BURKHARDT. Sur les fonctions de Green relatives à un domaine d'une seule dimension	XXII, 71
H6a.	CARTAN. Sur quelques quadratures dont l'élément différentiel contient des fonctions arbitraires	XXIX, 118
H6a.	CARTAN. Sur l'intégration de certains systèmes de Pfaff de caractère deux.....	XXIX, 233
H7a.	BENDIXSON. Démonstration de l'existence de l'intégrale d'une équation aux dérivées partielles linéaires.....	XXIV, 220
H7a.	PICARD (E.). Remarque au sujet d'une communication récente de M. I. Bendixson.....	XXV, 35
H7a.	ROUX (LE). Sur l'équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre.....	XXV, 63

H7a.	BERDON (J.). Sur les caractéristiques des équations aux dérivées partielles.....	XXV, 108
H7a.	GOURSAT (E.). Sur l'existence des fonctions intégrales d'un système d'équations aux dérivées partielles.....	XXVI, 129
H8.	BEUDON. Sur les changements de variable.....	XXVIII, 107
H8.	SALTYKOW. Sur les intégrales des équations aux dérivées partielles du premier ordre d'une seule fonction.....	XXIX, 86
H8e.	BERDON. Sur les singularités des équations aux dérivées partielles du premier ordre.....	XXVI, 77
H8f.	LINDELÖF (E.). Sur les équations homogènes.....	XXIV, 35
H9b.	GOURSAT. Sur les équations du second ordre à n variables analogues à l'équation de Monge-Ampère.....	XXVII, 1
H9d.	ZAREMBA (S.). Contribution à la théorie de la fonction de Green.....	XXIV, 19
H9d.	CARVALLO. Sur l'intégration d'une équation aux dérivées partielles de la Physique mathématique.....	XXII, 234
H9d.	DEMOULIN. Sur une équation aux dérivées partielles du second ordre contenant $2m + 1$ fonctions arbitraires.....	XII, 43
H9d.	PICARD (E.). Sur une équation aux dérivées partielles de la théorie de la propagation de l'électricité.....	XXII, 2
H9d.	PICARD. Sur un exemple d'approximations successives divergentes.....	XXVIII, 137
H9d.	ADHÉMAR (D'). Sur une intégration par approximations successives.....	XXIX, 190
H9d, H9e.	GOURSAT. Sur une équation aux dérivées partielles...	XXV, 36
H9e.	PICARD (E.). Sur la détermination des intégrales des équations aux dérivées partielles du second ordre par certaines conditions aux limites.....	XXII, 163
H9e.	GOURSAT. Sur une transformation de l'équation $s^2 = 4\lambda(x, y)pq$	XXVIII, 1
H9e.	HADAMARD. Sur l'intégrale résiduelle.....	XXVIII, 69
H9e α .	GOURSAT (E.). Sur les équations linéaires qui admettent quatre intégrales liées par une relation quadratique.....	XXV, 95
H9e.	RAFFY. Sur une équation d'Euler.....	XI, 44
H9e.	RIVIEREAU. Invariants des équations aux dérivées partielles du second ordre linéaires et homogènes.....	XXIX, 7
H9e α .	FERR. Remarque sur le théorème de M. Moutard.....	XXII, 67
H9e α .	LE ROUX. Sur l'intégrabilité des équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre par la méthode de Laplace.....	XXVI, 55
H9e, H9f.	LE ROUX. Extension de la méthode de Laplace aux équations linéaires aux dérivées partielles d'ordre supérieur au second..	XXVII, 237
H9f.	GOURSAT (E.). Sur l'équation $\Delta u = 0$	XXVI, 236
H9h α .	MAILLET. Sur les systèmes complets d'équations aux dérivées partielles.....	XXIX, 209
H10a.	ZAREMBA (S.). Sur l'équation aux dérivées partielles $\Delta u = \xi u = f = 0$	XXVI, 70
H10b.	ANDRADE. Note sur les intégrales de M. Schwarz.....	XXII, 50
H10d.	PICARD. Sur quelques problèmes relatifs à l'équation $\Delta u = k u$	XXVIII, 189
H11c	ANDRADE. Sur l'équation fonctionnelle de Poisson.....	XXVIII, 98

H11c.	LÉMERAY. Sur les équations fonctionnelles qui caractérisent les opérations associatives et les opérations distributives.....	XXVII, 130
H11d.	HADAMARD. Sur l'itération et les solutions asymptotiques des équations différentielles.....	XXIX, 224
H11d.	LEAU. Sur un problème d'itération.....	XXVI, 5
H11d.	LÉMERAY. Sur quelques algorithmes et sur l'itération....	XXVI, 10
H11d.	LÉMERAY. Un théorème sur les fonctions itératives.....	XXIII, 255
H11e.	GRÉVY. Équations fonctionnelles avec second membre...	XXV, 57
H11e.	LECORNU. Sur une équation fonctionnelle.....	XXIII, 102
H12b.	LECORNU (L.). Sur certaines équations aux différences mêlées.	XXVII, 153
H12d.	LAISANT. Sur certaines suites récurrentes.....	XXIX, 145
H12d.	OCAGNE (D'). Sur les suites récurrentes.....	XXI, 3

I. — Arithmétique et théorie des nombres; Analyse indéterminée; théorie arithmétique des formes et des fractions continues; division du cercle; nombres complexes, idéaux, transcendants.

12b.	LUCAS (F.). Note relative à la théorie des nombres.....	XXV, 33
15a.	STÖRMER (CARL). Solution complète en nombres entiers de l'équation $m \arctang \frac{1}{x} + n \arctang \frac{1}{y} = k \frac{\pi}{4}$	XXVII, 160
17a.	FROLOV. Sur les racines primitives.....	XXI, 113
17a.	FROLOV. Sur les racines primitives.....	XXII, 241
19c.	LANDAU. Sur quelques problèmes relatifs à la distribution des nombres premiers.....	XXVIII, 25
110.	LAISANT. Sur un procédé de vérification expérimentale du théorème de Goldbach.....	XXV, 209
110.	MAC-MAHON (LE MAJOR). Solution du problème de partition d'où résulte le dénombrement des genres distincts d'abaques relatifs aux équations à n variables.....	XXVI, 57
110.	MAILLET (ED.). Extension du théorème de Fermat sur les nombres polygones.....	XXIII, 40
110.	OCAGNE (D'). Problème de partition.....	XXVIII, 157
123.	STÖRMER. Sur une propriété arithmétique des logarithmes des nombres algébriques.....	XXVIII, 146
123.	CABEN. Sur la résolution exacte en nombres entiers des équations linéaires à coefficients quelconques.....	XXX, 234

J. — Analyse combinatoire; Calcul des probabilités; Calcul des variations; théorie générale des transformations [en laissant de côté les groupes de Galois (A), les groupes de substitutions linéaires (B) et les groupes de transformations géométriques (P)]; théorie des ensembles de M. Cantor.

J1aβ.	ANDRÉ (D.). Sur le nombre des séquences dans les permutations des n premiers nombres.....	XXI, 131
J1aβ.	ANDRÉ (D.). Mémoire sur les séquences des permutations circulaires.	XXIII, 122
J2a.	DELANNOY (H.) Sur la probabilité des événements composés.	XXVI, 64

12b.	OGAGNI (M. D'). Sur la composition des lois de probabilité des erreurs de situation d'un point sur un plan.....	XXIII, 65
12c.	MARTIN (G.). Note sur une question de probabilités traitée par d'Alembert dans l'Encyclopédie.....	XXIII, 185
12c.	DEJANNOY. Sur une question de probabilités traitée par d'Alembert.....	XXIII, 62
13c.	HADAMARD. Sur une question de calcul des variations.....	XXX, 63
14a.	MAILLET (E.). Des groupes transitifs de substitutions de degré N et de classe $N - 1$	XXVI, 249
14a.	MAILLET (ED.). Sur les groupes de substitutions deux fois transitifs à trois degrés.....	XXV, 189
14a.	MAILLET (E.). Note sur les substitutions.....	XXIV, 85
14a β .	MAILLET (E.). Des groupes primitifs de classe $N - 1$ et de degré N	XXV, 16
14a β .	MILLER. Sur plusieurs groupes simples.....	XXVIII, 266
14d.	MAILLET. Sur les groupes échangeables et les groupes décomposables.....	XXVIII, 7
14f.	CLAIRIN. Sur certaines équations aux dérivées partielles du second ordre.....	XXX, 37
14f.	CLAIRIN. Sur une classe de transformations des équations aux dérivées partielles du second ordre.....	XXX, 100
14g.	BOURLET (C.). Sur les transmutations.....	XXV, 132
15.	SECHER (DE). Courbe remplissant un cube à n dimensions.....	XXIX, 312

K. — Géométrie et trigonométrie élémentaires (études des figures formées de droites, plans, cercles et sphères); Géométrie du point, de la droite, du plan, du cercle et de la sphère; Géométrie descriptive; Perspective.

K4.	BARBARIN. Résumé d'un Mémoire sur la détermination d'un triangle au moyen des longueurs de ses bissectrices.....	XXII, 76
K6a.	SCHLEGEL (V.). Sur un système de coordonnées tétraédriques.....	XXIII, 116
K6b.	LAISANT. Coordonnées polaires symétriques.....	XXVI, 271
K9a.	LUCAS (F.). Propriétés d'un système de points dans un plan.....	XXI, 109
K9a α .	GÉRARD. Sur le postulat relatif à l'équivalence des polygones, considéré comme corollaire du théorème de <i>Varignon</i>	XXIII, 268
K16f.	DUPORCQ. Sur une extension à l'espace du théorème de <i>Simson</i>	XXIX, 29
K21a α .	LEMOINE (EM.). Note sur une construction approchée du développement de la circonférence et remarques diverses.....	XXIII, 242

L¹. — Coniques.

L'1a.	TRESSE. Sur les propriétés projectives des coniques.....	XXVIII, 131
L'1c.	RIPERT. Sur trois propriétés de six points d'une conique.....	XXIX, 317
L'3a.	POINCARÉ. Sur certaines surfaces algébriques. Troisième complément à l' <i>Analysis situs</i>	XXX, 49
L'3a.	LEMOINE. Détermination simple de la direction des axes d'une conique.....	XXIX, 217
L'14a.	DUPORCQ. Sur un théorème de M. Humbert.....	XXVI, 81

L ¹ 46a.	RIPERT. Sur les triangles trihomologiques inscrits ou circonscrits à une conique.....	XXVIII, 196
L ¹ 47d.	WEILL. Sur une classe de polygones de Poncelet.....	XXIX, 199
L ¹ 47d.	HUMBERT. Sur une interprétation géométrique de l'équation modulaire.....	XXVII, 69
L ¹ 47d.	HUMBERT. Sur les polygones de Poncelet.	XXVII, 79

L². — Quadriques.

L ² 2, M ² 6i.	HUMBERT. Sur une propriété des cônes du second ordre.	XXI, 3
L ² 41d.	MANNHEIM (A). Sur les lignes de courbure des surfaces du second ordre.....	XXIII, 1
L ² 42c, O ⁵ 1.	HADAMARD. Sur la forme des géodésiques à l'infini et sur les géodésiques des surfaces du second ordre.....	XXVI, 195
L ² 44a.	MANNHEIM (A). Note à propos d'un théorème connu de Géométrie.	XXV, 78
L ² 44a.	BRICARD (R). Note sur des systèmes de droites et de quadriques tangentes.....	XXV, 180
L ² 46f.	MANGEOT. Sur une propriété des surfaces de symétrie d'une quadrique.	XXI, 146
L ² 48a, M ¹ 51z.	PICQUET. Nouvelle contribution au problème du huitième point commun à trois quadriques. Son identité avec un problème plan.....	XXII, 19
L ² 20a.	HUMBERT. Expression de quelques aires sur le paraboloïde elliptique.	XXI, 13
L ² 20a.	HUMBERT. Expression de quelques nouvelles aires sur le paraboloïde elliptiques.....	XXI, 17

M¹. — Courbes planes algébriques.

M ¹ 4d.	WEILL. Sur les points de base d'un faisceau linéaire de courbes algébriques.....	XXIX, 26
M ¹ 2b.	PICARD (E). Sur les transformations birationnelles des courbes algébriques en elles-mêmes.....	XXI, 1
M ¹ 2h.	FONTENÉ. Sur la décomposition d'une correspondance tangentielle.	XXV, 247
M ¹ 3e.	OCAGNE (D'). Sur les barycentres cycliques dans les courbes algébriques.....	XXX, 83
M ¹ 3f.	MANGEOT. Sur les conditions pour qu'une courbe plane algébrique ait des axes en nombre donné.....	XXV, 54
M ¹ 5h.	GOUSAT. Sur les tangentes à une cubique plane.....	XXII, 45
M ¹ 5h, M ² 5a.	MANGEOT. De quelques propriétés des cubiques planes et gauches.	XXI, 44
M ¹ 5ks.	BRICARD. Sur les propriétés métriques d'une certaine correspondance (I, I) entre cubiques focales.....	XXVIII, 39
M ¹ 61z.	FONTENÉ (G). Sur les dégénérescences des soixante-trois systèmes de coniques quadruplement tangentes à une quartique....	XXVII, 229
M ¹ 8e.	CODEFROY. Sur les courbes de Lamé.....	XXI, 20

M². — Surfaces algébriques.

- M²1d z. BICHÉ (CH.) Recherches sur les surfaces algébriques qui admettent pour asymptotique une cubique gauche..... XXVI, 117
- M²3a z. DUMONT (F.). Sur les surfaces réglées du troisième ordre à un seul côté..... XXVI, 137
- M²3b. DUMONT (F.) Théorèmes sur les surfaces cubiques analogues au théorème de Chasles sur les cubiques planes..... XXV, 235
- M²3e³, O5j z. BICHÉ (CH.) Mémoire sur les surfaces du troisième ordre qui admettent pour ligne asymptotique une cubique gauche.
XXVII, 96
- M²3f. DUMONT (F.). Sur les surfaces du troisième ordre qui sont polaires d'elles-mêmes par rapport à une quadrique..... XXV, 74
- M²3f. B9a. DUMONT (F.). Sur deux formes particulières de l'équation réduite des surfaces du troisième ordre générales..... XXVI, 124
- M²3h. DUMONT. Sur les surfaces cubiques ayant un axe de symétrie ternaire, et sur les surfaces cubiques possédant des points à indicatrice du troisième ordre..... XXVIII, 117
- M²4j. MICHEL Courbe d'ombre sur une surface particulière du quatrième ordre..... XXIV, 26
- M²4l. HUMBERT Détermination des courbes algébriques de degré donné qu'on peut tracer sur la surface de l'onde..... XXX, 23
- M²8e. PICARD. Sur une classe de surfaces algébriques dont les coordonnées s'expriment par des fonctions uniformes de deux paramètres.
XXVIII, 17

M³. — Courbes gauches algébriques.

- M³1a. GINO-LORIA. Sur les courbes gauches algébriques auto-corrélatives.
XXIII, 4
- M³1a. GUCCIA. Sur une expression du genre des courbes gauches algébriques douées de singularités quelconques..... XXIII, 101

N². — Congruences.

- N2g z. DEMOULIN Sur la congruence des axes centraux des complexes linéaires passant par trois droites données..... XXI, 92

O. — Géométrie infinitésimale et Géométrie cinématique, applications géométriques du Calcul différentiel et du Calcul intégral à la théorie des courbes et des surfaces; quadrature et rectification; courbure; lignes asymptotiques, géodésiques, lignes de courbure; aires; volumes; surfaces minima; systèmes orthogonaux.

- O2b, d LAISANT (C.-A.). Note relative aux asymptotes et aux cercles de courbure..... XXIII, 90
- O2b, d. LAISANT (C.-A.). A propos des asymptotes et des cercles de courbure.
XXIII, 190
- O2d z. DUBROUQ (E.). Sur les centres de gravité des courbes parallèles.
XXIV, 192

02g _x .	LECORNU. Sur les développantes d'une développante de cercle.	XXVI, 85
03a.	BIOCHE. Sur les normales des courbes.....	XXI, 51
03d, e.	MANGEOT. Sur une manière de représenter le rapport des deux courbures d'une courbe gauche.....	XXIV, 98
03d, e.	MANNHEIM. Sur le rapport des deux courbures d'une courbe gauche.	XXIV, 188
03d, 03e.	MANNHEIM. Sur les formules de Frenet.....	XXV, 4
03e.	DEMOULIN. Sur la torsion d'une courbe définie par son plan osculateur.....	XXVIII, 180
03e.	RAFFY. Sur le signe de la torsion des courbes gauches...	XXIV, 185
03e.	OCAGNE (D'). Sur le signe de la torsion des courbes gauches et du paramètre de distribution des surfaces réglées.....	XXIV, 195
03j.	DEMOULIN. Sur une classe particulière de courbes gauches.	XXI, 8
04g _x .	ANTOMARI. Sur les surfaces réglées applicables avec parallélisme des génératrices.....	XXII, 58
04h.	DELAUNAY (N.). Sur les surfaces n'ayant qu'un côté et sur les points singuliers des courbes planes.....	XXVI, 43
04h _x .	OCAGNE (D'). Sur les paramètres de distribution du paraboléide hyperbolique.....	XXV, 130
04h _β .	APPELL. Propriété caractéristique du cylindroïde.....	XXVIII, 261
04h _β .	DEMOULIN. Sur le cylindroïde et sur la théorie des faisceaux de complexes linéaires.....	XXIX, 39
05, 06.	PELLET (A.). Sur la théorie des surfaces.....	XXVI, 138
05a, R2b.	HADAMARD. Sur la généralisation du théorème de Guldin.	XXVI, 264
05c.	HADAMARD. Sur une condition que l'on peut imposer à une surface.	XXX, 111
05d.	MANNHEIM. Nouvelle démonstration d'une propriété de l'indicatrice.	XXII, 219
05e.	SERVANT. Sur les formules de Gauss.....	XXIX, 142
05e.	BALITRAND. Démonstration des formules fondamentales de la périmorphie et des formules de Codazzi.....	XXII, 97
05e, 06k.	RAFFY (L.). Sur les formules fondamentales de la théorie des surfaces.....	XXV, 1
05f.	BOREL. Sur les formules d'Olinde Rodrigues.....	XXIX, 22
05f _x .	ISSALY (L'ABBÉ). Sur une formule de Laguerre étendue aux pseudo-surfaces.....	XXV, 243
05h.	ADAM (P.). Sur l'équation d'Euler et les lignes de courbure de l'ellipsoïde.....	XXII, 205
05j.	ISSALY (L'ABBÉ). Sur une formule d'Enneper et sa corrélatrice.	XXVI, 114
05j.	GOUSAT (E.). Sur les lignes asymptotiques.....	XXIV, 43
05j _x .	GOUSAT. Sur un problème relatif aux lignes asymptotiques.	XXX, 1
05k.	RAFFY. Sur le réseau diagonal conjugué.....	XXX, 26
05k _x .	RAFFY. Sur deux classes de surfaces analogues aux surfaces tétraédrales.	XXIV, 2
05k _x .	RAFFY. Surfaces rapportées à un réseau conjugué azimutal.	XXIV, 51
05k _x , V11h.	DEMOULIN (A.). Sur les surfaces qui présentent un réseau conjugué	

	forme par des courbes dont les tangentes appartiennent à un complexe tétraédral.....	XXV, 83
051.	BLUTEL. Sur une propriété des trajectoires obliques d'une famille de géodésiques.....	XXVII, 72
05n.	GOURSAT (E.). Sur les équations d'une surface rapportée à ses lignes de longueur nulle.....	XXVI, 83
06a.	OCAGNE (M. D'). Étude géométrique sur l'hélicoïde réglé le plus général.....	XXIII, 114
06a, 06f.	RAFFY. Sur une propriété caractéristique des hélicoïdes.....	XXV, 124
06aα.	OCAGNE (D'). Remarque sur la déformation des surfaces de révolution.....	XXI, 85
06f.	RAFFY (L.). Contribution à la théorie des surfaces dont les rayons de courbure principaux sont liés par une relation.....	XXV, 147
06g.	GENTY (E.). Sur les surfaces à courbure totale constante.....	XXII, 106
06h.	MONTCHEUIL (DE). Généralisation des formules de M. Schwarz relatives aux surfaces minimales.....	XXIII, 268
06k.	ADAM (P.). Sur la déformation des surfaces.....	XXIII, 106
06k.	ADAM (P.). Sur la déformation des surfaces avec conservation des lignes de courbure.....	XXIII, 195
06k.	ADAM (P.). Théorème sur la déformation des surfaces de translation.....	XXIII, 204
06k.	ADAM (P.). Mémoire sur la déformation des surfaces....	XXIII, 219
06k.	ADAM (P.). Sur un problème de déformation.....	XXIV, 28
06k.	GENTY (E.). Note sur la déformation infinitésimale des surfaces.....	XXII, 221
06k.	GENTY (E.). Note sur des couples de surfaces applicables.....	XXII, 36
06k.	DEMOULIN. Sur une propriété caractéristique de l'élément linéaire des surfaces de révolution.....	XXII, 47
06k.	DEMOULIN (A.). Note sur la détermination des couples de surfaces applicables telles que la distance de deux points correspondants soit constante.....	XXIII, 71
06k.	CARONNET. Sur des couples de surfaces applicables.....	XXI, 134
06k.	SERVANT. Sur la déformation des quadriques.....	XXIX, 231
06k.	SERVANT. Sur la déformation des quadriques.....	XXX, 18, 92
06k.	RAFFY. Sur le problème général de la déformation des surfaces.....	XXII, 119
06k, H9h.	RAFFY. Sur la déformation des surfaces et sur certaines transformations des équations aux dérivées partielles du second ordre.....	XXX, 106
06l.	RAFFY. Sur les géodésiques spéciales des surfaces harmoniques.....	XXIII, 8
06lα.	RAFFY. Recherches sur les surfaces harmoniques.....	XXII, 63.
06lα.	RAFFY. Recherches sur les surfaces harmoniques (résumé) (suite et fin).....	XXII, 84
06m.	ADAM (P.). Sur les surfaces admettant pour lignes de courbure deux séries de cercles géodésiques orthogonaux.....	XXII, 110
06m.	RAFFY. Sur une nouvelle classe de surfaces isothermiques et sur les surfaces déformables sans altération des courbures principales.....	XXI, 70
06s.	MONTCHEUIL (DE). Études sur les surfaces réelles définies par l'équa-	

tion $\xi^{\alpha} u_1^2 u_1^2 = 0$	XXVII, 114
O6s, N'g. MONTCHÉUIL (DE). Étude des surfaces définies par l'équation $R + R' = F(u) + F_1(u_1)$	XXVI, 163
O8a. BALITRAND. Sur le développement des coordonnées d'un point dans le mouvement relatif et sur la courbure des lignes orthogonales.	XXIII, 26
O8c, O8d. MAILLET. Sur certains théorèmes de Géométrie cinématique.	XXIX, 221

P. — Transformations géométriques; homographie; homologie et affinité; corrélation et polaires réciproques; inversion; transformations birationnelles et autres.

P1a. GENTY (M.). Sur les involutions linéaires.....	XXI, 52
P1a. GENTY (M.). Sur les systèmes collinéaires.....	XXI, 131
P1a. GENTY (M.). Sur un théorème de Laguerre.....	XXI, 145
P1a. GENTY (M.). Des suites cyclo-projectives de deuxième espèce.	XXI, 148
P2a. APPELL. Sur les courbes autopolaires par rapport à une conique donnée.	XXII, 27
P2a. FONTENÉ. Métrique aninvolutive.....	XXVI, 176
P2bγ. DEMOULIN. Sur la relation qui existe entre les courbures totales de deux surfaces polaires réciproques par rapport à un paraboloïde de révolution.....	XXI, 83
P3b. TOUCHE. Sur les figures inverses limites.....	XXVI, 3
P4a. VESSIOT (E.). Sur une méthode de transformation et sur la réduction des singularités d'une courbe algébrique.....	XXII, 208
P4g. OCAGNE (D'). Sur une transformation birationnelle réciproque de l'espace.....	XXV, 8
P4h. ANDRÉ (D.). Théorème nouveau de réversibilité algébrique.	XXIV, 136
P6d. DUPORCQ (E.). Sur une généralisation de la transformation de Lie.	XXVII, 146
P6e, H9z. GOURSAT. Sur un groupe de transformations.....	XXX, 155
P6g, B4a. AUTONNE (L.). Sur les variétés unicursales à plusieurs dimensions.	XXVII, 263
P6gα. DEMOULIN. Sur un théorème de Ribaucour et sur une propriété caractéristique des surfaces spirales.....	XXIII, 198

Q. — Géométrie, divers; Géométrie à n dimensions; Géométrie non euclidienne; Analysis situs; Géométrie de situation.

Q1, R4. ANDRADE. Sur quelques paradoxes de Statique non euclidienne.	XXVII, 73
Q1a. DUPORT (H.). Sur les hypothèses fondamentales de la Géométrie.	XXVII, 138
Q4bα. LAISANT. Principes de la méthode de M. Arnoux concernant l'étude des espaces arithmétiques hypermagiques.....	XXII, 28
Q4c. POLIGNAC (DE). Sur un théorème de Tait.....	XXVII, 142

R. Mécanique générale; Cinématique; Statique comprenant les centres de gravité et les moments d'inertie; Dynamique; mécanique des solides; frottement; attraction des ellipsoïdes.

R1c.	BREARD. Sur une propriété du cylindronde.....	XXIX, 18
R1c.	DUPORCEQ. Sur un déplacement remarquable à deux paramètres.....	XXIX, 1
R1e.	BREARD (R.). Étude géométrique d'un déplacement remarquable et d'un hyperbolonide articulé.....	XXX, 98
R1fz.	LECORNU (L.). Sur l'engrenage à fuseaux.....	XXX, 140
R1fz.	LECORNU (L.). Sur les engrenages à dents circulaires....	XXV, 172
R1fz.	LECORNU (L.). Note complémentaire sur l'engrenage à fuseaux.....	XXV, 206
R1fz.	LECORNU. Sur la vis sans fin.....	XXIX, 149
R1fz.	DELAUSSUS. Sur les engrenages à contact ponctuel.....	XXX, 43
R1h.	HADAMARD. Sur la propagation des ondes.....	XXIX, 50
R2b.	HATON DE LA GOUPILLIÈRE. Théorème sur le centre des moyennes distances.....	XXI, 5
R2b.	SCHLEGEL. Sur le théorème de M. Haton de la Goupillière relatif au centre des moyennes distances.....	XXI, 49
R2b.	CASPARY. Sur le centre de gravité d'un quadrilatère.....	XXVIII, 143
R2bγ.	MANGEOT (S.). Sur le centre de gravité d'une espèce de solide à deux dimensions infiniment petites.....	XXIII, 266
R4a.	ANDRADE. Sur la stabilité.....	XXV, 49
R4a.	LECORNU (L.). Sur la stabilité de l'équilibre.....	XXVI, 163
R6aβ.	LAISANT. Un théorème général de Mécanique.....	XXI, 151
R6aγ.	LAISANT. Propriété du mouvement d'un point matériel dans l'espace.....	XXII, 217
R6aγ.	APPELL. Sur le théorème des aires.....	XXII, 190
R6aγ.	PICARD (E.). Sur la rotation d'un système déformable....	XXII, 195
R6b.	APPELL (P.). Sur les équations de Lagrange et le principe d'Hamilton.....	XXVI, 365
R7b.	LAISANT. Sur la loi de l'hodographe circulaire dans les mouvements dus à une force centrale.....	XXVI, 82
R7bβ.	KÖNIGS. Sur un mouvement particulier d'un point dans le plan.....	XXII, 5
R7bβ.	LECORNU (L.). Sur quelques cas de discontinuité en Mécanique.....	XXII, 81
R7bδ.	LECORNU. Sur le mouvement vertical d'un projectile dans un milieu résistant.....	XXX, 202
R7g.	ANDRADE. Sur une propriété mécanique des lignes géodésiques.....	XXII, 186
R8az.	KOBB (G.). Sur le problème de la rotation d'un corps autour d'un point fixe.....	XXIII, 240
R8cβ.	CHAILAN. Sur le mouvement d'un système à liaisons complètes.....	XXI, 81
R8d.	LECORNU (L.). Sur le pendule de longueur brusquement variable.....	XXIV, 133
R8e.	PAINLEVÉ. Sur les mouvements et les trajectoires réels des systèmes.....	XXII, 136

R8e	DUPORT (H.). Théorie des atomes.....	XXVI, 159
R8eβ.	CARVALLO. Théorie du pied équilibriste du gyroscope <i>Gervat</i> .	XXI, 55
R8eγ.	LECORNU. Sur les petits mouvements d'un corps pesant...	XXX, 71
R8g.	APPELL (P.). Interprétation de la période imaginaire dans un mouvement à la Poincaré.....	XXVI, 98
R8h.	LECORNU. Sur la dynamique des corps déformables.....	XXIX, 176
R8h.	COMBEBIAC. Sur la force vive utilisable.....	XXIX, 314
R8i.	BOURLET (G.). Étude théorique sur la bicyclette.....	XXVII, 47, 76
R9a.	APPELL (P.). Note sur la théorie du frottement de roulement.	XXIII, 98
R9dβ.	LECORNU (L.). Sur l'équilibre relatif d'un solide sollicité par la force centrifuge.....	XXVII, 289

S. — Mécanique des fluides; Hydrostatique; Hydrodynamique; Thermodynamique.

S2.	TOUCHE. Les équations de l'Hydraulique données par Lagrange.	XXVIII, 121, 125
S2.	TOUCHE. Sur une question posée par d'Alembert.....	XXIX, 4
S2a.	TOUCHE. Équation d'une trajectoire fluide.....	XXIII, 111
S2a.	TOUCHE. Transformation des équations générales du mouvement des fluides.....	XXI, 73
S2a.	TOUCHE. Transformation de l'équation de continuité en Hydraulique.	XXI, 129
S2a.	TOUCHE. Équation d'une trajectoire fluide dans le cas général.	XXV, 5
S2a.	TOUCHE. Calcul de la résistance de l'air à un disque, pour la vitesse de 30 ^m par seconde.....	XXV, 121
S2b.	GUYOU. Sur les équations du clapotis.....	XXI, 140
S2c.	APPELL. Déformation spéciale d'un milieu continu, tourbillons de divers ordres.....	XXIX, 16
S2c.	APPELL (P.). Sur les lignes qui se conservent dans la déformation d'un milieu continu.....	XXVI, 135
S2eα.	TOUCHE. Sur la résistance des fluides à une sphère.....	XXVI, 86
S2eα.	TOUCHE. Calcul de la résistance des fluides à un disque mince.	XXIV, 39
S4a.	CELLERIER (G.). Sur les principes généraux de la Thermodynamique et leur application aux corps élastiques.....	XXI, 26

T. — Physique mathématique; élasticité; résistance des matériaux; capillarité; lumière; chaleur; électricité.

T1a.	DUPORT (H.). Actions mutuelles de deux atomes.....	XXV, 185
T1a.	DUPORT (H.). Mémoire sur la constitution des atomes et sur l'action de la matière sur la matière.....	XXIV, 102
T1a.	DUPORT (H.). Sur la constitution des atomes et l'action de la matière sur la matière.....	XXIV, 197
T2.	APPELL (P.). Note sur les expériences du commandant Hartmann.	XXVIII, 66

- T2a. COMBES. Sur un système numérique complexe représentant le groupe des transformations conformes de l'espace..... XXIX, 1
- T2a. COMBES. Sur les équations générales de l'élasticité. XXIX, 108, 142
- T4c. BOULANGER (A.). Sur l'équation de la propagation de la chaleur. XXV, 11
- T6, T7. LUCAS (F.). Sur la nature des grandeurs magnétiques et électriques. XXI, 67

U. — Astronomie, Mécanique céleste et Géodésie.

- U1. STEPHANOS. Sur le temps solaire moyen..... XXV, 127

V. — Philosophie et histoire des sciences mathématiques; bibliographie de mathématiciens.

- V7. MAUPIN (G.). Note relative à un passage d'Albert Girard. XXIII, 191

X. — Procédés de calcul; Tables; Nomographie; calcul graphique; planimètres; instruments divers.

- X3. OCAGNE (M. D'). Abaque en points isoplèthes de l'équation de Képler. XXII, 197
- X3. OCAGNE (M. D'). Sur la représentation nomographique des équations du second degré à trois variables..... XXIV, 81
- X3. OCAGNE (D'). Théorème relatif aux abaques..... XXIV, 98
- X3. OCAGNE (D'). Sur la représentation des équations du second ordre par des droites et par des cercles..... XXV, 9
- X3. OCAGNE (D'). Application de la méthode nomographique la plus générale résultant de la superposition de deux plans aux équations à trois et à quatre variables..... XXVI, 16
- X3. OCAGNE (D'). Résumé d'un Mémoire sur les équations représentables par trois systèmes linéaires de points cotés..... XXVI, 53
- X4b. ARNOUX. Technologie graphique; appareil pour la décomposition d'un polynôme en facteurs..... XXI, 87
- X4c. DELAUNAY. Sur le calcul graphique des fonctions elliptiques et de quelques fonctions ultra-elliptiques..... XXX, 113
- X4c. PETROVITCH. Intégration graphique de certains types d'équations différentielles du premier ordre..... XXVII, 200
- X7. TORRÈS. Sur les rapports entre le calcul mécanique et le calcul graphique..... XXIX, 161
- X8. GREENHILL. Appareil stéréoscopique pour mettre en relief les figures géométriques se rapportant aux fonctions elliptiques... XXIX, 172
- X8. TORRÈS. Sur l'utilité des exemples cinématiques dans l'exposition des théories mathématiques..... XXIX, 197

TABLE PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE

DE NOMS D'AUTEURS.

- Adam (P.).** — Sur les surfaces admettant pour lignes de courbure deux séries de cercles géodésiques orthogonaux; XXII, 110. — Sur l'équation d'Euler et les lignes de courbure de l'ellipsoïde; XXII, 205. — Sur la déformation des surfaces; XXIII, 106. — Sur la déformation des surfaces avec conservation des lignes de courbure; XXIII, 195. — Théorème sur la déformation des surfaces de translation; XXIII, 204. — Mémoire sur la déformation des surfaces; XXIII, 219. — Sur un problème de déformation; XXIV, 28.
- Adhémar (d').** — Sur une intégration par approximations successives; XXIX, 190.
- Andrade.** — Note sur les intégrales de M. Schwarz; XXII, 50. — Sur une propriété mécanique des lignes géodésiques; XXII, 186. — Sur la stabilité; XXV, 49. — Sur quelques paradoxes de statique non euclidienne; XXVII, 73. — Sur l'équation fonctionnelle de Poisson; XXVIII, 58.
- André (Désiré).** — Sur le nombre des séquences dans les permutations des n premiers nombres; XXI, 131. — Mémoire sur les séquences des permutations; XXIII, 122. — Théorème nouveau de réversibilité algébrique; XXIV, 136.
- Antomari.** — Sur les surfaces réglées applicables avec parallélisme des génératrices; XXII, 58.
- Appell (P.).** — Sur les courbes autopolaires par rapport à une conique donnée; XXII, 27. — Sur le théorème des aires; XXII, 190. — Note sur la théorie du frottement de roulement; XXIII, 98. — Sur un mode d'inversion des intégrales multiples; XXV, 10. — Interprétation de la période imaginaire dans un mouvement à la Poincaré; XXVI, 98. — Sur les lignes qui se conservent dans la déformation d'un milieu continu; XXVI, 135. — Sur les équations de Lagrange et le principe d'Hamilton; XXVI, 265. — Propriété caractéristique du cylindroïde; XXVIII, 261. — Note sur les expériences du commandant Hartmann; XXVIII, 66. — Déformation spéciale d'un milieu continu, tourbillons de divers ordres; XXIX, 16.
- Arnoux.** — Technologie graphique, appareil pour la décomposition d'un polynôme en facteurs; XXI, 87.
- Arone (G. d').** — Sur les fonctions à espaces lacunaires; XXIII, 193.
- Auric.** — Sur une propriété très générale des déterminants; XXX, 177.
- Autonne (L.).** — Sur les variétés unicursales à plusieurs dimensions; XXVII, 263. — Sur certaines équations des quatrième et cinquième degrés; XXVIII, 90. — Sur une manière de représenter géométriquement un système de trois

variables complexes; XXIX, 95. — Sur les groupes linéaires, réels et orthogonaux; XXX, 121.

Baire — Nouvelle démonstration d'un théorème sur les fonctions discontinues; XXVIII, 173.

Balitrond. — Démonstration des formules fondamentales de la périmorphie et des formules de Codazzi; XXII, 97. — Sur le développement des coordonnées d'un point dans le mouvement relatif et sur la courbure des lignes orthogonales; XXIII, 26.

Barbarin. — Résumé d'un Mémoire sur la détermination d'un triangle au moyen des longueurs de ses bissectrices; XXII, 76.

Bendixson. — Démonstration de l'existence de l'intégrale d'une équation aux dérivées partielles linéaires; XXIV, 220.

Beudon (J.). — Sur les caractéristiques des équations aux dérivées partielles, XXV, 108. — Sur les singularités des équations aux dérivées partielles du premier ordre; XXVI, 77. — Sur les changements de variables; XXVIII, 107.

Bioche. — Sur les normales des courbes; XXI, 51. — Recherches sur les surfaces algébriques qui admettent pour asymptotique une cubique gauche; XXVI, 217. — Mémoire sur les surfaces du troisième ordre qui admettent pour ligne asymptotique une cubique gauche; XXVII, 96.

Blutel. — Sur une propriété des trajectoires obliques d'une famille de géodésiques; XXVII, 72.

Borel (Émile). — Sur les caractéristiques des fonctions θ ; XXVI, 89. — Sur les singularités des séries de Taylor; XXVI, 238. — Sur le prolongement analytique de la série de Taylor; XXVIII, 209. — Sur les formules d'Olinde Rodrigues; XXIX, 22. — Sur les ordres d'infinitude; XXIX, 154.

Boulangier (A.). — Sur l'équation de la propagation de la chaleur; XXV, 11.

Bourlet (C.). — Sur les transmutations; XXV, 135. — Étude théorique sur la bicyclette; XXVII, 47 et 76.

Bricard (R.). — Étude géométrique d'un déplacement remarquable et d'un hyperboloïde articulé; XXV, 98. — Note sur des systèmes de droites et de quadriques tangentes; XXV, 180. — Sur les fonctions elliptiques du second ordre; XXV, 212. — Note sur une propriété de fonctions elliptiques du second ordre; XXVI, 91. — Sur les propriétés métriques d'une certaine correspondance (1, 1) entre cubiques focales; XXVIII, 39. — Sur une propriété du cylindroïde; XXIX, 18. — Sur les systèmes réciproques de points; XXIX, 130.

Burkhardt. — Sur les fonctions de Green relatives à un domaine d'une seule dimension; XXII, 71.

Cahen. — Sur une généralisation de la formule qui donne la constante d'Euler; XXII, 227. — Sur la résolution exacte en nombres entiers des équations linéaires à coefficients quelconques; XXX, 234.

Caronnet. — Sur des complexes de surfaces applicables; XXI, 134.

Cartan (Élie) — Sur un théorème de M. Bertrand; XXII, 130. — Le principe de dualité et certaines intégrales multiples de l'espace tangentiel et de l'espace

réglé; XXIV, 140. — Sur quelques quadratures dont l'élément différentiel contient des fonctions arbitraires; XXIX, 118. — Sur l'intégration de certains systèmes de Pfaff de caractère deux; XXIX, 233.

Carvallo. — Théorie du pied équilibré du gyroscope Gervat; XXI, 55. — Sur l'intégration d'une équation aux dérivées partielles de la Physique mathématique; XXII, 234. — Généralisation d'extension à l'espace du théorème des résidus de Cauchy; XXIV, 180.

Caspary. — Sur le centre de gravité d'un quadrilatère; XXVIII, 143.

Cellerier (Gustave). — Sur les principes généraux de la Thermodynamique et leur application aux corps élastiques; XXI, 26.

Chailan. — Sur le mouvement d'un système à liaison complète; XXI, 81.

Clairin. — Sur certaines équations aux dérivées partielles du second ordre; XXX, 37. — Sur une classe de transformations des équations aux dérivées partielles du second ordre; XXX, 100.

Combebiac. — Sur l'application du calcul des biquaternions à la Géométrie plane; XXVI, 259. — Calcul des triquaternions; XXVII, 180. — Sur la force vive utilisable; XXIX, 314. — Sur un système numérique complexe représentant le groupe des transformations conformes de l'espace; XXX, 1. — Sur les équations générales de l'élasticité; XXX, 108 et 242.

Delannoy. — Sur une question de probabilités traitée par d'Alembert; XXIII, 262. — Sur la probabilité des événements composés; XXVI, 64.

Delassus. — Sur les engrenages à contact ponctuel; XXX, 43.

Delanay (N.). — Sur les surfaces n'ayant qu'un côté et sur les points singuliers des courbes planes; XXVI, 43. — Sur le calcul graphique des fonctions elliptiques et de quelques fonctions ultra-elliptiques; XXX, 113.

Demoulin. — Sur une classe particulière de courbes gauches; XXI, 8. — Sur une équation aux dérivées partielles du second ordre contenant $2m + 1$ fonctions arbitraires; XXI, 43. — Sur la relation qui existe entre les courbures totales de deux surfaces polaires réciproques par rapport à un paraboléide de révolution; XXI, 83. — Sur la congruence des axes centraux des complexes linéaires passant par trois droites données; XXI, 92. — Sur une propriété caractéristique de l'élément linéaire des surfaces de révolution; XXII, 47. — Note sur la détermination des couples de surfaces applicables telles que la distance de deux points correspondants soit constante; XXIII, 71. — Sur un théorème de Ribaucour et sur une propriété caractéristique des surfaces spirales; XXIII, 198. — Sur les surfaces qui présentent un réseau conjugué formé par des courbes dont les tangentes appartiennent à un complexe tétraédral; XXV, 83. — Sur la torsion d'une courbe définie par son plan osculateur; XXVIII, 180. — Sur le cylindroïde et sur la théorie des faisceaux de complexes linéaires; XXIX, 39.

Dumont. — Sur les surfaces du troisième ordre qui sont polaires d'elles-mêmes par rapport à une quadrique; XXV, 74. — Théorème sur les surfaces cubiques analogues au théorème de Chasles sur les cubiques planes; XXV, 235. — Sur deux formes particulières de l'équation réduite des surfaces du troisième ordre générales; XXVI, 124. — Sur les surfaces réglées du troisième ordre; XXVI,

137. — Sur les surfaces cubiques ayant un axe de symétrie ternaire et sur les surfaces cubiques possédant des points à indicatrice du troisième ordre; XXVIII, 117.
- Duporcq (E.).** — Sur les centres de gravité des courbes parallèles; XXIV, 193. — Sur un théorème de M. Humbert; XXVI, 81. — Sur une généralisation de la transformation de Lie; XXVII, 146. — Sur un déplacement remarquable à deux paramètres; XXIX, 1. — Sur une extension à l'espace du théorème de Simson; XXIX, 29.
- H. Duport.** — Mémoire sur la constitution des atomes et sur l'action de la matière sur la matière; XXIV, 102. — Sur la constitution des atomes et l'action de la matière sur la matière; XXIV, 197. — Actions mutuelles de deux atomes; XXV, 185. — Théorie des atomes; XXVI, 159. — Sur les hypothèses fondamentales de la Géométrie; XXVII, 138.
- Estanave.** — Sur les coefficients des développements en série de $\tanh x$, $\sec x$ et d'autres fonctions; XXX, 220.
- Fabry.** — Sur le genre des fonctions entières; XXX, 165.
- Fehr.** — Remarque sur le théorème de M. Montard; XXII, 67.
- Ferber.** — Sur un symbole analogue aux déterminants; XXVII, 285. — Applications du symbole des déterminants positifs; XXVIII, 128.
- Floquet.** — Sur les fonctions algébriques à trois déterminations; XXIII, 76.
- Fontené (G.).** — Sur la décomposition d'une correspondance tangentielle; XXV, 247. — Métrique an involutive; XXVI, 176. — Sur un système de sept clefs; XXVII, 171. — Sur les dégénérescences des soixante-trois systèmes de coniques quadruplement tangentes à une quartique; XXVII, 229.
- Frolov.** — Sur les racines primitives; XXI, 113. — Sur les racines primitives; XXII, 241.
- Genty (Max).** — Sur les involutions linéaires; XXI, 52. — Sur les systèmes collinéaires; XXI, 131. — Sur un théorème de Laguerre; XXI, 145. — Des suites cyclo-projectives de deuxième espèce; XXI, 148. — Note sur des couples de surfaces applicables; XXII, 36. — Sur les surfaces à courbure totale constante; XXII, 106. — Note sur la déformation infinitésimale des surfaces; XXII, 221.
- Gérard.** — Sur le postulat relatif à l'équivalence des polygones considéré comme corollaire du théorème de Varignon; XXIII, 271.
- Gino Loria.** — Sur les courbes gauches algébriques auto-correlatives; XXIII, 4.
- Godefroy.** — Sur les courbes de Lamé; XXI, 20.
- Goursat (E.).** — Sur les tangentes à une cubique plane; XXII, 45. — Sur une formule de la théorie des fonctions elliptiques; XXIII, 18. — Sur des équations différentielles analogues à l'équation de Clairaut; XXIII, 88. — Sur les lignes asymptotiques; XXIV, 43. — Sur une équation aux dérivées partielles; XXV, 36. — Sur les équations linéaires qui admettent quatre intégrales liées par une relation quadrique; XXV, 95. — Sur les équations d'une surface rapportée à ses lignes de longueur nulle; XXVI, 83. — Sur l'existence des fonctions intégrales d'un système d'équations aux dérivées partielles; XXVI,

129. — Sur l'équation $\Delta\Delta u = 0$; XXVI, 236. — Sur les équations du second ordre à n variables analogue à l'équation de Monge-Ampère; XXVII, 1. — Sur une transformation de l'équation $s^2 = 4\lambda(x, y) \mu y$; XXVIII, 1. — Sur un problème relatif aux lignes asymptotiques; XXX, 12. — Sur un groupe de transformations; XXX, 155.

Greenhill. — Appareil stéréoscopique pour mettre en relief les figures géométriques se rapportant aux fonctions elliptiques; XXIX, 172.

Grévy. — Équations fonctionnelles avec second membre; XXV, 57.

Guccia. — Sur une expression du genre des courbes gauches algébriques données de singularités quelconques; XXIII, 101.

Guyou. — Sur les équations du clapotis; XXI, 140.

Hadamard. — Sur les fonctions entières; XXIV, 186. — Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences arithmétiques; XXIV, 199. — Sur la forme des géodésiques à l'infini et sur les géodésiques des surfaces du second ordre; XXVI, 195. — Sur la généralisation du théorème de Guldin; XXVI, 264. — Sur les conditions de décomposition des formes; XXVII, 34. — Sur les intégrales d'un système d'équations différentielles ordinaires considérées comme fonction des données initiales; XXVIII, 64. — Sur l'intégrale résiduelle; XXVIII, 69. — Sur la propagation des ondes; XXIX, 50. — Sur l'itération et les solutions asymptotiques des équations différentielles; XXIX, 224. — Sur les dérivées des fonctions de lignes; XXX, 40. — Sur une condition que l'on peut imposer à une surface; XXX, 111. — Sur une classe d'équations différentielles; XXX, 208. — Sur une question de calcul des variations; XXX, 253.

Haton de la Goupillière. — Théorème sur le centre des moyennes distances; XXI, 5.

Humbert. — Sur une propriété des cônes du second ordre; XXI, 3. — Expression de quelques aires sur le parabolôïde elliptique; XXI, 13. — Expression de quelques nouvelles aires sur le parabolôïde elliptique; XXI, 17. — Sur une interprétation géométrique de l'équation modulaire pour la transformation du troisième ordre; XXVI, 233. — Sur une interprétation géométrique de l'équation modulaire; XXVII, 69. — Sur les polygones de Poncelet; XXVII, 70. — Détermination des courbes algébriques de degré donné qu'on peut tracer sur la surface de l'onde; XXX, 23.

Issaly (l'abbé). — Sur une formule de Laguerre étendue aux pseudo-surfaces; XXV, 243. — Sur une formule d'Enneper et sa corrélatrice; XXVI, 114.

Kobb. — Sur un point de la théorie des fonctions algébriques de deux variables; XXI, 76. — Sur le problème de la rotation d'un corps autour d'un point fixe; XXIII, 210.

Koch (H. von). — Sur un théorème de Stieltjes et sur les fonctions définies par des fractions continues; XXIII, 33. — Sur les fonctions implicites définies par une infinité d'équations simultanées; XXVII, 215.

Kœnigs. — Sur un mouvement particulier d'un point dans le plan; XXII, 25.

Krygowski. — Sur les fonctions à espaces lacunaires; XXX, 240.

Laisant — Un théorème général de Mécanique; XXI, 151. — Principes de la méthode de M. Arnoux concernant l'étude des espaces arithmétiques hypermagiques; XXII, 18. — Propriété du mouvement d'un point matériel dans l'espace; XXII, 217. — Remarque sur une équation différentielle linéaire; XXIII, 62. — Note relative aux asymptotes et aux cercles de courbure; XXIII, 95. — A propos des asymptotes et des cercles de courbure; XXIII, 190. — Identités relatives à des polynômes entiers; XXIV, 191. — Propriétés algébriques des coefficients du binôme; XXIV, 197. — Sur un procédé de vérification expérimentale du théorème de Goldbach; XXV, 209. — Sur la loi de l'hodographe circulaire dans les mouvements dus à une force centrale; XXVI, 82. — Coordonnées polaires symétriques; XXVI, 271. — Sur certaines suites récurrentes; XXIX, 145.

Landau (E.) — Sur la série des inverses des nombres de Fibonacci; XXVII, 298. — Sur quelques problèmes relatifs à la distribution des nombres premiers; XXVIII, 25.

Larose — Démonstration du théorème de M. Vaschy sur une distribution quelconque de vecteur; XXIV, 177.

Leau — Sur un problème d'itération; XXVI, 5. — Extension d'un théorème de M. Hadamard à l'étude des séries de Taylor; XXVI, 267. — Représentation des fonctions par des séries de polynômes; XXVII, 194.

Lecornu (L.) — Sur quelques cas de discontinuité en Mécanique; XXII, 81. — Sur une équation fonctionnelle; XXIII, 102. — Sur le pendule de longueur brusquement variable; XXIV, 133. — Sur l'engrenage à fuseaux; XXV, 140. — Sur les engrenages à dents circulaires; XXV, 172. — Note complémentaire sur l'engrenage à fuseaux; XXV, 206. — Sur les développantes d'une développante de cercle; XXVI, 85. — Sur la stabilité de l'équilibre; XXVI, 163. — Sur certaines équations aux différences mêlées; XXVII, 153. — Sur l'équilibre relatif d'un solide sollicité par la force centrifuge; XXVII, 289. — Sur la vis sans fin; XXIX, 149. — Sur la dynamique des corps déformables; XXIX, 176. — Sur les petits mouvements d'un corps pesant; XXX, 71. — Sur le mouvement vertical d'un projectile dans un milieu résistant; XXX, 202.

Lémeray — Un théorème sur les fonctions itératives; XXIII, 255. — Sur la dérivée des fonctions itératives au point limite; XXV, 52. — Dérivée des fonctions itératives par rapport à l'indice d'itération; XXV, 92. — Sur quelques algorithmes et sur l'itération; XXVI, 10. — Sur les équations fonctionnelles qui caractérisent les opérations associatives et les opérations distributives; XXVII, 130. — Application des fonctions doublement périodiques à la solution d'un problème d'itération; XXVII, 282.

Lemoine (Em.) — Note sur une construction approchée du développement; XXIII, 242. — Détermination simple de la direction des axes d'une conique; XXIX, 217.

Le Roux — Sur l'équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre; XXV, 63. — Sur l'intégrabilité des équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre par la méthode de Laplace; XXVI, 55. — Extension de la méthode de Laplace aux équations linéaires aux dérivées partielles d'ordre supérieur au second; XXVII, 237. — Sur un invariant d'un système de deux triangles et la théorie des intégrales doubles; XXVIII, 168.

Lindelof (E.) — Sur les équations homogènes; XXIV, 35. — Sur la croissance

- des intégrales des équations différentielles algébriques du premier ordre; XXVII, 205. — Sur le prolongement analytique; XXIX, 156.
- Lucas (Félix).** — Sur la nature des grandeurs magnétiques et électriques; XXI, 67. — Propriétés d'un système de points dans un plan; XXI, 109. — Note relative à la théorie des nombres; XXV, 33.
- Mac Mahon.** — Solution du problème de partition d'où résulte le dénombrement des genres distincts d'abaques relatifs aux équations à n variables; XXVI, 57.
- Maillet.** — Extension du théorème de Fermat sur les nombres polygones; XXIII, 40. — Note sur les substitutions; XXIV, 85. — Des groupes primitifs de classe $N-1$ et de degré N ; XXV, 16. — Sur les groupes de substitutions deux fois transitifs à trois degrés; XXV, 189. — Des groupes transitifs de substitution de degré $N-1$; XXVI, 249. — Sur les groupes échangeables et les groupes décomposables; XXVIII, 7. — Sur les systèmes complets d'équations aux dérivées partielles; XXIX, 209. — Sur certains théorèmes de Géométrie cinématique; XXIX, 221. — Sur les propriétés arithmétiques des fonctions entières et quasi-entières; XXX, 134. — Sur les équations différentielles et la théorie des ensembles; XXX, 195.
- Mangeot.** — De quelques propriétés des cubiques planes et gauches; XXI, 44. — Sur une propriété des surfaces de symétrie d'une quadrique; XXI, 146. — Sur le centre de gravité d'une espèce de solide à deux dimensions infiniment petites; XXIII, 266. — Sur une manière de représenter le rapport des deux courbures d'une courbe gauche; XXIV, 98. — Sur les conditions pour qu'une courbe plane algébrique ait des axes en nombre donné; XXV, 54.
- Mannheim.** — Nouvelle démonstration d'une propriété de l'indicatrice; XXII, 219. — Sur les lignes de courbure des surfaces du second ordre; XXIII, 1. — Sur le rapport des deux courbures d'une courbe gauche; XXIV, 188. — Sur les formules de Frenet; XXV, 4. — Note à propos d'un théorème connu de Géométrie; XXV, 78.
- Maupin (G.).** — Note sur une question de probabilités traitée par d'Alembert dans l'Encyclopédie; XXIII, 185. — Note relative à un passage d'Albert Girard; XXIII, 191.
- Michel.** — Courbe d'ombre sur une surface particulière du quatrième ordre; XXIV, 26.
- Miller.** — Sur plusieurs groupes simples; XXVIII, 266.
- Moncheuil (de).** — Étude des surfaces définies par l'équation $R + R' = F(u) + F_1(u_1)$; XXVI, 103. — Étude sur les surfaces réelles définies par l'équation $\xi^{10} u_1^2 u_2^2 = 0$; XXVII, 114. — Généralisation des formules de M. Schwarz relatives aux surfaces minima; XXVIII, 268.
- Montessus (de).** — Sur les fractions continues algébriques; XXX, 47.
- Ocagne (M. d').** — Sur les suites récurrentes; XXI, 3. — Remarque sur la dévolution des surfaces de révolution; XXI, 85. — Abaque en points isoplèthes de l'équation de Képler; XXII, 197. — Sur la composition des lois de probabilité des erreurs de situation d'un point sur un plan; XXIII, 65. — Étude géométrique sur l'héliconde réglé le plus général; XXIII, 144. — Sur

la représentation nomographique des équations du second degré à trois variables; XXIV, 81. — Théorème relatif aux abaques; XXIV, 98. — Sur le signe de la torsion des courbes gauches et du paramètre de distribution des surfaces réglées; XXIV, 195. — Sur une transformation birationnelle réciproque de l'espace; XXV, 8. — Sur la représentation des équations du second ordre par des droites et par des cercles; XXV, 9. — Sur les paramètres de distribution du parabolôide hyperbolique; XXV, 130. — Application de la méthode nomographique la plus générale résultant de la superposition de deux plans aux équations à trois et quatre variables; XXVI, 16. — Résumé d'un Mémoire sur les équations représentables par trois systèmes linéaires de points cotés; XXVI, 53. — Problème de partition; XXVIII, 157. — Sur les barycentres cycliques dans les courbes algébriques; XXX, 83.

Painlevé. — Note sur une identité entre certains déterminants; XXII, 116. — Sur les mouvements et les trajectoires réels des systèmes; XXII, 136. — Sur le calcul des intégrales d'un système différentiel par la méthode de Cauchy-Lipschitz; XXVII, 149. — Sur la représentation des fonctions elliptiques; XXVII, 301. — Mémoire sur les équations différentielles dont l'intégrale générale est uniforme; XXVIII, 201. — De la détermination unique des intégrales d'un système d'équations différentielles ordinaires par les conditions initiales de Cauchy; XXVIII, 191.

Pellet. — Mémoire sur la théorie infinitésimale des équations et les fonctions implicites; XXIII, 7. — Sur la théorie des surfaces; XXVI, 138. — Sur la formule d'approximation de Newton; XXIX, 139. — Sur la méthode d'approximation de Newton; XXIX, 228 et 320. — Sur l'approximation des racines réelles des équations; XXX, 176.

Perott (J.). — Sur les groupes de Galois; XXI, 61.

Petrovitch (M.). — Remarques algébriques sur les fonctions définies par les équations différentielles du premier ordre; XXIV, 58. — Sur l'équation différentielle linéaire du second ordre; XXV, 221. — Intégration graphique de certains types d'équations différentielles du premier ordre; XXVII, 200. — Remarque sur les zéros des séries de Taylor; XXIX, 303.

Picard (Émile). — Sur les transformations birationnelles des courbes algébriques en elles-mêmes; XXI, 1. — Sur une équation aux dérivées partielles de la théorie de la propagation de l'électricité; XXII, 2. — Sur la méthode des approximations successives et les équations différentielles linéaires; XXII, 52. — Sur la détermination des intégrales des équations aux dérivées partielles du second ordre par certaines conditions aux limites; XXII, 103. — Sur la rotation d'un système déformable; XXII, 195. — Remarque au sujet d'une Communication récente de M. I. Bendixson; XXV, 35. — Sur une classe de surfaces algébriques dont les coordonnées s'expriment par des fonctions uniformes de deux paramètres; XXVIII, 17. — Sur un exemple d'approximations successives divergentes; XXVIII, 117. — Sur quelques problèmes relatifs à l'équation $\Delta u = k^2 u$, ...; XXVIII, 180.

Picquet. — Nouvelle contribution au problème du huitième point commun à trois quadriques; son identité avec un problème plan; XXII, 19.

Poincaré. — Sur les surfaces de translation et les fonctions abéliennes; XXIX, 61. — Sur certaines surfaces algébriques. Troisième complément à l'*Analysis situs*; XXX, 49.

Polignac (de). — Sur un théorème de Tait; XXVII, 142.

Raffy. — Sur une équation d'Euler; XXI, 44. — Sur une nouvelle classe de surfaces isothermiques et sur les surfaces déformables sans altération des courbures principales; XXI, 70. — Sur les géodésiques spéciales des surfaces harmoniques; XXII, 8. — Recherches sur les surfaces harmoniques (résumé); XXII, 63. — Recherches sur les surfaces harmoniques (résumé) (suite); XXII, 84. — Sur le problème général de la déformation des surfaces; XXII, 119. — Sur certaines équations qu'on intègre en les différentiant; XXIII, 50. — Sur certaines équations différentielles linéaires; XXIII, 63. — Sur deux classes de surfaces analogues aux surfaces tétraédrales; XXIV, 2. — Surfaces rapportées à un réseau conjugué azimutal; XXIV, 51. — Sur le signe de la torsion des courbes gauches; XXIV, 185. — Sur les formules fondamentales de la théorie des surfaces; XXV, 1. — Sur certaines équations différentielles d'ordre supérieur analogues à l'équation de Clairaut; XXV, 71. — Sur une propriété caractéristique des hélicoïdes; XXV, 124. — Contribution à la théorie des surfaces dont les rayons de courbures principaux sont liés par une relation; XXV, 147. — Sur la déformation des surfaces et sur certaines transformations des équations aux dérivées partielles du second ordre; XXX, 106. — Sur le réseau diagonal conjugué; XXX, 226.

Ripert. — Sur les propriétés générales des formes quadratiques; XXVIII, 56. — Sur les triangles trihomologiques inscrits ou circonscrits à une conique; XXVIII, 196. — Sur trois propriétés de six points d'une conique; XXIX, 317.

Rivereau. — Invariants des équations aux dérivées partielles du second ordre linéaires et homogènes; XXIX, 7.

Saltykow. — Sur les intégrales des équations aux dérivées partielles du premier ordre d'une seule fonction; XXIX, 86.

Schlegel. — Sur le théorème de M. Haton de la Goupillière relatif au centre des moyennes distances; XXI, 49. — Sur un système de coordonnées tétraédriques; XXIII, 216.

Séguier (de). — Courbe remplissant un cube à n dimensions; XXIX, 312. — Sur la forme canonique des substitutions linéaires; XXX, 247.

Sélibanoff. — Quelques remarques sur les équations du cinquième degré; XXI, 97.

Servant. — Sur les formules de Gauss; XXIX, 142. — Sur la déformation des quadriques; XXIX, 231. — Sur la déformation des quadriques; XXX, 18 et 92.

Sparre (de). — Sur une application des fonctions elliptiques; XXVIII, 52. — Sur une application des fonctions elliptiques à l'étude du mouvement des projectiles; XXIX, 30.

Stéphanos. — Sur le temps solaire moyen; XXV, 127.

Störmer (Carl). — Solutions complètes en nombres entiers de l'équation $m \arctan \frac{1}{x} + n \arctan \frac{1}{y} = k \frac{\pi}{4}$; XXVII, 160. — Sur une propriété arithmétique des logarithmes de nombres algébriques; XXVIII, 146.

- Torrès** — Sur les rapports entre le calcul mécanique et le calcul graphique; XXIX, 161. — Sur l'utilité des exemples cinématiques dans l'exposition des théories mathématiques; XXIX, 167.
- Touche** — Transformation des équations générales du mouvement des fluides; XXI, 73. — Transformation de l'équation de continuité en Hydraulique; XXI, 129. — Équation d'une trajectoire fluide; XXIII, 111. — Calcul de la résistance des fluides à un disque mince; XXIV, 39. — Équation d'une trajectoire fluide dans le cas général; XXV, 5. — Calcul de la résistance de l'air à un disque pour la vitesse de 20^m par seconde; XXV, 121. — Sur les figures inverses limites; XXVI, 3. — Sur la résistance des fluides à une sphère; XXVI, 86. — Les équations de l'Hydraulique données par Lagrange; XXVIII, 121 et 125. — Sur une question posée par d'Alembert; XXIX, 4.
- Tresse**. — Sur les propriétés projectives des coniques; XXVIII, 131.
- Vernier**. — Sur les formes binaires dont les variables sont des intégrales fondamentales d'une équation différentielle linéaire du second ordre; XXII, 133.
- Vessiot**. — Sur une méthode de transformation et sur la réduction des singularités d'une courbe algébrique; XXII, 208.
- Weill**. — Sur une classe de polygones de Poncelet; XXIX, 199. — Sur les points de base d'un faisceau linéaire de courbes algébriques; XIX, 6.
- Zaremba**. — Sur la réduction du nombre des périodes d'une fonction périodique; XXII, 68. — Contribution à la théorie de la fonction de Green; XXIV, 19. — Sur l'équation aux dérivées partielles $\Delta u - \xi u + f = 0$; XXVI, 70.
- Zoukis**. — Sur quelques formules des fonctions homogènes et sur la démonstration d'un théorème qui s'y rattache; XXX, 181.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
35205 Quai des Grands-Augustins, 55.

QA

1

S59

t.29-30

Physical &

Applied Sci.

Serials

Math

Société mathématique de

France, Paris

Bulletin

PLEASE DO NOT REMOVE

CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY
